目　录

第一章　基础知识

一、 数域

1. 什么叫做数域？

答 设 P 是由一些复数组成的集合，其中包括 0、1. 如果 P 中任意两个数的和、差、积、商（除数不为零）均是 P 中的数，则称 P 为一个数域.

注 P 的任意两数的和（差、积、商）属于 P，也称 P 对数的加法（减法、乘法、除法）运算封闭.

2. 任何数域都包含有理数域 Q.

3. 设 P 是至少含有两个数的数集，且 P 对加法与乘法运算封闭，如果 P 中任意数 a 的 $-a$ 属于 P，且任意非零数 a 的 a^{-1} 属于 P，则 P 必为数域.

证 $\forall a, b\in P$，由于 $-b\in P$，因此 $a-b=a+(-b)\in P$. 再当 $a\neq 0$ 时，由于 $a^{-1}\in P$，而 P 对乘法运算封闭，故 $\dfrac{b}{a}=ba^{-1}\in P$. 即 P 对减法及除法运算也封闭，从而 P 作成数域.

4. 设 P 是至少含有两个数的数集，如果 P 中任意两个数的差及商（除数不为零）属于 P，则 P 必为数域.

证 由题设 P 中至少含有一个非零数 a. 因为 P 对减法和除法运算封闭，所以

$$0=a-a\in P,1=\frac{a}{a}\in P.$$

$\forall c,d\in P$，则 $-d=0-d\in P$. 所以 $c+d=c-(-d)\in P$.

$\forall c,d\in P$，当 $d=0$ 时，$cd=0\in P$；当 $d\neq 0$ 时，$cd=c/\dfrac{1}{d}\in P$.

故 P 对加法、乘法运算是封闭的，因而 P 是数域.

5. 判断下列数集是否为数域：

1) $P_1=\{a+b\sqrt{3}i \mid a,b\in Q, i^2=-1\}$；

2) $P_2=\{a+bi \mid a\in Q, b\in R, R$ 是实数域$\}$；

3) $P_3=\{\frac{m}{2^n} \mid m,n\in Z, Z$ 是整数集$\}$；

4) $P_4=\{a+b\sqrt{p} \mid a,b\in Q, p$ 是素数$\}$；

5) $P_5=\{a\sqrt{5} \mid a\in Q\}$；

6) $P_6=\{a+b\sqrt[3]{2} \mid a,b\in Q\}$.

解 1) P_1 是数域．易见 $0\in P_1, 1\in P_1$．任取 $a+b\sqrt{3}i$，$c+d\sqrt{3}i\in P_1$，则

$$(a+b\sqrt{3}i)-(c+d\sqrt{3}i)=(a-c)+(b-d)\sqrt{3}i\in P_1.$$

再设 $a+b\sqrt{3}i\neq 0$，则

$$\frac{c+d\sqrt{3}i}{a+b\sqrt{3}i}=\frac{ac+3bd}{a^2+3b^2}+\frac{ad-bc}{a^2+3b^2}\sqrt{3}i\in P_1.$$

即 P_1 对减法、除法运算是封闭的，所以由第 4 条知 P_1 作成数域．

2) P_2 不作成数域．这是因为例如 $i,\sqrt{2}i\in P_2$，但 $\sqrt{2}i\cdot i=-\sqrt{2}\,\overline{\in}\,P_2$，即 P_2 对乘法运算不封闭．

3) P_3 不作成数域．取 $\frac{5}{2},\frac{7}{2}\in P_3$，但 $\frac{5}{2}/\frac{7}{2}=\frac{5}{7}\,\overline{\in}\,P_3$，即 P_3 对除法运算不封闭．

4) P_4 是数域．易见 $0,1\in P_4$．$\forall\, a+b\sqrt{p}, c+d\sqrt{p}\in P_4$，则

$$(a+b\sqrt{p})-(c+d\sqrt{p})=(a-c)+(b-d)\sqrt{p}\in P_4.$$

再设 $c+d\sqrt{p}\neq 0$，则 $c-d\sqrt{p}\neq 0$．于是

$$\frac{a+b\sqrt{p}}{c+d\sqrt{p}}=\frac{ac-pbd}{c^2-pd^2}+\frac{bc-ad}{c^2-pd^2}\sqrt{p}\in P_4.$$

故由第 4 条知 P_4 是数域．

5) P_5 不作成数域. 这是因为 P_5 对乘法运算不封闭. 例如，$\sqrt{5}\in P_5$，但$\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}=5\overline{\in}P_5$；

6) P_6 不作成数域. P_6 对乘法运算不封闭. 例如，$\sqrt[3]{2}\in P_6$，但$\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{4}\overline{\in}P_6$.

注 由于素数 p 有无穷多个，因此由 4)知数域也有无穷多个. 由此还可看出，有理数域 Q 与实数域 R 之间有无穷多个互不相同的数域.

6. 设 m 是给定的正有理数，令

$$P=\{x+y\sqrt{m}\mid x,y\in Q\},$$

则1) P 是数域；

2) $P=Q$ 的充要条件是 m 为一个有理数的完全平方.

证 1)仿第 5 条中 4)可证.

2)若 $P=Q$，令 $x=0,y=1$，则$\sqrt{m}=0+1\cdot\sqrt{m}\in Q$，即$\sqrt{m}=\dfrac{b}{a}$，$a,b\in Q$. 从而 $m=\left(\dfrac{b}{a}\right)^2$.

反之，若 m 是一个有理数的完全平方，则 $\sqrt{m}\in Q$. 从而 $P=Q$.

7. 设 $P=\left\{a+b\sqrt{m}\mid a,b\in Q,m=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$，则 P 是一个数域.

证 由 $m=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$，得

$$\sqrt{m}=\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}=\frac{\sqrt{(1+\sqrt{5})^2}}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

所以

$$a+b\sqrt{m}=a+b\,\frac{1+\sqrt{5}}{2}=(a+\frac{b}{2})+\frac{b}{2}\sqrt{5}.$$

令 $a+\dfrac{b}{2}=c$，$\dfrac{b}{2}=d$，则 $c,d\in Q$. 反之，若 $c,d\in Q$，则 $a,b\in Q$.

$P=\{a+b\sqrt{m}\mid a,b\in Q\}=\{c+d\sqrt{5}\mid c,d\in Q\}$. 故 P 是数域.

8. 令 $P(\sqrt[3]{2})=\{a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}\mid a,b,c\in Q\}$，则 $P(\sqrt[3]{2})$是一个数域.

证 $P(\sqrt[3]{2})$对加、减、乘法运算封闭是显然的. 下面证明 $P(\sqrt[3]{2})$对除法运算也封闭.

设 $\gamma=a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}\neq 0$，则

$$(\gamma-a)^3=(b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4})^3.$$

所以 $$\gamma^3-3a\gamma^2+(3a^2-6bc)\gamma-(a^3+2b^3+4c^3-6abc)=0. \tag{1}$$

于是一定有 $a^3+2b^3+4c^3-6abc\neq 0$(否则，由 $a^3+2b^3+4c^3-6abc=0$ 及 $\gamma\neq 0$ 得

$$\gamma^2-3a\gamma+3a^2-6bc=0. \tag{2}$$

将 γ,γ^2 代入上式，并整理得

$$(a^2-2bc)+(2c^2-ab)\sqrt[3]{2}+(b^2-ac)\sqrt[3]{4}=0. \tag{3}$$

所以 $a^2-2bc=2c^2-ab=b^2-ac=0$. 由此可得 a,b,c 均不为 0，且 $a^3=2b^3$，$\sqrt[3]{2}=\dfrac{a}{b}$，矛盾). 由此，(1)式两边除以 $\gamma(a^3+2b^3+4c^3-6abc)$，并由(2)、(3)两式得

$$\frac{1}{\gamma}=\frac{(a^2-2bc)+(2c^2-ab)\sqrt[3]{2}+(b^2-ac)\sqrt[3]{4}}{a^3+2b^3+4c^3-6abc}$$

所以$\dfrac{1}{\gamma}\in P(\sqrt[3]{2})$. 于是，$\forall\ \gamma_1,\gamma_2(\neq 0)\in P(\sqrt[3]{2})$，有$\dfrac{\gamma_1}{\gamma_2}=\gamma_1\cdot\dfrac{1}{\gamma_2}\in P(\sqrt[3]{2})$，即 $P(\sqrt[3]{2})$对除法运算封闭.

9. $P=\{a+b\sqrt{m}+c\sqrt{n}+d\sqrt{mn}\mid a,b,c,d\in Q,m,n$ 是正整数$\}$是一个数域.

证 当$\sqrt{m}$、$\sqrt{n}$中有一个是有理数或是相同无理数时，由第 6 条知 P 作成数域. 下面假定$\sqrt{m}$、$\sqrt{n}$是两个不相同的无理数而证明 P 是数域. 易知 P 对加、减、乘法运算是封闭的.

设 $\gamma=a+b\sqrt{m}+c\sqrt{n}+d\sqrt{mn}\in P$，且 $\gamma\neq 0$，令 $\bar{\gamma}=(a+b\sqrt{m})-(c+d\sqrt{m})\sqrt{n}\in P$，且 $\bar{\gamma}\neq 0$（否则，由 $\bar{\gamma}=0$，得 $a+b\sqrt{m}=(c+d\sqrt{m})\sqrt{n}$．若 $c+d\sqrt{m}\neq 0$，则

$$\sqrt{n}=\frac{a+b\sqrt{m}}{c+d\sqrt{m}}=x+y\sqrt{m},$$

其中 $x=\dfrac{ac-mbd}{c^2-md^2}$，$y=\dfrac{bc-ad}{c^2-md^2}$．$P$ 是形如 $a+b\sqrt{m}$ $(a,b\in Q)$ 的数作成的集合，不可．因此 $c+d\sqrt{m}=0$．从而 $a+b\sqrt{m}=0$．由于 $\sqrt{m}$ 是无理数，故 $a=b=c=d=0$．这与 $\gamma\neq 0$ 矛盾）．于是

$$\gamma\bar{\gamma}=(a+b\sqrt{m})^2-n(c+d\sqrt{m})^2=x+y\sqrt{m}\neq 0, \qquad (1)$$

其中 $x=a^2+b^2m-nc^2-mnd^2$，$y=2ab-2cdn$．由(1)式得

$$\gamma\bar{\gamma}(x-y\sqrt{m})=x^2-my^2\neq 0.$$

所以 $\dfrac{1}{\gamma}=\dfrac{\bar{\gamma}(x-y\sqrt{m})}{x^2-my^2}\in P$．由此易知 P 对除法运算封闭．故 P 是数域．

10. $P_1=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in Q\}$，$P_2=\{a+b\sqrt{3}\mid a,b\in Q\}$．包含 P_1 和 P_2 的最小数域为何？

答　包含 P_1 与 P_2 的最小数域为

$$K=\{a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}\mid a,b,c,d\in Q\}.$$

事实上，首先由第 9 条知 K 是数域，且 $P_1\subset K$，$P_2\subset K$．其次，设 P 为包含 P_1 和 P_2 的任意一个数域，则由 $\sqrt{2}\in P_1$，$\sqrt{3}\in P_2$ 知 $\sqrt{2}$，$\sqrt{3}\in P$．但 P 是数域，故 $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}\in P$．从而 $\forall\, a,b,c,d\in Q$ 有

$$a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}\in P,$$

即 $K\subseteq P$．此即表明 K 为包含 P_1 及 P_2 的最小数域．

11.　设 P_1 及 P_2 是两个数域，则

1) $P_1\cap P_2$ 是数域；

2) $P_1 \cup P_2$ 是数域的充要条件是 $P_1 \subseteq P_2$ 或 $P_2 \subseteq P_1$.

证　1) 因为 $0,1 \in P_1$ 及 P_2，所以 $0,1 \in P_1 \cap P_2$.

$\forall a,b \in P_1 \cap P_2$，则 $a,b \in P_1$ 且 $a,b \in P_2$. 由于 P_1 及 P_2 均是数域，因此 $a-b \in P_1$ 及 P_2. 所以 $a-b \in P_1 \cap P_2$. 当 $b \neq 0$ 时，那么 $\frac{a}{b} \in P_1$，$\frac{a}{b} \in P_2$，所以 $\frac{a}{b} \in P_1 \cap P_2$. 故由第 4 条知 $P_1 \cap P_2$ 是数域.

2) 必要性.　若 $P_1 \not\subseteq P_2$，即有 $a \in P_1$ 但 $a \overline{\in} P_2$. $\forall x \in P_2$，则 $x \in P_1 \cup P_2$. 由于 $P_1 \cup P_2$ 是数域，故 $a+x=b \in P_1 \cup P_2$. 于是 b 必属于 P_1 与 P_2 中的一个. 但 $b \overline{\in} P_2$（否则，$a=b-x \in P_2$，这与 $a \overline{\in} P_2$ 矛盾），从而 $b \in P_1$. 于是 $x=b-a \in P_1$，即 $P_2 \subseteq P_1$.

充分性是显然的.

12.　实数域 R 与复数域 C 之间不存在其它的数域.

证　设 P 是 C 中任意一个包含 R 且不同于 R 的数域，则 P 至少含一个复数 $a+bi$ $(b \neq 0)$. 于是由 P 是数域得

$$i=\frac{(a+bi)-a}{b} \in P.$$

又 $R \subseteq P$，所以对任意的实数 c,d 都有 $c+di \in P$，即 P 含全体复数，所以 $P=C$.

二、　映射

13.　什么叫做映射？

答　设 A、B 是两个非空集合，若对于 A 的每一个元素 a，法则 φ 都能规定 B 的一个确定的元素 b 与 a 相应，则称 φ 为 A 到 B 的一个映射，记为 $\varphi: A \to B$；b 称为 a 在 φ 的作用下的象，记为 $b=\varphi(a)$；a 称为 b 在 φ 的作用下的一个原象.

14.　什么叫单射？什么叫满射？什么叫双射？什么叫变换？

答　设 φ 是集合 A 到集合 B 的一个映射. 若对于 A 中任意元素 a、b，当 $a \neq b$ 时，有 $\varphi(a) \neq \varphi(b)$，则称 φ 是 A 到 B 的一个单射；

若 B 中每个元素在 φ 的作用下都有原象，则称 φ 是 A 到 B 的一个满射；若 φ 既是单射又是满射，则称 φ 是 A 到 B 的一个双射.

集合 A 到自身的映射称为 A 的变换.

15. 下列法则是否为有理数集 Q 到整数集 Z 的映射？如果是，它们是否为单射或满射？

1) φ_1：分数 $\frac{b}{a}\longrightarrow a+b$，其中 $a,b\in Z$；

2) φ_2：既约分数 $\frac{b}{a}\longrightarrow a+b$，其中 $a,b\in Z$；

3) φ_3：分母为正的既约分数 $\frac{b}{a}\longrightarrow a+b$，其中 $a,b\in Z,b>0$；

4) φ_4：既约分数 $\frac{b}{a}\longrightarrow ab$，其中 $a,b\in Z$.

答 1) φ_1 不是 Q 到 Z 的映射，因为相等的有理数 $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$ 在 φ_1 的作用下对应不同的数 3 与 6.

2) φ_2 不是 Q 到 Z 的映射，因为 $\frac{1}{-2}$ 和 $\frac{-1}{2}$ 是相等的既约分数，但它们在 φ_2 的作用下分别对应 -1 和 1.

3) φ_3 是 Q 到 Z 的映射，因为每个有理数写成分母为正的既约分数时是唯一的. φ_3 是满射，因为 $\forall\, n\in Z$ 有 $\varphi_3(\frac{n-1}{1})=n$. φ_3 不是单射. 因为 $\frac{3}{5}$ 与 $\frac{5}{3}$ 的象都是 8.

4) φ_4 是 Q 到 Z 的映射. 因为既约分数 $\frac{b}{a}$ 若为正，则 a 与 b 同号，ab 为正是唯一确定的；若 $\frac{b}{a}$ 为负，则 a 与 b 异号，ab 为负也是唯一确定的；若 $\frac{b}{a}=0$，则 $ab=0$ 也唯一；所以 φ_4 是 Q 到 Z 的映射.

$\forall\, n\in Z$，因为 $\varphi_4(\frac{n}{1})=n$，所以 φ_4 是满射. φ_4 不是单射，因为比如 $\frac{3}{2}\neq\frac{6}{1}$，$\varphi_4(\frac{3}{2})=\varphi_4(\frac{6}{1})=6$.

16. 什么叫做恒等映射？什么叫做映射相等？

答 设 A 为非空集合，映射 $x \longrightarrow x, \forall x \in A$，称为 A 的恒等映射，记为 I_A.

设 $f: A \longrightarrow B$ 和 $g: A \longrightarrow B$，如果满足

$$f(x)=g(x), \forall x \in A$$

则称映射 f 等于 g. 记为 $f=g$.

17. $A=R^+$（正实数集），$B=R$（实数集），试给出 A 到 B 的一个单射.

解 1 令 $\varphi(x)=\ln x, \forall x \in A$，则 φ 是 A 到 B 的一个单射. 事实上，φ 显然是 A 到 B 的一个映射，而且当 $x_1 \neq x_2$ 时，$\ln x_1 \neq \ln x_2$，即 φ 是单射.

解 2 令 $\varphi(x)=x, \forall x \in A$，则 φ 是 A 到 B 的单射.

注 ① 解 1 实际上给出了 A 到 B 的一个双射.

② 当 $A \subseteq B$ 时，令 $\varphi(x)=x, \forall x \in A$，则 φ 称为 A 到 B 的嵌入映射. 由此知解 2 中的 φ 是嵌入映射.

18. 试在闭区间 $[0,1]$ 与 $[a,b]$ $(a<b)$ 之间建立一个双射.

解 令 $\varphi(x)=(b-a)x+a, \forall x \in [0,1]$. 易于验证 φ 是 $[0,1]$ 到 $[a,b]$ 的一个双射.

19. 什么叫映射的积（或合成）？

答 设映射 $\varphi: A \longrightarrow B$ 和映射 $\psi: B \longrightarrow C$，则 A 到 C 的映射 $\tau: x \longrightarrow \psi(\varphi(x)), \forall x \in A$ 称为 φ 与 ψ 之积（或合成），记为 $\tau=\psi\varphi$.

20. 设 f 是 A 到 B 的一个映射，I_A、I_B 分别是 A 和 B 的恒等映射，则

$$I_B f = f I_A = f.$$

证 只证 $I_B f = f$.

$\forall x \in A, (I_B f)(x) = I_B(f(x)) = f(x)$，因此 $I_B f = f$.

21. 设 $A=B=Z$.

$$\varphi: A \longrightarrow B, \quad \varphi(n)=n-1, \forall\, n\in A$$

求一个 B 到 A 的映射 g，使得 $g\varphi=\mathrm{I}_A$，$\varphi g=\mathrm{I}_B$. 其中 I_A，I_B 分别为 A，B 的恒等映射.

解 因为 $A=B=Z$，所以 $\mathrm{I}_A=\mathrm{I}_B$，并且 $\mathrm{I}_A(n)=n, \forall\, n\in Z$.

令 $g: B\longrightarrow A, g(n)=n+1$.

显然 g 是 B 到 A 的一个映射. 其次，

$$(g\varphi)(n)=g(\varphi(n))=g(n-1)=(n-1)+1=n=\mathrm{I}_A(n),$$

所以，$g\varphi=\mathrm{I}_A$. 同理可得 $\varphi g=\mathrm{I}_B$. 故 g 即为所求.

22. 设映射 $\sigma: A\longrightarrow B$ 和 $\tau: B\longrightarrow C$.

1) 若 σ 和 τ 均为单射，则 $\tau\sigma$ 是单射；

2) 若 σ 和 τ 均为满射，则 $\tau\sigma$ 为满射；

3) 若 σ 和 τ 均为双射，则 $\tau\sigma$ 为双射；

4) 若 $\tau\sigma$ 为单射，则 σ 为单射；

5) 若 $\tau\sigma$ 为满射，则 τ 为满射.

证 1) $\forall\, x,y\in A$，若因为 τ,σ 都是单射，于是 $\tau\sigma(x)=\tau\sigma(y)$ 那么 $\sigma(x)=\sigma(y)$，因此 $x=y$.

2) $\forall\, z\in C$，因为 τ 是满射，存在 $y\in B$，使得 $\tau(y)=z$. 另外 σ 是满射，也存在 $x\in A$，有 $\sigma(x)=y$，从而 $\tau\sigma(x)=z$.

3) 由 1)、2)即证.

4) $\forall\, x,y\in A$，若 $\sigma(x)=\sigma(y)$ 那么 $\tau\sigma(x)=\tau\sigma(y)$ 因此 $x=y$.

5) $\forall\, z\in C$，由 $\tau\sigma$ 为满射，$\exists\, x\in A$，有 $\tau\sigma(x)=z$.

令 $\sigma(x)=y$，则 $y\in B$，使 $\tau(y)=z$，即 τ 为满射.

23. 设映射 $\sigma: A\longrightarrow B$，则

1) σ 为单射 $\Longleftrightarrow$ 存在映射 $\tau: B\longrightarrow A$，使得 $\tau\sigma=\mathrm{I}_A$.

2) σ 为满射 $\Longleftrightarrow$ 存在映射 $g: B\longrightarrow A$，使得 $\sigma g=\mathrm{I}_B$；

3) σ 为双射 $\Longleftrightarrow$ 存在映射 $\tau: B\longrightarrow A$，使得

$$\tau\sigma=\mathrm{I}_A \quad \text{且}\ \sigma\tau=\mathrm{I}_B.$$

证 1) 充分性 由于 $\tau\sigma=\mathrm{I}_A$，而 I_A 为单射，$\tau\sigma$ 为单射，由第

22 条知 σ 为单射.

必要性　由于 σ 是单射，$\forall\ y\in\sigma(A)$，均存在唯一的 $x\in A$，使 $\sigma(x)=y$. 再固定取 $a_0\in A$，现定义映射 $\tau:B\longrightarrow A$，如下：

$$\tau(b)=\begin{cases}a, & \text{当 } b\in\sigma(A) \text{ 且 } \sigma(a)=b;\\ a_0, & \text{当 } b\in B-\sigma(A).\end{cases}$$

易证 $\tau\sigma=\mathrm{I}_A$.

2) 充分性　设 $\sigma g=\mathrm{I}_B$，由于 I_B 是满射，σg 是满射，故 σ 是满射.

必要性　由于 σ 是满射，任取 $y\in B$，$\sigma^{-1}(y)$ 是非空集，取 $x_y\in\sigma^{-1}(y)\subseteq A$，即有 $\sigma(x_y)=y$. 现定义映射 $g:B\longrightarrow A$ 如下：

$$g(y)=x_y,\forall\ y\in B.$$

易证　$\sigma g=\mathrm{I}_B$.

3) 充分性　由 $\tau\sigma=\mathrm{I}_A$ 和 $\sigma\tau=\mathrm{I}_B$，可证 σ 为单射，又为满射，从而 σ 为双射.

必要性　由 1)、2)知存在映射 $\tau:B\longrightarrow A$ 和 $g:B\longrightarrow A$，使得 $\tau\sigma=\mathrm{I}_A$ 且 $\sigma g=\mathrm{I}_B$. 下证 $\tau=g$.

$$\tau=\tau\mathrm{I}_B=\tau(\sigma g)=(\tau\sigma)g=\mathrm{I}_Ag=g.$$

注　① 满足 $\tau\sigma=\mathrm{I}_A$ 时，称 τ 为 σ 的一个左逆，由此可知：σ 存在左逆 $\Longleftrightarrow\sigma$ 是单射.

类似地，$\sigma g=\mathrm{I}_B$，称 g 为 σ 的一个右逆，则 σ 存在右逆 $\Longleftrightarrow\sigma$ 是满射.

并且由 3)知，若 σ 既存在左逆，又存在右逆时，则其左逆与右逆一定相等，而且唯一.

② 在一般情况下，一个单射的左逆并不是唯一的. 比如 $A=\{1,2\}$，$B=\{a,b,c\}$，

令　$\sigma:1\longrightarrow a,2\longrightarrow b$，则令

$\tau_1:a\longrightarrow 1,b\longrightarrow 2,c\longrightarrow 1;$

$\tau_2:a\longrightarrow 1,b\longrightarrow 2,c\longrightarrow 2.$

都有 $\tau_1\sigma=\tau_2\sigma=I_A$，但 $\tau_1\neq\tau_2$.

类似地，一个满射的右逆一般也不是唯一的.

24. 什么叫可逆映射？什么叫逆映射？

答： 设映射 $\sigma:A\longrightarrow B$，若存在映射 $\tau:B\longrightarrow A$，使得 $\tau\sigma=I_A$，$\sigma\tau=I_B$ 同时成立，则称 σ 是可逆映射. 并称 τ 为 σ 的逆映射，记为 $\sigma^{-1}=\tau$.

由于 σ 与 τ 的地位是对称的. 这时 τ 也是可逆映射，且 σ 也是 τ 的逆映射. 因此有 $(\sigma^{-1})^{-1}=\sigma$.

注 由第 23 条知，σ 是可逆映射 $\Longleftrightarrow\sigma$ 是双射.

25. 设映射 $\varphi:A\longrightarrow B$ 为双射，则 φ^{-1} 也是双射.

证 因为 $\varphi\varphi^{-1}=I_B$，$\varphi^{-1}\varphi=I_A$，由第 23 条知 φ^{-1} 为双射.

26. 设集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_m\}$. 且映射 $\sigma:A\longrightarrow B$.

1) 若 σ 为单射，则 $m\geqslant n$；

2) 若 σ 为满射，则 $n\geqslant m$；

3) 若 σ 为双射，则 $n=m$.

证 1) 因为 $\sigma(a_i)\in B$ $(i=1,2,\cdots,n)$，且两两不同，所以 B 的元素个数 $m\geqslant n$.

2) 由于每个 a_i，只有一个象，当 $n<m$ 时，σ 不可能是满射，所以 $n\geqslant m$.

3) 由 1)、2)即证.

27. 设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$，且映射 $\sigma:A\longrightarrow B$，则下面三条彼此等价：

1) σ 是单射；

2) σ 是满射；

3) σ 是双射.

证 3)$\Rightarrow$1)是显然的.

1)$\Rightarrow$2). 若 σ 是单射，由于 $\sigma(a_1),\cdots,\sigma(a_n)\in B$，且互不相

等，又 B 只含 n 个元素，故 σ 为满射.

最后证明 2)⇒3).

若 σ 是满射，且 σ 不是单射，则至少存在两个元，不妨设为 $a_1 \neq a_2$，使得 $\sigma(a_1)=\sigma(a_2)\in B$. 那么剩下 $n-2$ 个元素为 $a_3,\cdots,a_n$. 它们的象最多只为 B 的 $n-2$ 个元. 这与 σ 为满射的假设矛盾，故 σ 为单射. 从而 σ 为双射.

注　这一结论只对具有元素个数相等(即等势)的有限集成立，但对等势的无限集结论不一定成立. 比如设 $R[x]$ 为一切实系数多项式的全体. 映射 $\sigma: R[x]\longrightarrow R[x]$，$\sigma(f(x))=f'(x)$，则 σ 是满射，但它不是单射，当然就不是双射.

28.　设 $A=\{a_1,\cdots,a_n\}$，$B=\{b_1,\cdots,b_m\}$，则 A 到 B 的不同映射的总数为 m^n.

证　设 $\sigma(a_1)=x_1\in B$，x_1 可以为 $b_1,\cdots,b_m$ 中的任意一个元素，即共有 m 种不同选法. 类似地 $\sigma(a_2)=x_2$，其中 x_2 也有 m 种不同选法. 以此类推，共有 m^n 种不同选法. 从而有 m^n 个不同的映射.

29.　从 n 个元素集到 m 个元素集 $(m\geqslant n)$ 的不同单射总数为 $\dfrac{m!}{(m-n)!}$.

证　设 $A=\{a_1,\cdots,a_n\}$，$B=\{b_1,\cdots,b_m\}$. 把 B 的元素看成房间，每一个单射，相当于每个 a_i 各住 B 的一个房间，其不同住法共有

$$C_m^n\cdot n!=\frac{m!}{(m-n)!}.$$

30.　从 n 个元素集到 m 个元素集 $(n\geqslant m)$ 的不同满射总数为 $\sum\limits_{i=1}^{m}(-1)^{m-i}C_m^i\cdot i^n$.

证　设 $g(n,k)$ 为 n 元集到 k 元集满射个数，第 **28** 条已证 n 元集到 k 元集总映射个数为 k^n. 但它可分为到 1 元子集的满射，

到 2 元子集的满射，…，到 k 元子集的满射．从而有

$$k^n=\sum_{i=1}^{k}C_k^i g(n,i),\qquad k=1,2,\cdots,m.$$

将它们写出来就是

$$\begin{cases} m^n=C_m^1 g(n,1)+\cdots+C_m^m g(n,m), \\ (m-1)^n=C_{m-1}^1 g(n,1)+\cdots+C_{m-1}^{m-1} g(n,m-1), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 2^n=C_2^1 g(n,1)+C_2^2 g(n,2), \\ 1^n=C_1^1 g(n,1). \end{cases} \tag{1}$$

由(1)式可得

$$\begin{aligned} & m^n+(-1)^{m-(m-1)}C_m^{m-1}(m-1)^n+(-1)^{m-(m-2)}C_m^{m-2}(m-2)^n \\ & +\cdots+(-1)^{m-1}C_m^1 1^n \\ & =[C_m^1+(-1)^{m-(m-1)}C_m^{m-1}C_{m-1}^1+(-1)^{m-(m-2)}C_m^{m-2}C_{m-2}^1+\cdots \\ & \quad +(-1)^{m-1}C_m^1 C_1^1]g(n,1)+\cdots \\ & \quad +[C_m^{m-1}+(-1)^{m-1}C_m^{m-1}C_{m-1}^{m-1}]g(n,m-1)+g(n,m). \end{aligned} \tag{2}$$

由组合公式知 $g(n,i)$ 的系数都等于 $0(i=1,2,\cdots,m-1)$．所以由(2)式可得：

$$g(n,m)=\sum_{i=1}^{m}(-1)^{m-i}C_m^i i^n.$$

31.　从 n 个元素集到 n 个元素集的不同单射个数为 $n!$

证　由第 **29** 条并注意 $0!=1$ 可证．

32.　什么叫映射的象集？什么叫映射的原象集？

答　设映射 $\sigma:A\longrightarrow B$，对 $X\subseteq A$，记

$$\sigma(X)=\{\sigma(a)\mid a\in X\}\subseteq B,$$

并称 $\sigma(X)$ 为 X 在 σ 下的象集．当 X 非空时，$\sigma(X)$ 一定非空．

对 $Y\subseteq B$，记

$$\sigma^{-1}(Y)=\{b\mid b\in A,\sigma(b)\in Y\}\subseteq A.$$

当 Y 非空时，可能 $\sigma^{-1}(Y)$ 是空集，这时对 $\forall\ b\in A$，都有 $\sigma(b)\overline{\in}Y$．

33.　设映射 $\sigma: A \longrightarrow B$，那么

1）当 $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A$ 时，$\sigma(A_1) \subseteq \sigma(A_2)$；

2）当 A_1, A_2 都是 A 的子集时，$\sigma(A_1 \cup A_2) = \sigma(A_1) \cup \sigma(A_2)$；

3）当 A_1, A_2 都是 A 的子集时，$\sigma(A_1 \cap A_2) \subseteq \sigma(A_1) \cap \sigma(A_2)$.

证　1）$\forall\, y \in \sigma(A_1)$，从而存在 $a \in A_1$，有 $\sigma(a) = y$. 故 $a \in A_2$，$y \in \sigma(A_2)$，即 $\sigma(A_1) \subseteq \sigma(A_2)$.

2）$\forall\, y \in \sigma(A_1 \cup A_2)$，故存在 $a \in A_1 \cup A_2$，有 $\sigma(a) = y$. 无论 $a \in A_1$ 或 $a \in A_2$，都有 $y \in \sigma(A_1) \cup \sigma(A_2)$.

反之，$\forall\, z \in \sigma(A_1) \cup \sigma(A_2)$，不失一般设 $z \in \sigma(A_1)$，从而存在 $a \in A_1$，有 $\sigma(a) = z$. 因为 $a \in A_1 \cup A_2$，故 $z \in \sigma(A_1 \cup A_2)$.

所以 $\sigma(A_1 \cup A_2) = \sigma(A_1) \cup \sigma(A_2)$.

3）类似于 2）可证.

注　一般地，$\sigma(A_1 \cap A_2) \neq \sigma(A_1) \cap \sigma(A_2)$. 比如，设 $A = \{1,2,3\}$，$B = \{x, y\}$，规定 $\sigma(1) = \sigma(2) = x$，$\sigma(3) = y$. 再令 $A_1 = \{1,3\}$，$A_2 = \{2,3\}$，那么

$$\sigma(A_1) = B, \sigma(A_2) = B, \sigma(A_1) \cap \sigma(A_2) = B.$$

但　$A_1 \cap A_2 = \{3\}$，$\sigma(A_1 \cap A_2) = \{y\} \neq \sigma(A_1) \cap \sigma(A_2)$.

34.　设映射 $\sigma: A \longrightarrow B$，那么

1）当 $B_1 \subseteq B_2 \subseteq B$ 时，$\sigma^{-1}(B_1) \subseteq \sigma^{-1}(B_2)$；

2）当 B_1, B_2 都是 B 的子集时，

$$\sigma^{-1}(B_1 \cup B_2) = \sigma^{-1}(B_1) \cup \sigma^{-1}(B_2);$$

$$\sigma^{-1}(B_1 \cap B_2) = \sigma^{-1}(B_1) \cap \sigma^{-1}(B_2).$$

证　1）$\forall\, a \in \sigma^{-1}(B_1)$，则 $\sigma(a) \in B_1 \subseteq B_2$，从而 $a \in \sigma^{-1}(B_2)$，此即 $\sigma^{-1}(B_1) \subseteq \sigma^{-1}(B_2)$.

2）两个式子的证明是类似的，以第一个式子为例来证明.

$\forall\, a \in \sigma^{-1}(B_1 \cup B_2) \Longleftrightarrow \sigma(a) \in B_1 \cup B_2 \Longleftrightarrow \sigma(a) \in B_1$ 或 $\sigma(a) \in B_2 \Longleftrightarrow a \in \sigma^{-1}(B_1)$ 或 $a \in \sigma^{-1}(B_2) \Longleftrightarrow a \in \sigma^{-1}(B_1) \cup \sigma^{-1}(B_2)$.

35.　设映射 $\sigma: A \longrightarrow B$，$A_1 \subseteq A$，$B_1 \subseteq B$，

则 $\sigma^{-1}[\sigma(A_1)]\supseteq A_1, \sigma[\sigma^{-1}(B_1)]\subseteq B_1$.

证 $\forall a\in A_1$ 那么 $\sigma(a)\in\sigma(A_1)$ 从而 $a\in\sigma^{-1}[\sigma(A_1)]$. 即得 $A_1\subseteq\sigma^{-1}[\sigma(A_1)]$.

$\forall\ b\in\sigma[\sigma^{-1}(B_1)]$, 则 $\exists\ a\in\sigma^{-1}(B_1)$, 有 $b=\sigma(a)\in B_1$, 此即 $\sigma(\sigma^{-1}(B_1))\subseteq B_1$.

注 ① 上面两式一般不等, 比如, 设 $A=\{1,2\}, B=\{a,b\}$. 规定 $\sigma(1)=\sigma(2)=a$, 令 $A_1=\{1\}$, 则

$$\sigma^{-1}(\sigma(A_1))=\sigma^{-1}(a)=A\neq A_1.$$

令 $B_1=B$, 则

$$\sigma[\sigma^{-1}(B)]=\sigma(A)=\{a\}\neq B.$$

② 如果 σ 是双射, 则可证

$$\sigma[\sigma^{-1}(A_1)]=A_1, \sigma^{-1}[\sigma(B_1)]=B_1.$$

三、 二元运算

36. 什么叫做卡氏积?

答 设 A,B 是两个非空集合, 则称

$$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A, b\in B\}$$

为 A 与 B 的卡氏积.

当 A,B 中有一为空集时, 规定卡氏积 $A\times B=\varnothing$.

一般地, 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 都是非空集合, 定义卡氏积为

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\mid a_i\in A_i, i=1,2,\cdots,n\}$$

当 $A_1,\cdots,A_n$ 中有一为空集时, 规定 $A_1\times\cdots\times A_n=\varnothing$.

37. 什么叫做运算? 什么叫做二元运算?

答 映射 $\sigma: A\longrightarrow B$, 称为 A 到 B 的运算. 比如

$$\sigma: x\longrightarrow \sin x,$$

就是 $A=(-\infty,+\infty)$ 到 $[-1,1]$ 的运算.

设 A,B,C 都是非空集合, 称映射 $\sigma: A\times B\longrightarrow C$ 为 A,B 到 C 的双项运算. 比如 A 为 $m\times n$ 实矩阵, B 为 $n\times s$ 实矩阵, 则 AB 是

$m\times s$ 实矩阵，它就是 $R^{m\times n}\times R^{n\times s}$ 到 $R^{m\times s}$ 的双项运算.

设 A 是非空集合，映射 $\sigma: A\times A\longrightarrow A$ 就称为 A 的二元运算. 任意 $(a,b)\in A\times A$，$\sigma(a,b)$ 常通记为 $a\circ b$，有时简记为 ab.

38. 下列各集合 M 对所规定的法则是不是 M 的二元运算：

1) $M=Z$（整数集）， 法则：$a\circ b=a^b$；

2) $M=Z^+$（正整数集）， 法则：$a\circ b=a^b$；

3) $M=Z$， 法则：$a\circ b=a+2b$；

4) $M=Z^-$（负整数集）， 法则：$a\circ b=-ab$；

5) $M=R$（实数集）， 法则：$a\circ b=1$；

6) $M=\{1,-1,i,-i\}$， 法则：数的普通乘法；

7) $M=Q$（有理数集）， 法则：$a\circ b=\begin{cases}a, & a>0,\\ 0, & a<0;\end{cases}$

8) $M=R^*$（非零实数集）， 法则：普通除法；

9) $M=R$， 法则：普通除法.

解 1) 不是. 例如 $2\circ(-1)=\frac{1}{2}\notin M$.

2) 是 M 的二元运算. 因为对任何正整数 a、b，$a\circ b=a^b$ 是一个唯一确定的正整数.

3) 是 M 的二元运算. 因为对任何整数 a 与 b，$a+2b$ 是一个唯一确定的整数.

4) 是 M 的二元运算. 因为当 a,b 为任何负整数时，ab 为正整数，而 $a\circ b=-ab$ 为唯一确定的负整数.

5) 是 M 的二元运算. 因为对任二实数 a,b，都有唯一确定的值 1 与之对应.

6) 是 M 的二元运算. 因为 $1,-1,i,-i$ 中任意两数相乘（包括自身相乘在内），其积仍在 M 中.

7) 不是. 因为法则没有规定 $0\circ 1$ 等于什么.

8) 是. 因为对任意二非零实数 a,b，有唯一确定的非零实数

$a \div b = \frac{a}{b} \in R^{*}$.

9) 不是. 因为 $0 \in R$, 对任意 $a \in R$, $a \div 0$ 无意义.

39. 下列各法则是不是 M 的二元运算:

1) $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| a, b \in R \right\}$, 法则: 普通矩阵乘法;

2) $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in R, \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0 \right\}$,

法则: $A \circ B = AB + A'B'$.

解 1) 是.

2) 不是. 因为 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 由于 [illegible]

$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \overline{\in} M$. 因此不是 M 的二元运算.

40. 什么叫做二元运算满足结合律与交换律?

答 设 A 的二元运算为"$\circ$", 如果满足

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c), \quad \forall\ a, b, c \in A,$$

则称 A 关于运算"$\circ$"满足结合律. 如果满足

$$a \circ b = b \circ a, \forall\ a, b \in A,$$

则称 A 关于运算"$\circ$"满足交换律.

41. 下列各集合对所规定的二元运算是否满足结合律和交换律:

1) $M = Z$, $a \circ b = a^2 + b^2$;

2) $M = Q$, $a \circ b = b$;

3) $M = Q$, $a \circ b = a + b - ab$;

4) $M = R$, $a \circ b = ab^2$;

5) $M = R^{*}$(非零实数集), $a \circ b = \frac{a}{b}$;

6) $M = R$, $a \circ b = a + 2b$.

解 1)满足交换律. 但是$(1 \circ 1) \circ 0 \neq 1 \circ (1 \circ 0)$.

故不满足结合律.

2）满足结合律.不满足交换律,因为　$1\circ 2\neq 2\circ 1$.

3）满足交换律和结合律,因为

$$a\circ b=a+b-ab, b\circ a=b+a-ba,$$

故 $a\circ b=b\circ a$;

$(a\circ b)\circ c=(a+b-ab)\circ c=a+b-ab+c-(a+b-ab)c$,

$a\circ(b\circ c)=a\circ(b+c-bc)=a+b+c-bc-a(b+c-bc)$,

故$(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c)$.

4）结合律和交换律都不满足.例如

$$1\circ 2\neq 2\circ 1, (1\circ 1)\circ 2\neq 1\circ(1\circ 2).$$

5）结合律与交换律都不满足.例如

$$1\circ 2\neq 2\circ 1, (1\circ 2)\circ 3\neq 1\circ(2\circ 3).$$

6）结合律与交换律都不满足.例如

$$1\circ 2\neq 2\circ 1, (0\circ 0)\circ 1\neq 0\circ(0\circ 1).$$

42.　设 $A=\{a,b,c,d\}$，问由表 1-1 所给出的二元运算是否满足结合律和交换律?

表 1-1

$\circ$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	d	a	c
c	c	a	b	d
d	d	c	a	b

答　结合律和交换律都不满足.因为由表 1-1 可知

$$c\circ d\neq d\circ c, (b\circ c)\circ d\neq b\circ(c\circ d).$$

43.　设"$\circ$"为集合 M 的一个二元运算,则 M 中 n 个元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的前后顺序不变时,总共有

$$\frac{(2n-2)!}{n!\ (n-1)!}$$

种对 n 个元素加括号的方法.

证　用 $\psi(n)$表示 n 个元素的所有可能的加括号的种数.由于 n 个元素无论怎样结合,其最后一步总是前 k 个元素同后 $n-k$ 个元素的结合.因此,可得函数 $\psi(n)$的一个递推公式:

$$\psi(n)=\psi(1)\psi(n-1)+\psi(2)\psi(n-2)+\cdots+\psi(n-1)\psi(1). \quad (1)$$

今考虑幂级数

$$y=\psi(1)x+\psi(2)x^2+\cdots+\psi(n)x^n+\cdots, \quad (2)$$

则由(1)式可得

$$y^2=\psi(1)\psi(1)x^2+[\psi(1)\psi(2)+\psi(2)\psi(1)]x^3+\cdots. \quad (3)$$

由于 $\psi(1)=1,\psi(2)=1$. 故(3)－(2)得

$$y^2-y+x=0,$$

解得

$$y_{1,2}=\frac{1\pm(1-4x)^{\frac{1}{2}}}{2}.$$

(因为,当 $x=0$ 时,由(2)式知 $y=0$,故上式分子根号前不能取加号). 但根据幂级数展开,有

$$(1-4x)^{\frac{1}{2}}=1-2x-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-3)}{n!}\cdot2^n\cdot x^n.$$

因此

$$y=\frac{1-(1-4x)^{\frac{1}{2}}}{2}=x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-3)}{n!}\cdot2^{n-1}x^n. \quad (4)$$

比较(2)、(4)两式中 x^n 的系数,即得

$$\psi(n)=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-3)}{n!}\cdot2^{n-1}=\frac{(2n-2)!}{n!\ (n-1)!}.$$

44. 证明:如果集合 M 的二元运算"$\cdot$"满足结合律,则对 M 中任意 n ($n\geqslant3$)个元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,只要不改变元素的前后次序,无论怎样结合,其结果都是相等的.

证 对元素的个数 n 用数学归纳法. 当 $n=3$ 时,结论显然成立. 假定元素的个数少于 n 时结论成立,下证元素的个数为 n 时结论也对.

先规定记号

$$a_1 \circ a_2 \circ \cdots \circ a_k = [(a_1 \circ a_2) \circ a_3) \circ \cdots \circ a_{k-1}] \circ a_k.$$

即先算前两个，再与第三个算，依次向后算.

令 C 是由 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 按某种结合方法所算得的结果，由于不论怎样结合，最后一步总是两个元素运算. 可设 $C = b_1 \circ b_2$，其中 b_1 是前 k 个元素 $a_1, \cdots, a_k (1 \leqslant k \leqslant n-1)$，按某一种加括号方法所算得的结果，$b_2$ 是后 $n-k$ 个元素 $a_{k+1}, \cdots, a_n$ 按某一种加括号方法算得的结果. 由于 $1 \leqslant k < n, 1 \leqslant n-k < n$，故由归纳假设

$$b_1 = a_1 \circ a_2 \circ \cdots \circ a_k, b_2 = a_{k+1} \circ a_{k+2} \circ \cdots \circ a_n,$$

于是再由结合律及归纳假设可得

$$\begin{aligned} C &= b_1 \circ b_2 = (a_1 \circ a_2 \circ \cdots \circ a_k) \circ (a_{k+1} \circ a_{k+2} \circ \cdots \circ a_n) \\ &= (a_1 \circ a_2 \circ \cdots a_k) \circ [(a_{k+1} \circ \cdots \circ a_{n-1}) \circ a_n] \\ &= [(a_1 \circ \cdots \circ a_k) \circ (a_{k+1} \circ \cdots \circ a_{n-1})] \circ a_n \\ &= (a_1 \circ a_2 \circ \cdots \circ a_{n-1}) \circ a_n. \end{aligned}$$

这就是说，这 n 个元素无论怎样结合，其结果都等于$(a_1 \circ a_2 \circ \cdots \circ a_{n-1}) \circ a_n$，从而它们都是相等的，即证.

第二章　矩阵的运算

一、 矩阵的加法、减法、乘法

45. 什么叫矩阵的加法？

答 两个 $m\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij}),B=(b_{ij})$的和 $A+B$ 指的是 $m\times n$矩阵$(a_{ij}+b_{ij})$.

46. 什么叫负矩阵？

答 矩阵 $A=(a_{ij})$的负矩阵指的是矩阵$(-a_{ij})$，记作$-A$.

47. 什么叫矩阵的减法？

答 两个 $m\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij}),B=(b_{ij})$的差是指 $m\times n$ 矩阵 $A+(-B)=(a_{ij}-b_{ij})$，记为 $A-B$.

48. 什么是数乘矩阵？

答 数 k 与 $m\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})$的数乘是指 $m\times n$ 矩阵 (ka_{ij})，记为 kA.

49. 矩阵的加法满足哪些运算律？

答 矩阵的加法满足以下算律：

1) 交换律：$A+B=B+A$；

2) 结合律：$(A+B)+C=A+(B+C)$；

3) 存在零元：$0+A=A+0=A$；

4) 存在负元：$(-A)+A=A+(-A)=0$，

其中 $A,B,C,0$ 均为 $m\times n$ 矩阵.

注 若把数域 P 上一切 $m\times n$ 矩阵组成的集合记为 $P^{m\times n}$（下同），则 $P^{m\times n}$关于矩阵的加法构成一个加群.

50. 矩阵数乘满足哪些运算律？

答 1) 分配律：$k(A+B)=kA+kB$；

$$(k+l)A=kA+lA;$$

2) 结合律：$(kl)A=k(lA)$；

3) $1A=A$，

其中 A,B 均为 $m\times n$ 矩阵，k,l 为任意数.

注 $P^{m\times n}$关于矩阵的加法、数乘运算构成 P 上的一个线性空间.

51. 什么是矩阵的乘法？

答 $m\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})$与 $n\times s$ 矩阵 $B=(b_{ij})$的乘积记为 $C=(c_{ij})$，C 为 $m\times s$ 矩阵，且

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj},$$
$$i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,s.$$

52. 矩阵的加法与乘法满足哪些运算规律？

答 1) 结合律：$(AB)C=A(BC)$；

2) 左分配律：$A(B+C)=AB+AC$；

右分配律：$(A+B)C=AC+BC$；

3) $AE=A,EB=B$，

其中 E 为单位矩阵；

4) $A0=0,0B=0$；

5) $k(AB)=(kA)B=A(kB)$，k 为数.

注 $P^{n\times n}$关于矩阵的加法、乘法运算构成有单位元、有零因子的不可交换环.

53. 什么是可交换矩阵？

答 若方阵 A 与 B 满足 $AB=BA$，则称 A 与 B 是可交换的.

注 一般地，$AB\neq BA$.

54. 设 A 是 $n\times n$ 矩阵，秩 $A=1$，则

1) $A=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}(b_1\cdots\cdots b_n)$； (1)

2) $A^2=kA$;

3) $A^m=k^{m-1}A$, m 为自然数.

解 1) 由于秩 $A=1$, 不失一般性, 可设

$$A=\begin{pmatrix} b_1 & \cdots\cdots & b_n \\ k_2b_1 & \cdots\cdots & k_2b_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ k_nb_1 & \cdots\cdots & k_nb_n \end{pmatrix},$$

则 $$A=\begin{pmatrix} 1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}(b_1\cdots\cdots b_n),$$

即表示成(1)的形状.

2) $$A^2=\begin{pmatrix} 1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}\left[(b_1\cdots b_n)\begin{pmatrix} 1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}\right](b_1\cdots b_n)=k\begin{pmatrix} 1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}(b_1\cdots b_n)=kA,$$

其中 $k=(b_1\cdots b_n)\begin{pmatrix} 1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}=b_1+k_2b_2+\cdots+k_nb_n.$

3) 注意到 2), 用数学归纳法可证.

55. 如果 $AB=0$, 是否一定有 $A=0$ 或 $B=0$?

答 不一定. 比如 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A\neq 0$, $B\neq 0$, 但 $AB=0$.

注 这就是所谓矩阵乘法有零因子. 即零矩阵可分解为两个不等于零的矩阵之积.

56. 什么叫左消去律?矩阵是否满足左消去律?右消去律呢?

答 左消去律是指对任意 A、B、C, 由 $AB=AC$, $A\neq 0$ 可推出

$B=C$. 类似地，右消去律是指“对任意 A、B、C，由 $BA=CA$，$A\neq 0$ 可推出 $B=C$”.

由第 **55** 条的反例知对矩阵而言，左(或右)消去律都不成立. 因为对第 **55** 条中的 A，B 有 $AB=0=A0$，$A\neq 0$，不能左消去 A 而推出 $B=0$. 同样 $AB=0=0B$，$B\neq 0$，也不能右消去 B 得出 $A=0$.

57. 设 A 为 $n\times m$ 矩阵，$AB=AC$，$A\neq 0$，当秩 $A=m$ 时，则 $B=C$.

证 因为秩$(\overline{A'}A)=$ 秩 $A=m$，所以$\overline{A'}A$ 为 $m\times m$ 可逆矩阵. 于是$\overline{A'}AB=\overline{A'}AC$，两边左乘$(\overline{A'}A)^{-1}$得 $B=C$.

注 ① 这里给出左消去律成立的一个充分条件，即 A 是列满秩时，左消去律成立. 但它并不是必要条件.

② 类似地有右消去律成立的充分条件：若 $BA=CA$，$A\neq 0$，且 A 为行满秩，则 $B=C$.

58. 设 B，C 分别是 $r\times r$ 与 $r\times n$ 矩阵，秩 $C=r$，则

1) 当 $BC=0$ 时，$B=0$；

2) 当 $BC=C$ 时，$B=E$.

证 这是第 **57** 条的特例，只要右乘$\overline{C'}(C\overline{C'})^{-1}$即可得证.

59. 设 $AB=BA$，$AC=CA$，则

1) $A(B+C)=(B+C)A$；

2) $A(BC)=(BC)A$；

3) 对数域 P 上的任意多项式 $g(x)$，$f(x)$，有

$$Ag(B)=g(B)A;$$
$$Ag(C)=g(C)A;$$
$$f(A)g(B)=g(B)f(A);$$
$$f(A)g(C)=g(C)f(A);$$
$$f(A)g(A)=g(A)f(A).$$

证 1)、2)容易验证. 对于 3)，只证 $f(A)g(B)=g(B)f(A)$，其余可类似地证明. 设

$$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0,$$
$$g(x)=b_mx^m+\cdots+b_1x+b_0,$$

由 $AB=BA$ 可证

$$A^iB^j=B^jA^i, i=1,2,\cdots,n; j=1,2,\cdots,m.$$

于是

$f(A)\cdot g(B)=(a_nA^n+\cdots+a_1A+a_0E)(b_mB^m+\cdots+b_1B+b_0E)$
$=a_nA^n(b_mB^m+\cdots+b_1B+b_0E)+\cdots+a_1A(b_mB^m+\cdots+b_1B+b_0E)$
$+a_0E(b_mB^m+\cdots+b_0E)$
$=(b_mB^m+\cdots+b_0E)a_nA^n+\cdots+(b_mB^m+\cdots+b_0E)a_0E$
$=g(B)f(A).$

60. 如果 $A=\frac{1}{2}(B+E)$，那么 $A^2=A\Longleftrightarrow B^2=E$.

证 必要性 由 $A^2=A$ 得 $\frac{1}{4}(B^2+2B+E)=\frac{1}{2}(B+E)$，

$\therefore B^2=E.$

充分性 设 $B^2=E$，则

$$A^2=\frac{1}{4}(B^2+2B+E)=\frac{1}{2}(B+E)=A.$$

61. 设 A 是 $n\times n$ 矩阵，若对任一 n 维列向量 X，都有 $AX=0$，则 $A=0$.

证 令 e_i 是第 i 个分量为 1，其它分量都为 0 的 n 维列向量. 由假设知

$$Ae_i=0, i=1,2,\cdots,n.$$

故 $$A=AE=A(e_1,\cdots,e_n)=(Ae_1,\cdots,Ae_n)=0.$$

注 这个命题的逆也显然成立.

62. 设 A 是 $n\times n$ 矩阵，则存在一个 $n\times n$ 非零矩阵 B 使 $AB=0$ 的充要条件是 $|A|=0$.

证 必要性 用反证法. 若 $|A|\neq0$，即 A 是可逆矩阵，则由 $AB=0$，左乘 A^{-1} 得 $B=0$. 这与假设矛盾.

充分性 设$|A|=0$,则齐次线性方程组$Ax=0$有非零解x_0.令$B=(x_0,0,\cdots,0)$,则$B\neq 0$,且$AB=0$.

63. 设S是一些n阶矩阵组成的集合,对任意$A,B\in S$,有$AB\in S$,$(AB)^3=BA$,则S满足交换律.

证 $\forall A,B\in S$,则

$$AB=(BA)^3=[(AB)^3]^3=(AB)^9.$$

$$BA=(AB)^2(AB)=[(AB)(AB)^2]^3=(AB)^9,\text{所以 } AB=BA.$$

64. 设$D_n(n=0,1\cdots)$都是3×3矩阵,且

$$D_{n+1}=AD_n+B,$$

其中$A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}$,$B=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}$,$D_0=\begin{bmatrix}0&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix}$,

求D_n.

解 因为$D_1=AD_0+B=B=E$,

$$D_k-D_{k-1}=A^{k-1}D_1=A^{k-1},$$

所以

$$D_n=E+A+A^2+\cdots+A^{n-1}.$$

由于$A^3=E$,$E+A+A^2=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$.

因此令$C=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$,

$$\therefore D_n=\begin{cases}mC & n=3m;\\ mC+E, & n=3m+1;\\ mC+E+A & n=3m+2.\end{cases}$$

65. 设A,B都是n阶矩阵,$AB=A+B$,则

1) $A-E$,$B-E$都可逆;

2) $AB=BA$;

3) 当 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$ 时，求 B.

证 1) 因为 $(A-E)(B-E)=AB-(A+B)+E=E$，所以 $A-E$ 和 $B-E$ 都可逆.

2) 由 1)知 $E=(A-E)(B-E)=(B-E)(A-E)$

$$=BA-(A+B)+E,$$

所以 $AB=A+B=BA$.

3) 因为 $B-E=(A-E)^{-1}$

$$=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 3 & 3 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 3\\ 3 & 2 & -6\end{pmatrix}.$$

所以 $B=E+\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 3\\ 3 & 2 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 3\\ 3 & 2 & -5\end{pmatrix}$.

二、 矩阵乘法可交换的条件

66. 求与矩阵 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ 可交换的全部矩阵，其中 $a\neq d$.

解 设 $B=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}$，由 $AB=BA$ 或 $AB-BA=0$，得

$$\begin{cases} cx_2-bx_3=0, & (1)\\ bx_1+(d-a)x_2-bx_4=0, & (2)\\ cx_1+(d-a)x_3-cx_4=0. & (3)\end{cases}$$

因为 $d-a\neq 0$，所以由(2)、(3)得

$x_2=\dfrac{b}{a-d}(x_1-x_4)$，$x_3=\dfrac{c}{a-d}(x_1-x_4)$，其中 x_1,x_4 为自由未知量. 故与 A 可交换的矩阵形如：

$$B=\begin{bmatrix} x & \frac{b}{a-d}(x-y) \\ \frac{c}{a-d}(x-y) & y \end{bmatrix},$$

其中 x,y 为任意常数.

67.　设 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}x & 2\\ 2 & y\end{bmatrix}$，当 $AB=BA$ 时，x,y 之间应有什么关系？

解　由上面第 66 条知，$2=\frac{2}{1-4}(x-y)$，即 $x-y+3=0$.

68.　设 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}$，求所有与 A 可交换的矩阵.

解　设 $B=(x_{ij})$ 为 3×3 矩阵，由 $AB-BA=0$ 得方程组：

$$\begin{cases} x_{11}=x_{22}-\frac{1}{3}x_{21}, \\ x_{12}=x_{13}=0, \\ x_{31}=\frac{3}{2}x_{23}, \\ x_{32}=\frac{1}{2}x_{23}, \\ x_{33}=x_{22}+\frac{1}{2}x_{23}. \end{cases}$$

令 $x_{21}=a, x_{22}=b, x_{23}=c$，则与 A 可交换的矩阵形如

$$B=\begin{bmatrix} b-\frac{1}{3}a & 0 & 0 \\ a & b & c \\ \frac{3}{2}c & \frac{1}{2}c & b+\frac{1}{2}c \end{bmatrix},$$

其中 a,b,c 为任意常数.

69.　用 E_{ij} 表示 i 行 j 列的元素为 1，而其余元素全为零的

$n\times n$矩阵(称 E_{ij}为坐标矩阵),而 $A=(a_{ij})_{n\times n}$.

1) 如果 $AE_{12}=E_{12}A$,那么当 $k\neq1$ 时, $a_{k1}=0$, 当 $k\neq2$ 时, $a_{2k}=0$;

2) 如果 $AE_{ij}=E_{ij}A$, 那么当 $k\neq i$ 时 $a_{ki}=0$; 当 $k\neq j$ 时, $a_{jk}=0$, 且 $a_{ii}=a_{jj}$;

3) 若 A 与所有的 n 阶矩阵可交换,则 A 一定是数量矩阵,即 $A=aE$.

证 1) 由

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}=AE_{12}=E_{12}A=\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

得 $a_{21}=a_{23}=\cdots=a_{2n}=0, a_{21}=a_{31}=\cdots=a_{n1}=0$.

2) 由

$$\begin{bmatrix} \cdots & 0 & a_{1i} & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & a_{2i} & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & 0 & a_{ni} & 0 & \cdots \end{bmatrix}=AE_{ij}=E_{ij}A=\begin{bmatrix} & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & \end{bmatrix}$$

即得 2).

3) 因为 A 与任何矩阵相乘可交换,所以与 E_{ij}相乘可交换. 于是易得

$$a_{ii}=a_{jj}, i, j=1,2,\cdots,n; a_{ij}=0, i\neq j.$$

即 A 是数量矩阵.

注：① 若 $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix}$，则

$A=2E_{11}+3E_{12}+4E_{21}+5E_{22}$这就是称 E_{ij}为坐标矩阵的原因．

② 一般，设 E_{ij}表示 i 行 j 列为 1，而其余元素全为零的 $n\times m$ 矩阵．若 $A=(a_{ij})$为 $n\times m$ 矩阵，则

$$A=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}E_{ij}.$$

70. 非主对角线上的元素全为 0 的 n 阶矩阵称为 n 阶对角矩阵，记为 $A=\mathrm{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，那么

1）两个 n 阶对角矩阵之积仍为 n 阶对角矩阵；

2）当 $A=\mathrm{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$a_i\neq a_j(i\neq j)$时，凡与 A 可交换之矩阵必为对角矩阵．

证　1）显然．

2）设与 A 可交换的矩阵为 $B=(b_{ij})_{n\times n}$，则 AB 的 i 行 j 列元素为 $b_{ij}a_i$，BA 的 i 行 j 列元素为 $b_{ij}a_j$．但 $AB=BA$，因此

$$b_{ij}a_i=b_{ij}a_j.$$

当 $i\neq j$ 时，$a_i\neq a_j$，故由上式得 $b_{ij}=0$．因而 $B=\mathrm{diag}(b_{11},b_{22},\cdots,b_{nn})$为对角矩阵．

71. 称 $\begin{bmatrix}B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_m\end{bmatrix}$ 为准对角矩阵，其中 B_i 为 $n_i\times n_i$ 矩阵$(i=1,2,\cdots,m)$并简记为$[B_1,B_2,\cdots,B_m]$．设准对角矩阵 $A=[a_1E_1,a_2E_2,\cdots,a_rE_r]$，其中 $a_i\neq a_j(i\neq j;i、j=1,2,\cdots,r)$，$E_i$ 为 n_i 阶单位矩阵 $(i=1,2,\cdots,r)$，$\sum_{i=1}^{r}n_i=n$．则与 A 可交换的矩阵是准对角矩阵．

证　设与 A 可交换的矩阵为 $B=(B_{ij})_{n\times n}$，其中 B_{ij}为 $n_i\times n_j$

矩阵(i、$j=1,2,\cdots,r$),则由 $AB=BA$ 得

$$a_iB_{ij}=a_jB_{ij},i、j=1,2,\cdots,r.$$

当 $i\neq j$ 时,因为 $a_i\neq a_j$,则由上式得 $B_{ij}=0$. 所以 $B=[B_{11},B_{22},\cdots,B_{rr}]$为准对角矩阵.

72. 设 E_{ij}为第 69 条中的坐标矩阵,求 $E_{ij}E_{ks}$.

解 由矩阵乘法可验证

$$E_{ij}E_{ks}=\begin{cases}E_{is}, & k=j,\\ 0, & k\neq j.\end{cases}$$

73. 设 $C=A+B$,其中 $A'=A$,$B'=-B$,则下面的三个条件彼此等价:

1) $C'C=CC'$

2) $AB=BA$;

3) $(AB)'=-AB$.

证 1)⇒2). 因为 $C'=A'+B'=A-B$,所以,由 $C'C=CC'$ 得

$(A-B)(A+B)=(A+B)(A-B)$. 由此可得 $AB=BA$.

2)⇒3). $(AB)'=B'A'=(-B)A=-AB$.

3)⇒1). $-AB=(AB)'=B'A'=-BA$,即 $AB=BA$. $(A+B)(A-B)=(A-B)(A+B)$,所以

$$CC'=C'C.$$

三、 矩阵的幂

74. 什么叫做矩阵的幂?

答 设 A 为方阵,A^k 表示 k 个 A 相乘,其中 k 为自然数. 称 A^k 为 A 的 k 次幂;规定 $A^0=E$. 当 A^{-1}存在时,规定 $A^{-k}=(A^{-1})^k$.

75. 矩阵的幂有哪些性质?

答 主要有:

1) $A^n\cdot A^m=A^{n+m}$;

2) $(A^n)^m=A^{nm}$;

3) $|A^n|=|A|^n$.

当 A^{-1}不存在时,n、m 取非负整数;当 A^{-1}存在时,n、m 可以为任意整数.

76. $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

证 用数学归纳法可证.

77. $\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\cos n\varphi & -\sin n\varphi\\ \sin n\varphi & \cos n\varphi\end{pmatrix}$.

证 对 n 用数学归纳法. 当 $n=1$ 时显然结论成立.

归纳假定结论对 $n-1$ 成立,再证结论对 n 也成立:

$$\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\cos(n-1)\varphi & -\sin(n-1)\varphi\\ \sin(n-1)\varphi & \cos(n-1)\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos n\varphi & -\sin n\varphi\\ \sin n\varphi & \cos n\varphi\end{pmatrix}.$$

即证.

78. 求$\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}^n$.

解 设 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$,所求矩阵为 B. 可以验证 $A^2=4E$.

1) 当 $n=2k$ 时,

$B=A^{2(k+1)}=(4E)^{k+1}=2^{n+2}E$;

2) 当 $n=2k+1$ 时,

$B=A^{n+2}=A^{2(k+1)}\cdot A=2^{n+1}\cdot A$.

79. 对任意自然数 n，则

$$\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\0 & \lambda & 1\\0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}\lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2}\\0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1}\\0 & 0 & \lambda^n\end{bmatrix}.$$

证 用数学归纳法证明．当 $n=1$ 时，结论成立．归纳假定对 $n-1$ 结论成立，再证对 n 结论也成立：

$$\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\0 & \lambda & 1\\0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}\lambda^{n-1} & (n-1)\lambda^{n-2} & \frac{(n-1)(n-2)}{2}\lambda^{n-3}\\0 & \lambda^{n-1} & (n-1)\lambda^{n-2}\\0 & 0 & \lambda^{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\0 & \lambda & 1\\0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2}\\0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1}\\0 & 0 & \lambda^n\end{bmatrix}.$$

80. 设 $A=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1\\ & & \ddots & \\ & & & \lambda\end{bmatrix}$，求 A^n．

解 试算 A^2,A^3，猜想

$$A^n=\begin{bmatrix}\lambda^n & C_n^1\lambda^{n-1} & \cdots & C_n^{n-1}\lambda\\0 & \lambda^n & \cdots & C_n^1\lambda^{n-1}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\0 & 0 & \cdots & \lambda^n\end{bmatrix},$$

再用数学归纳法证之．

81. 计算 $\begin{bmatrix}a & b\\b & a\end{bmatrix}^n$．

解 令 $A=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$，则 $A^2=E$.

利用二次展开式得

$$\begin{bmatrix}a&b\\b&a\end{bmatrix}^n=(aE+bA)^n$$

$$=a^nE+na^{n-1}bA+\cdots+C_n^{n-1}ab^{n-1}A^{n-1}+b^nA^n$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}(a+b)^n+(a-b)^n & (a+b)^n-(a-b)^n\\(a+b)^n-(a-b)^n & (a+b)^n+(a-b)^n\end{bmatrix}. \quad (1)$$

注 也可先试算，再用数学归纳法证明(1)式.

82. 设 n 阶矩阵 A 的各行各列都只有一个元素是 1 或 -1，其余均为 0. 求证：存在正整数 k，使 $A^k=E$.

证 由 A 的特点，A^2 的每行每列也一定只有一个元素为 1 或 -1，其余均为 0. 考察矩阵序列：

$$A,A^2,\cdots,A^m,\cdots.$$

以上序列中的每个矩阵，其每行每列的元素只有一个是 1 或 -1，其余均为 0. 但这样的矩阵只能作出有限个不同的来，因此在以上序列中一定有相等者. 假定 $A^k=A^s$，$k>s$，再由 A 的假设知 $|A|$ 的值只能为 1 或 -1，所以 A^{-1} 存在，从而 $A^{k-s}=E$.

83. 设 $A=\begin{bmatrix}4&2&2\\0&4&0\\0&-2&2\end{bmatrix}$，求 A^n.

解 利用对角化法.

先求 A 的特征值. A 的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=(\lambda-4)^2(\lambda-2),$$

解得 $\lambda_1=\lambda_2=4$，$\lambda_3=2$.

再求特征向量. $\alpha_1=(1,0,0)'$，$\alpha_2=(0,1,-1)'$ 是属于 4 的两个线性无关的特征向量. $\alpha_3=(1,0,-1)'$ 是属于 2 的特征向量.

令 $T=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，则

$$T^{-1}AT=\text{diag}(4,4,2),$$

$$T^{-1}A^nT=\text{diag}(4^n,4^n,2^n),$$

$$A^n=T\text{diag}(4^n,4^n,2^n)T^{-1}=\begin{bmatrix}4^n & 4^n-2^n & 4^n-2^n\\0 & 4^n & 0\\0 & 2^n-4^n & 2^n\end{bmatrix}.$$

84. 设 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$，求 A^{100}.

解 1 利用 Hamilton-Cayley 定理. A 的特征多项式为

$$f(\lambda)=|\lambda E-A|=(\lambda-1)^2(\lambda+1).$$

设 $$\lambda^{100}=q(\lambda)f(\lambda)+(a\lambda^2+b\lambda+c). \tag{1}$$

令 $\lambda=1,-1$ 分别代入(1)式，得

$$1=a+b+c, \tag{2}$$

$$1=a-b+c. \tag{3}$$

再对(1)式两边求导数得

$$100\lambda^{99}=q'(\lambda)f(\lambda)+f'(\lambda)g(\lambda)+2a\lambda+b. \tag{4}$$

因为 $f(1)=f'(1)=0$，所以令 $\lambda=1$ 代入(4)式得

$$100=2a+b. \tag{5}$$

由(2)、(3)、(5)解得

$$a=50,b=0,c=-49.$$

于是(1)式变为

$$\lambda^{100}=q(\lambda)f(\lambda)+50\lambda^2-49. \tag{6}$$

将 A 代入(6)式并注意到 $f(A)=0$，得

$$A^{100}=50A^2-49E=\begin{bmatrix}1&0&0\\50&1&0\\50&0&1\end{bmatrix}.$$

解 2 先用数学归纳法证明 $A^n=A^{n-2}+A^2-E$，然后求 A^{100}.

当 $n=3$ 时，可以算出

$$A^3=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}=A^{3-2}+A^2-E,$$

即等式成立.归纳假定等式对 $n-1$ 成立,下证等式对 n 也成立.

$A^n=A^{n-1}A=(A^{(n-1)-2}+A^2-E)A=A^{n-2}+A^3-A=A^{n-2}+A^2-E.$

即证.

于是

$$\begin{aligned}A^{100}&=A^{98}+A^2-E=(A^{96}+A^2-E)+A^2-E\\&=A^{96}+2A^2-2E=\cdots=A^2+49A^2-49E\\&=50A^2-49E=\begin{bmatrix}1&0&0\\50&1&0\\50&0&1\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

85. n 阶方阵

$$A=\begin{bmatrix}0&1&&\\&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&0\end{bmatrix}$$

求 A^k.

解 由于 $A=\begin{bmatrix}0&E_{n-1}\\0&0\end{bmatrix}$,则 $A^2=\begin{bmatrix}0&E_{n-2}\\0&0\end{bmatrix}$

$A^k=\begin{bmatrix}0&E_{n-k}\\0&0\end{bmatrix}(0<k<n)$

$A^k=0.(n\leqslant k).$

86. 设 $A=\begin{bmatrix}a&b\\0&c\end{bmatrix}$,其中 a,b,c 为实数.试求 a,b,c 的一切可能值,使得 $A^{100}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$.

解 可以看出这是求矩阵幂的反问题.

由于 A 是上三角矩阵,则

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b\\0&c\end{bmatrix}^{100}=\begin{bmatrix}a^{100}&d\\0&c^{100}\end{bmatrix},\tag{1}$$

其中 $d=f(a,b,c)$. 由(1)式得 $a^{100}=1=c^{100}$. $\therefore a=\pm1, c=\pm1$.

1) 当 $a=c=1$ 时, $A=\begin{bmatrix}1&b\\0&1\end{bmatrix}$, 那么

$$A^{100}=\begin{bmatrix}1&100b\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},$$

由此得 $b=0$, 所以 $A=E$.

2) 当 $a=c=-1$ 时, 类似地可得 $A=-E$.

3) 当 $a=1$、$c=-1$ 时, $A=\begin{bmatrix}1&b\\0&-1\end{bmatrix}$, 其中 b 可为任意实数.

4) 当 $a=-1$、$c=1$ 时, $A=\begin{bmatrix}-1&b\\0&1\end{bmatrix}$, 其中 b 可为任意实数.

因此满足 $A^{100}=E$ 的 A 有 4 种类型:

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&b\\0&-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1&b\\0&1\end{bmatrix},$$

其中 b 为任意实数.

87. 设实方阵 $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$. 求适合 $A^2=0$ 的各种形式的 A.

解 $A^2=\begin{bmatrix}a^2+bc&b(a+d)\\c(a+d)&bc+d^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix},$

所以

$$\begin{cases}a^2+bc=0,\\b(a+d)=0,\\c(a+d)=0,\\bc+d^2=0.\end{cases}\tag{1}$$

1) 当 $b=c=0$ 时, 有 $a=d=0$, 则 $A=0$.

2) 当 $b\neq0$ 时, 由(1)得 $a+d=0$, 所以 $d=-a, c=-\dfrac{d^2}{b}$. 于是

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ -\frac{a^2}{b} & -a \end{bmatrix},$$

其中 a 为任意实数，b 为任意非零实数.

3) 当 $c\neq0$ 时，类似地有

$$A=\begin{bmatrix} a & -\frac{a^2}{c} \\ c & -a \end{bmatrix},$$

其中 a 为任意实数，c 为任意非零实数.

88. 设 A 为 2×2 矩阵，如果 $A^l=0$ $(l\geqslant2)$，那么 $A^2=0$. 当 A 为 $k\times k$ 矩阵 $(k\geqslant3)$时，上述结论是否成立？

证 由 $A^l=0$ 知$|A|=0$，因此秩 $A<2$.

1) 当秩 $A=0$ 时，$A=0$，所以 $A^2=0$.

2) 当秩 $A=1$ 时，由第 **54** 条可证得

$$0=A^l=k^{l-1}A.$$

但 $A\neq0$，所以 $k=0$，故 $A^2=kA=0$.

当 A 的阶大于 2 时，结论不一定成立. 比如

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{为 Jordan 块}, A^3=0, \text{但 } A^2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\neq0.$$

89. 设 A,B 为 n 阶实对称矩阵，C 为 n 阶实反对称矩阵，且 $A^2+B^2=C^2$，则 $A=B=C=0$.

证 设 $A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$，则 $AA'=A^2$ 的 i 行 i 列元素为$\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}^2(i=1,2,\cdots,n)$. 类似地，

$BB'=B^2$ 的 i 行 i 列元素为$\sum\limits_{k=1}^{n}b_{ik}^2(i=1,2,\cdots,n)$令

$$C=\begin{bmatrix} 0 & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ -c_{12} & 0 & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -c_{1n} & -c_{2n} & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

则 C^2 的 i 行 i 列元素为 $-\sum\limits_{j\neq i} c_{ji}^2$.

由 $A^2+B^2=C^2$，比较两边 i 行 i 列元素得

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2+\sum_{j=1}^{n} b_{ij}^2+\sum_{j\neq i} c_{ji}^2=0$$

由于 a_{ij},b_{ij},c_{ij} 均为实数，因此对任意的 i,j 得 $a_{ij}=0,b_{ij}=0,c_{ji}=0$. 所以 $A=B=C=0$.

90. 求满足 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^2=E$ 的所有二阶实矩阵.

解 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} a^2+bc=bc+d^2=1, \\ b(a+d)=c(a+d)=0. \end{cases}$ (1)

1) 当 $b=0$ 时，(1)变为

$$a^2=d^2=1, c(a+d)=0.$$

若 $a+d=0$，则 c 可为任意实数，且 $a=-d=1$ 或 $a=-d=-1$.

若 $a+d\neq 0$，则 $c=0$，$a=d=1$ 或 $a=d=-1$.

2) 当 $b\neq 0$ 时，(1)变为 $a+d=0$，$a^2+bc=1$，即 $d=-a$，$c=\dfrac{1-a^2}{b}$.

由 1)、2)知满足 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^2=E$ 的一切实方阵为以下几种类型：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & -1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} x & y \\ \dfrac{1-x^2}{y} & -x \end{bmatrix},$$

其中 x 可以为任意实数，y 可以为任意非零实数.

91. 什么叫做矩阵多项式？

答　设 A 是数域 P 上的 $n\times n$ 矩阵，

$$f(x)=a_mx^m+\cdots+a_1x+a_0$$

是数域 P 上的多项式，称

$$f(A)=a_mA^m+\cdots+a_1A+a_0E$$

为 A 的一个矩阵多项式.

92.　设 $f(\lambda)=\lambda^2-5\lambda+3, A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -3 & 3\end{bmatrix}$，求 $f(A)$、$|f(A)|$ 和秩 $f(A)$.

解　$f(A)=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -3 & 3\end{bmatrix}^2-5\begin{bmatrix}2 & -1\\ -3 & 3\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$.

$|f(A)|=0$，秩$(f(A))=0$.

四、　矩阵的转置与共轭

93.　什么叫做矩阵的转置？

答　设 $A=(a_{ij})_{n\times m}$，称下面 $m\times n$ 矩阵为 A 的转置，记为 A'（或 A^T），即

$$A'=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1}\\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm}\end{bmatrix}.$$

94.　矩阵的转置有哪些规律？

答　矩阵的转置满足：

1）线性性：$(kA+lB)'=kA'+lB'$；

2）对合性：$(A')'=A$；

3）穿脱法则：$(AB)'=B'A'$；

4）无序性：$(A^{-1})'=(A')^{-1}$，其中 A 可逆；

5) 秩 A=秩 A'；

6) $|A|=|A'|$，其中 A 为方阵；

7) $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} A' & C' \\ B' & D' \end{bmatrix}$.

95. 什么叫做矩阵的共轭矩阵和共轭转置矩阵？

答 设复矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times m}$，则称 $\overline{A}=(\overline{a}_{ij})_{n\times m}$ 为 A 的共轭矩阵，其中 $\overline{a}_{ij}$ 为 a_{ij} 的共轭复数. 比如设

$$B=\begin{bmatrix} 1+i & 2 & 3+2i \\ 5i & 2-3i & 0 \end{bmatrix}, \text{则 } \overline{B}=\begin{bmatrix} 1-i & 2 & 3-2i \\ -5i & 2+3i & 0 \end{bmatrix}.$$

所谓矩阵 A 的共轭转置矩阵是指下面的 $m\times n$ 矩阵

$$\overline{A'}=\begin{bmatrix} \overline{a}_{11} & \overline{a}_{21} & \cdots & \overline{a}_{n1} \\ \overline{a}_{12} & \overline{a}_{22} & \cdots & \overline{a}_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \overline{a}_{1m} & \overline{a}_{2m} & \cdots & \overline{a}_{nm} \end{bmatrix}.$$

比如对上面的 B，则

$$\overline{B'}=\begin{bmatrix} 1-i & -5i \\ 2 & 2+3i \\ 3-2i & 0 \end{bmatrix}.$$

96. 矩阵的共轭满足：

1) $\overline{kA+lB}=\overline{k}\,\overline{A}+\overline{l}\,\overline{B}$；

2) $\overline{\overline{A}}=A$；

3) $\overline{AB}=\overline{A}\cdot\overline{B}$；

4) $\overline{A'}=(\overline{A})'$；

5) $|\overline{A}|=\overline{|A|}=|\overline{A'}|$，其中 A 为方阵；

6) 秩 A=秩 $\overline{A}$=秩 $\overline{A'}$；

7) $\overline{\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} \overline{A} & \overline{B} \\ \overline{C} & \overline{D} \end{bmatrix}$.

证 只证 5)、6)，其它容易验证.

5) 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，那么由行列式定义有

$$|A|=\sum(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

而 $\overline{A}=(\overline{a_{ij}})_{n\times n}$，所以

$$|\overline{A}|=\sum(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}\overline{a}_{1j_1}\overline{a}_{2j_2}\cdots\overline{a}_{nj_n}$$
$$=\overline{\sum(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}}=\overline{|A|}.$$

从而

$$|\overline{A'}|=\overline{|A'|}=\overline{|A|}.$$

6) 设秩 $A=r$，则 A 存在一个 r 阶子式不为 0，由 5)知，相应地，在 $|\overline{A}|$ 中这个子式也不为 0. 再因 A 中一切 $r+1$ 阶子式都等于 0，仍由 5)，$|\overline{A}|$ 中一切 $r+1$ 阶子式也都等于 0，故秩$(\overline{A})=r=$秩(A). 而由第 **94** 条知秩$(\overline{A'})=$秩 $\overline{A}$.

97. 1) 设 $A=(a_{ij})$ 是 $n\times n$ 实矩阵，则下面的三个条件彼此等价：① $A=0$；② $A'A=0$；③ $\mathrm{tr}A'A=0$.

2) 如果 A 是复矩阵，上述结论是否成立?

证 1) ①⇒②⇒③是显然的.

下证③⇒①. 令 $A'A=(b_{ij})_{n\times n}$，其中 $b_{ii}=a_{1i}^2+a_{2i}^2+\cdots+a_{ni}^2(i=1,2,\cdots,n)$，所以

$$0=\mathrm{tr}A'A=b_{11}+b_{22}+\cdots+b_{nn}=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}^2.$$

故 $a_{ij}=0\ (i、j=1,2,\cdots,n)$，即 $A=0$.

2) 当 A 是复矩阵时，上述结论不一定成立. 比如，$A=\begin{bmatrix}-1 & i\\ i & 1\end{bmatrix}\neq 0$，而 $A'A=0$. 但可改为下面的彼此等价的三个条件：

④ $A=0$；⑤ $\overline{A'}A=0$；⑥ $\mathrm{tr}\,\overline{A'}A=0$.

④⇒⑤⇒⑥是显然的，下证⑥⇒④. 令$\overline{A'}A=(c_{ij})$，

则 $c_{ii}=\overline{a}_{1i}a_{1i}+\overline{a}_{2i}a_{2i}+\cdots+\overline{a}_{ni}a_{ni}=\sum_{k=1}^{n}|a_{ki}|^2$，所以

$0=\mathrm{tr}\,\overline{A'}A=\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2$. $\therefore a_{ij}=0$，即 $A=0$.

98. 如果 A 是实对称矩阵，且 $A^2=0$，那么 $A=0$.

证 $0=A^2=A'A$，由第 **97** 条得 $A=0$.

99. 设 $A'=A,B'=B$，问 $A+B,kA+lB$ (k,l 为常数)，AB，A^{-1},A^* 是不是对称矩阵.

答 $(kA+lB)'=kA'+lB'=kA+lB$，因此 $kA+lB$ 是对称矩阵. 取 $k=l=1$，即知 $A+B$ 也是对称矩阵.

两对称矩阵之积不一定是对称矩阵. 但可以证明：若 A,B 为对称矩阵，则

$$AB \text{ 为对称矩阵} \Longleftrightarrow AB=BA.$$

事实上，$AB=(AB)'=B'A'=BA$；反之，$AB=BA=B'A'=(AB)'$.

当 $A'=A$，且 A^{-1}存在时，A^{-1}仍是对称矩阵，因为$(A^{-1})'=(A')^{-1}=A^{-1}$.

对称矩阵 A 的伴随矩阵 A^* 是对称矩阵，因为$(A^*)'=(A')^*=A^*$.

100. 1) 两个反对称矩阵之和是反对称矩阵；

2) 可逆的反对称矩阵的逆矩阵是反对称矩阵；

3) 奇(偶)阶反对称矩阵的伴随矩阵是(反)对称矩阵；

4) 两个可交换的反对称矩阵之积是对称矩阵；

5) 可交换的对称矩阵与反对称矩阵之积是反对称矩阵.

证 1) $(A+B)'=A'+B'=-A+(-B)=-(A+B)$.

2) $(A^{-1})'=(A')^{-1}=(-A)^{-1}=-A^{-1}$.

3) $(A^*)'=(A')^*=(-A)^*=(-1)^{n-1}A^*$，

$$\therefore \quad (A^*)'=\begin{cases} A^*, \text{当 } n \text{ 为奇数时}, \\ -A^*, \text{当 } n \text{ 为偶数时}. \end{cases}$$

4) 证明见第 **1058** 条.

5) $(AB)'=B'A'=(-B)A=-AB$.

101. 任一 $n\times n$ 矩阵可唯一地表为一对称矩阵与一反对称矩阵之和.

证　设 A 为 $n\times n$ 矩阵. 令

$$B=\frac{A+A'}{2},C=\frac{A-A'}{2}, \tag{1}$$

则

$$B'=B,C'=-C,且\ A=B+C.$$

2) 设

$$A=B_1+C_1,B'_1=B_1,C'_1=-C_1, \tag{2}$$

则　$B=B_1,C=C_1$. 事实上, 由(1)、(2)得

$$\begin{aligned}B=\frac{1}{2}(A+A')&=\frac{1}{2}[(B_1+C_1)+(B_1+C_1)']\\&=\frac{1}{2}(B_1+C_1+B_1-C_1)=B_1.\end{aligned}$$

从而由 $B+C=B_1+C_1=B+C_1$ 得 $C=C_1$.

102.　设 $A=\begin{bmatrix}1+\sqrt{3}i & -2+2\sqrt{3}i & -8\\ 0 & 1+\sqrt{3}i & -2+2\sqrt{3}i\\ 0 & 0 & 1+\sqrt{3}i\end{bmatrix}$, 则

$$A^n+\overline{A}^n=2^{n+1}\begin{bmatrix}\cos\frac{n\pi}{3} & 2n\cos\frac{(n+1)\pi}{3} & 2n(n+1)\cos\frac{(n+2)\pi}{3}\\ 0 & \cos\frac{n\pi}{3} & 2n\cos\frac{(n+1)\pi}{3}\\ 0 & 0 & \cos\frac{n\pi}{3}\end{bmatrix}.$$

证　令 $1+\sqrt{3}i=2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})=a$, 则

$$a^2=-2+2\sqrt{3}i,a^3=-8.$$

从而

$$A=\begin{bmatrix}a & a^2 & a^3\\ 0 & a & a^2\\ 0 & 0 & a\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}1 & a & a^2\\ 0 & 1 & a\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=aB,$$

其中 $B=\begin{bmatrix}1 & a & a^2\\ 0 & 1 & a\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

易得

$$A^n=a^n\begin{bmatrix}1 & na & \frac{n(n+1)}{2}a^2\\ 0 & 1 & na\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

$$\overline{A}^n=\overline{a}^n\begin{bmatrix}1 & n\overline{a} & \frac{n(n+1)}{2}\overline{a}^2\\ 0 & 1 & n\overline{a}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

因为 $a=2e^{i\frac{\pi}{3}},a^k=2^ke^{i\frac{k\pi}{3}},\overline{a}^k=2^k\cdot e^{-i\frac{k\pi}{3}}$.

$$a^k+\overline{a}^k=2^k(e^{i\frac{k\pi}{3}}+e^{-i\frac{k\pi}{3}})=2^{k+1}\cos\frac{k\pi}{3},$$

所以

$$A^n+\overline{A}^n=\begin{bmatrix}a^n+\overline{a}^n & n(a^{n+1}+\overline{a}^{n+1}) & \frac{n(n+1)}{2}(a^{n+2}+\overline{a}^{n+2})\\ 0 & a^n+\overline{a}^n & n(a^{n+1}+\overline{a}^{n+1})\\ 0 & 0 & a^n+\overline{a}^n\end{bmatrix}$$

$$=2^{n+1}\begin{bmatrix}\cos\frac{n\pi}{3} & 2n\cos\frac{(n+1)\pi}{3} & 2n(n+1)\cos\frac{(n+2)\pi}{3}\\ 0 & \cos\frac{n\pi}{3} & 2n\cos\frac{(n+1)\pi}{3}\\ 0 & 0 & \cos\frac{n\pi}{3}\end{bmatrix}.$$

五、 矩阵的逆和伴随矩阵

103. 什么叫做矩阵的逆？什么叫做伴随矩阵？

答 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，如果存在 $n\times n$ 矩阵 B，使得 $AB=BA=$

E,则称 A 是可逆的,而 B 称为 A 的逆矩阵,记为 A^{-1}.

设 A_{ij}为 $A=(a_{ij})$中元素 a_{ij}的代数余子式,称

$$A^*=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

为 A 的伴随矩阵.

注 ① 可逆矩阵 A 的逆矩阵是唯一的.

② A 的伴随矩阵 A^* 无论 A 是否可逆,它都是唯一存在的.

104. $AA^*=A^*A=|A|E$.

证 由矩阵乘法可验证.

105. 设 A 是 $n\times n$ 矩阵,则

$$A\text{ 可逆}\Longleftrightarrow |A|\neq 0\Longleftrightarrow \text{秩 } A=n.$$

106. 当 A 可逆时,$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$.

注 这是可逆矩阵的逆矩阵公式.

107. 设 A 为可逆矩阵,则

1) A',A^*都可逆,且$(A')^{-1}=(A^{-1})'$,$(A^*)^{-1}=\frac{1}{|A|}A$;

2) $|A^{-k}|=|A|^{-k}$,k 为自然数;

3) $(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$,$k$ 为非零常数;

4) $(A^{-1})^{-1}=A$.

证 1) 因为$|A'|=|A|\neq 0$,所以 A'可逆. 因为 $A'(A^{-1})'=(A^{-1}A)'=E'=E$,所以$(A')^{-1}=(A^{-1})'$. 因为

$$A^*(\frac{1}{|A|}A)=\frac{1}{|A|}A^*A=\frac{1}{|A|}\cdot|A|E=E,$$

所以 A^*可逆,且$(A^*)^{-1}=|A|^{-1}A$.

2) 因为 $AA^{-1}=E$,所以$|A|\cdot|A^{-1}|=1$. 故$|A^{-1}|=|A|^{-1}$,

从而 $|A^{-k}|=\underbrace{|A^{-1}|\cdots|A^{-1}|}_{k个}=(|A|^{-1})^k=|A|^{-k}$.

3) 由 $(kA)(\frac{1}{k}A^{-1})=AA^{-1}=E$ 得 $(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$.

4) 由 $AA^{-1}=E$ 知 A 为 A^{-1} 的逆，即 $(A^{-1})^{-1}=A$.

108. 设 A 为 $n\times n$ 矩阵，则

$$秩 A^*=\begin{cases}n, & 秩 A=n;\\ 1, & 秩 A=n-1;\\ 0, & 秩 A<n-1.\end{cases}$$

证 当秩 $A=n$ 时，A 可逆. 由第 **107** 条知 A^* 可逆，所以秩 $A^*=n$.

当秩 $A=n-1$ 时，存在 A 的一个 $n-1$ 阶子式不为 0，秩 $A^*\geqslant1$，但 $AA^*=|A|E=0$，故

秩 $A+$ 秩 $A^*\leqslant n$，秩 $A^*\leqslant n-$ 秩 $A=1$.

所以秩 $A^*=1$.

当秩 $A<n-1$ 时，A 的一切 $n-1$ 阶子式都等于 0，即 $A_{ij}=0$，从而 $A^*=0$，即秩 $A^*=0$.

109. 设 A 是 $n\times n$ 矩阵$(n\geqslant2)$，则 $|A^*|=|A|^{n-1}$.

证 当 $|A|\neq0$ 时，由 $AA^*=|A|E$，等式两边取行列式得 $|A|\cdot|A^*|=|A|^n$，所以 $|A^*|=|A|^{n-1}$.

当 $|A|=0$ 时，秩 $A\leqslant n-1$，由第 **108** 条知秩 $A^*\leqslant1<n$，即 $|A^*|=0$，所以 $|A^*|=0=|A|^{n-1}$.

110. 1) $(kA)^*=k^{n-1}A^*$，其中 A 是 $n\times n$ 矩阵，k 为常数；

2) $0^*=0$；

3) $E^*=E$.

证 由伴随矩阵的定义可验证.

111. 设 $A=\mathrm{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，则 $A^*=\mathrm{diag}(b_1,b_2,\cdots,b_n)$

其中 $b_i=\prod_{j\neq i}a_j\ i=1,2,\cdots,n$.

证 由伴随矩阵定义可证.

112. $(A^*)'=(A')^*$.

证 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$,则

$$(A^*)'=\begin{bmatrix}A_{11} & \cdots & A_{n1}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ A_{1n} & \cdots & A_{nn}\end{bmatrix}'=\begin{bmatrix}A'_{11} & \cdots & A'_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ A'_{n1} & \cdots & A'_{nn}\end{bmatrix}=(A')^*.$$

113. $(AB)^*=B^*A^*$.

证 当 $|AB|\neq 0$ 时,A^{-1}、B^{-1}都存在,由 $AA^*=|A|E$,得 $A^*=|A|A^{-1}$,类似有 $B^*=|B|B^{-1}$,所以

$$(AB)^*=|AB|(AB)^{-1}=|B|B^{-1}\cdot|A|A^{-1}=B^*A^*.$$

当 $|AB|=0$ 时,考虑 $A(\lambda)=A-\lambda E$、$B(\lambda)=B-\lambda E$,易知存在 λ 使 $|A(\lambda)|\neq 0$、$|B(\lambda)|\neq 0$. 由上面的证明可知

$$(A(\lambda)B(\lambda))^*=(B(\lambda))^*(A(\lambda))^*. \tag{1}$$

令 $(A(\lambda)B(\lambda))^*=(f_{ij}(\lambda))_{n\times n}$,$(B(\lambda))^*(A(\lambda))^*=(g_{ij}(\lambda))_{n\times n}$,由(1)式知

$$f_{ij}(\lambda)=g_{ij}(\lambda),i、j=1,2,\cdots,n. \tag{2}$$

由于 $f_{ij}(\lambda)$ 与 $g_{ij}(\lambda)$ 都是多项式,且有无穷多个 λ 使(2)式成立,从而(2)式是恒等式. 因此(1)式也是恒等式. 特别地,令 $\lambda=0$ 代入(1)式,即得 $(AB)^*=B^*A^*$.

114. 设 A 是 $n\times n$ 矩阵 $(n\geqslant 2)$,则 $(A^*)^*=|A|^{n-2}A$.

证 当 $|A|\neq 0$ 时,A^* 可逆,由第 **106** 条、第 **107** 条和第 **109** 条,有

$$(A^*)^*=|A^*|(A^*)^{-1}=|A|^{n-1}\cdot\frac{1}{|A|}A=|A|^{n-2}A.$$

当 $|A|=0$ 时,由第 **108** 条知秩 $A^*\leqslant 1$.

1) 当秩 $A^*=0$ 时,$A^*=0$,$(A^*)^*=0=|A|^{n-2}A$.

2) 当秩 $A^*=1$ 时,

① 当 $n>2$ 时,秩 $A^*<n-1$,由第 **108** 条知.

$$(A^*)^* = 0 = |A|^{n-2}A.$$

② 当 $n=2$ 时，设 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，则 $A^*=\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

所以$(A^*)^*=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=A=|A|^{2-2}A=|A|^{n-2}A.$

115.　试求满足$(A^*)^*=A$的一切 n ($n\geqslant 2$)阶矩阵 A.

解　由第 **114** 条知，所求矩阵 A 即为满足等式

$$|A|^{n-2}\cdot A=A.$$

1) 当$|A|^{n-2}=1$ 时，A 可以为任何 $n\times n$ 矩阵；

2) 当$|A|^{n-2}\neq 1$ 时，$A=0$.

116.　设 n 阶矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$，求 A^*.

解　因为$|A|=1$，所以由第 **106** 条得

$$A^*=|A|\cdot A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \cdots & (-1)^{n-1} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & -1 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

117.　设 A、B 分别为 $n\times n$ 和 $m\times m$ 可逆矩阵，求$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}^*$和$\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}^*$.

解　由第 **106** 条得：

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}^* = \begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}^{-1} = |A| \cdot |B| \begin{bmatrix} A^{-1} & \\ & B^{-1} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}^* = \begin{vmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}^{-1} = (-1)^{mn} |A| \cdot |B| \begin{bmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

118. 设 A、B 为 $n\times n$ 矩阵，$AB=E$，则 $A^{-1}=B$ 或 $B^{-1}=A$.

证 由 $AB=E$ 知 $|A|\neq 0$，因而 A^{-1} 存在. 用 A^{-1} 左乘 $AB=E$ 得 $A^{-1}=B$. 用 B^{-1} 右乘 $AB=E$ 得 $A=B^{-1}$.

注 要证 $A^{-1}=B$，按定义要验证 $AB=BA=E$，由本条知，只要验证 $AB=E$ 或 $BA=E$ 即可.

119. 若 A，B 可逆，$A+B$ 是否可逆？

答 不一定. 比如，$A=E$、$B=-E$ 可逆，但 $A+B=0$，故 $A+B$ 不可逆.

120. 设 A，B，C 都是 $n\times n$ 矩阵，$ABC=E$.

1）A，B，C 哪些为可逆矩阵？如果可逆，求其逆.

2）$BCA=E$，$ACB=E$，$CAB=E$，$BAC=E$，$CBA=E$ 中哪些式子成立？哪些不一定成立？

解 1）由假设知 $|A|\cdot|B|\cdot|C|=1$，因此 $|A|\neq 0$，$|B|\neq 0$，$|C|\neq 0$，即 A，B，C 都可逆. 其次由 $ABC=E$ 知

$$A^{-1}=BC, C^{-1}=AB, B^{-1}=CA.$$

2）$BCA=E$，$CAB=E$ 成立；$ACB=E$，$BAC=E$，$CBA=E$ 不一定成立.

121. 设 $A^k=0$，E 为单位矩阵.

1）证明：$(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}$；

2）$E+A$ 是否可逆？

证 1）$(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^{k-1})=1-x^k$，

将 A 代入即得

$$(E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1})=E-A^k=E.$$

所以 $(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}$.

2) $E+A$ 可逆. 因为 A 是幂零矩阵，由 Jordan 分解知存在可逆矩阵 T 使得

$$T^{-1}AT=\begin{bmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ & & \ddots \\ 0 & & 0 \end{bmatrix},$$

从而

$$T^{-1}(E+A)T=\begin{bmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ & & \ddots \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}.$$

故 $|E+A|=1$.

122. 设 $X=\begin{bmatrix} 0 & A \\ C & 0 \end{bmatrix}$，已知 A^{-1}、C^{-1}存在，求 X^{-1}.

解 1 设 $X^{-1}=\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}$，由

$$\begin{bmatrix} 0 & A \\ C & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix},$$

得　$AX_3=E, AX_4=0, CX_1=0, CX_2=E$.

所以　$X_3=A^{-1}, X_4=0, X_1=0, X_2=C^{-1}$,

即　$X=\begin{bmatrix} 0 & C^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{bmatrix}$.

解 2
$$\left[\begin{array}{cc:cc} 0 & A & E & 0 \\ C & 0 & 0 & E \end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{cc:cc} C & 0 & 0 & E \\ 0 & A & E & 0 \end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{cc:cc} E & 0 & 0 & C^{-1} \\ 0 & E & A^{-1} & 0 \end{array}\right],$$

所以　$X^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & C^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{bmatrix}$.

注　解 1 用的是所谓待定系数法，解 2 是用分块矩阵的初等

变换法.

123. 设 $A=\begin{bmatrix} 0 & a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$，$a_i\neq 0$，$i=1,2,\cdots,n$. 求 A^{-1}.

解 将 A 写成 $A=\begin{bmatrix} 0 & B \\ a_n & 0 \end{bmatrix}$，其中 $B=\mathrm{diag}(a_1,\cdots,a_{n-1})$，由第 **122** 条知

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & a_n^{-1} \\ B^{-1} & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & \frac{1}{a_n} \\ \frac{1}{a_1} & \cdots & \vdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}} & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

124. 设 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，$ad-bc=1$，求 A^{-1}.

解 $|A|=ad-bc=1$，由第 **106** 条知

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot A^{*}=A^{*}=\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

125. 设 $A,B,A+B$ 都可逆，则

1) $(A+B)^{-1}=A^{-1}-A^{-1}(A^{-1}+B^{-1})^{-1}A^{-1}$；

2) $(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=A(A+B)^{-1}B=B(A+B)^{-1}A$.

证 1) $(A+B)[A^{-1}-A^{-1}(A^{-1}+B^{-1})^{-1}A^{-1}]$

$$\begin{aligned}
&=(A+B)A^{-1}-(A+B)A^{-1}(A^{-1}+B^{-1})^{-1}A^{-1}\\
&=E+BA^{-1}-(A^{-1}+B^{-1})^{-1}A^{-1}\\
&\quad -BA^{-1}(A^{-1}+B^{-1})^{-1}A^{-1}\\
&=(E+BA^{-1})[E-(A^{-1}+B^{-1})^{-1}A^{-1}]\\
&=B(B^{-1}+A^{-1})[E-(A^{-1}+B^{-1})^{-1}A^{-1}]
\end{aligned}$$

$$=B(B^{-1}+A^{-1}-A^{-1})=E.$$

2) $A^{-1}+B^{-1}=B^{-1}(A+B)A^{-1}$,

上式两边取逆得

$$(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=A(A+B)^{-1}B.$$

其次由 $A^{-1}+B^{-1}=A^{-1}(A+B)B^{-1}$,又得

$$(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=B(A+B)^{-1}A.$$

126. 设 $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}$,求 A^{-1}.

解 用初等变换法. 因为

$$(A \vdots E)\longrightarrow\left[\begin{array}{ccccc:ccccc} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow\left[\begin{array}{ccccc:ccccc} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{n-1} & \frac{n-2}{n-1} & -\frac{1}{n-1} & \cdots & -\frac{1}{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & -\frac{1}{n-1} & -\frac{1}{n-1} & -\frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{n-2}{n-1} \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow\left[\begin{array}{ccccc:ccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{2-n}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{n-1} & \frac{n-2}{n-1} & -\frac{1}{n-1} & \cdots & -\frac{1}{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & -\frac{1}{n-1} & -\frac{1}{n-1} & -\frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{n-2}{n-1} \end{array}\right]$$

$$\rightarrow\left[\begin{array}{c|cccc} & \frac{2-n}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ E & \frac{1}{n-1} & \frac{2-n}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{2-n}{n-1} \end{array}\right],$$

所以

$$A^{-1}=\frac{1}{n-1}\begin{bmatrix} 2-n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2-n & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2-n \end{bmatrix}.$$

127. 设 A、B 都是 n 阶矩阵，$A+B$，$A-B$ 都可逆，设 $D=\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}$，求 D^{-1}.

解 用待定系数法. 令 $D^{-1}=\begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z_3 & Z_4 \end{bmatrix}$，由 $DD^{-1}=E$，得

$$\begin{cases} AZ_1+BZ_3=E, & (1) \\ AZ_2+BZ_4=0, & (2) \\ BZ_1+AZ_3=0, & (3) \\ BZ_2+AZ_4=E. & (4) \end{cases}$$

(1)+(3)得

$$(A+B)(Z_1+Z_3)=E，即\ Z_1+Z_3=(A+B)^{-1}. \quad (5)$$

(1)−(3)得

$$Z_1-Z_3=(A-B)^{-1}. \quad (6)$$

由(5)、(6)解得

$$Z_1=\frac{1}{2}[(A+B)^{-1}+(A-B)^{-1}],$$

$$Z_3=\frac{1}{2}[(A+B)^{-1}-(A-B)^{-1}].$$

由(2)、(4)可解得 $Z_4=Z_1,Z_2=Z_3$. 故

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} (A+B)^{-1}+(A-B)^{-1} & (A+B)^{-1}-(A-B)^{-1} \\ (A+B)^{-1}-(A-B)^{-1} & (A+B)^{-1}+(A-B)^{-1} \end{bmatrix}.$$

128. 设 $A^3=2E,B=A^2-2A+2E$,求 B^{-1}.

解 $B=A^2-2A+A^3=A(A+2E)(A-E)$,

由 $A^3=2E$,得

$$A(\frac{1}{2}A^2)=E,A^{-1}=\frac{1}{2}A^2.$$

因为　$A^3+8E=10E,(A+2E)(A^2-2A+4E)=10E,$

所以　$(A+2E)^{-1}=\frac{1}{10}(A^2-2A+4E).$

因为　$E=A^3-E=(A-E)(A^2+A+E)$,

所以　$(A-E)^{-1}=A^2+A+E$.

于是　$B^{-1}=(A-E)^{-1}(A+2E)^{-1}A^{-1}$

$$=(A^2+A+E)\cdot\frac{1}{10}(A^2-2A+4E)\frac{1}{2}A^2,$$

化简上式得　$B^{-1}=\frac{1}{10}(A^2+3A+4E)$.

129. 设 A 可逆,则 $(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$.

证 由第 113 条知 $A^*(A^{-1})^*=(A^{-1}A)^*=E^*=E$,

所以　$(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$.

130. 设 $A=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

1) 求 $(A+2E)^{-1}(A^2-4E)$;

2) 求 $(A+2E)^{-1}(A-2E)$.

解 1) $(A+2E)^{-1}(A^2-4E)$

$$=(A+2E)^{-1}(A+2E)(A-2E)$$

$$=A-2E=\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

$$2)\ (A+2E)^{-1}(A-2E)=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-3&0&0\\1&-3&0\\1&1&-3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-3&0&0\\4&-3&0\\0&4&-3\end{bmatrix}.$$

131. 设 A 为 $n\times n$ 矩阵，则 $A=BC$，其中 B 为 $n\times n$ 可逆矩阵，$C^2=C$.

证 设秩 $A=r$，则存在 n 阶可逆矩阵 P、Q 使

$$A=P\begin{bmatrix}E_r&0\\0&0\end{bmatrix}Q=PQ\left[Q^{-1}\begin{bmatrix}E_r&0\\0&0\end{bmatrix}Q\right]=BC,$$

其中 $B=PQ$ 为可逆矩阵，$C=Q^{-1}\begin{bmatrix}E_r&0\\0&0\end{bmatrix}Q$，有 $C^2=C$.

132. 设 A 是 $n\times n$ 矩阵，则 A 可逆 $\Longleftrightarrow$ 存在常数项不为 0 的多项式 $g(x)$，使得 $g(A)=0$.

证 必要性 设 A 的特征多项式为

$$f(\lambda)=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0,$$

其中 $a_0=(-1)^n|A|\neq 0$，而 $f(A)=0$. 故 $f(x)$是适合条件的 $g(x)$.

充分性 设 $g(\lambda)=b_m\lambda^m+\cdots+b_1\lambda+b_0$，$b_0\neq 0$，则

$$0=g(A)=b_mA^m+\cdots+b_1A+b_0E,$$

$$-b_0E=A(b_mA^{m-1}+\cdots+b_1E),$$

所以 $A^{-1}=-\dfrac{1}{b_0}(b_mA^{m-1}+\cdots+b_1E)$.

133. 设 A 是 n 阶可逆矩阵，$1+\beta' A^{-1}\alpha\neq 0$，其中 α 和 β 是 n 维列向量，求$(A+\alpha\beta')^{-1}$.

解 $A+\alpha\beta'=A[E-A^{-1}\alpha(-\beta')]$, (1)

$$(1+\beta' A^{-1}\alpha)(-\beta')=(-\beta')[E-(A^{-1}\alpha)(-\beta')],$$

$$-\beta'=(1+\beta' A^{-1}\alpha)^{-1}(-\beta')[E-A^{-1}\alpha(-\beta')],$$

$$E=[E-A^{-1}\alpha(-\beta')]+A^{-1}\alpha(-\beta')$$
$$=[E-A^{-1}\alpha(-\beta')]$$
$$+A^{-1}\alpha\{(1+\beta'A^{-1}\alpha)^{-1}(-\beta')[E-A^{-1}\alpha(-\beta')]\}$$
$$=[E+A^{-1}\alpha(1+\beta'A^{-1}\alpha)^{-1}(-\beta')][E-A^{-1}\alpha(-\beta')],$$

$$\therefore (E-A^{-1}\alpha(-\beta'))^{-1}=E+A^{-1}\alpha(1+\beta'A^{-1}\alpha)^{-1}(-\beta'). \qquad (2)$$

由(1)、(2)知

$$(A+\alpha\beta')^{-1}=[E-A^{-1}\alpha(-\beta)']^{-1}A^{-1}$$
$$=A^{-1}-\frac{1}{1+\beta'A^{-1}\alpha}A^{-1}\alpha\beta'A^{-1}. \qquad (3)$$

注　(3)式称为 Sherman-Morrison 公式.

134.　设 u,v 是两个 n 维列向量,求 $E+uv'$ 可逆的条件,并求 $(E+uv')^{-1}$.

解　把第 133 条的 A 看成 E,当 $1+v'E^{-1}u=1+v'u\neq 0$ 时,$(E+uv')^{-1}$ 存在,且由第 133 条的(3)式得

$$(E+uv')^{-1}=E-\frac{1}{1+v'u}uv'.$$

135.　设 A 是 n 阶矩阵,$A+E$ 可逆,且 $f(A)=(E-A)(E+A)^{-1}$,则

1) $[E+f(A)](E+A)=2E$;

2) $f(f(A)]=A$.

证　1) $[E+f(A)](E+A)$

$$=[E+(E-A)(E+A)^{-1}](E+A)$$
$$=(E+A)+(E-A)=2E.$$

2) $f[f(A)]=[E-f(A)][E+f(A)]^{-1}$

$$=[E-(E-A)(E+A)^{-1}]\frac{1}{2}(E+A)$$
$$=\frac{1}{2}(E+A)-\frac{1}{2}(E-A)=A.$$

136.　设 α,β 为 n 维列向量,常数 $c\neq 0$,且 $\beta'\alpha-\frac{1}{c}\neq 0$,则

$$(E-c\alpha\beta')^{-1}=E-(c+2d-cd\beta'\alpha)\alpha\beta', \quad (1)$$

其中 $\frac{1}{d}=\beta'\alpha-\frac{1}{c}$.

证 由$\frac{1}{d}=\beta'\alpha-\frac{1}{c}$,两边乘 cd,并整理得

$$c+d=cd\beta'\alpha.$$

所以 $c+2d-cd\beta'\alpha=d$,

$$(E-c\alpha\beta')[E-(c+2d-cd\beta'\alpha)\alpha\beta']=(E-c\alpha\beta')(E-d\alpha\beta')$$
$$=E-(c+d)\alpha\beta'+(cd\beta'\alpha)\alpha\beta'=E.$$

由此即得(1)式.

137. 设 n 阶可逆矩阵 A 中每行元素之和都等于非零常数 c,则 A^{-1}中每行元素之和都等于$\frac{1}{c}$.

证 不难验证:方阵 A 的每行元素的和等于 $c\Longleftrightarrow$

$$A\begin{bmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}=c\begin{bmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}. \quad (1)$$

由 A 可逆,并用$\frac{1}{c}A^{-1}$左乘(1)式两端得

$$\frac{1}{c}\begin{bmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}=A^{-1}\begin{bmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}, \quad (2)$$

由(2)知 A^{-1}的每行元素的和等于$\frac{1}{c}$.

注 由(1)知,c 是 A 的一个特征值,$(1,1,\cdots,1)'$是 A 的属于特征值 c 的一个特征向量.

138. 设 A,T 都是 $n\times n$ 矩阵,则

1) $(T^{-1}AT)^m=T^{-1}A^mT$,其中 m 为非负整数; (1)

2) 当 A 可逆时,(1)式对一切整数 m 都成立.

证 1) 当 $m=0$ 时,(1)式左右两端都等于 E,结论成立. 当 m 为自然数时,用数学归纳法可得结论.

2) 由 1) 知对非负整数(1)式成立. 下证对负整数 $m=-k$ $(k>0)$(1)式也成立. 事实上

$$(T^{-1}AT)^m=[(T^{-1}AT)^{-1}]^k=(T^{-1}A^{-1}T)^k$$
$$=T^{-1}(A^{-1})^kT=T^{-1}A^mT.$$

139. 设 $n\times n$ 矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$, $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$, 且 C,D 满足 $A=BC$, $B=AD$, 则

1) 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 互相等价;

2) 存在可逆矩阵 T 使 $B=AT$.

证 1) 令 $C=(c_{ij})_{n\times n}$, 则由 $A=BC$ 得

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)(c_{ij}),$$

即

$$\alpha_j=c_{1j}\beta_1+c_{2j}\beta_2+\cdots+c_{nj}\beta_n,\ j=1,2,\cdots,n. \tag{1}$$

由(1)知 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 可由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 线性表出. 类似地, 由 $B=AD$ 知 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表出, 从而它们等价.

2) 设秩 $A=r$, 则由 1)知秩 $B=r$. 从而存在列初等变换, 把 A 的后 $n-r$ 列都变为 0, 即存在可逆矩阵 Q, 使 $AQ=(C_1,0)$, 其中 C_1 为 $n\times r$ 矩阵, 且秩 $C_1=r$. 类似地, 存在可逆矩阵 R, 使 $BR=(D_1,0)$, 其中 D_1 为 $n\times r$ 矩阵, 秩 $D_1=r$. 将 Q 和 R^{-1}分块. 令

$$Q=(Q_1,Q_2),\ R^{-1}=\begin{bmatrix}R_1\\R_2\end{bmatrix},$$

则 $(C_1,\ 0)=AQ=(AQ_1,AQ_2)$, 所以 $AQ_1=C_1$.

其次, 由 $BR=(D_1,0)$ 得

$$B=(D_1,0)R^{-1}=D_1R_1.$$

故

$$C_1\overset{*}{=}AQ_1=BCQ_1=D_1R_1CQ_1=D_1S, \tag{2}$$

其中　$S=R_1CQ_1$ 为 $r\times r$ 矩阵. 由(2)式知

$$r=\text{秩}\ C_1\leqslant\text{秩}\ S\leqslant r.$$

所以秩 $S=r$, 即 S 为可逆矩阵. 于是

$$B=(D_1,0)R^{-1}=(C_1S^{-1},0)R^{-1}=(C_1,0)\begin{bmatrix}S^{-1}&0\\0&E\end{bmatrix}R^{-1}$$

$$=AQ\begin{bmatrix}S^{-1}&0\\0&E\end{bmatrix}R^{-1}=AT,$$

其中 $T=Q\begin{bmatrix}S^{-1}&0\\0&E\end{bmatrix}R^{-1}$为 $n\times n$ 可逆矩阵.

140. 设 A 是主对角线元素为零的 4 阶实对称可逆矩阵,$B=\mathrm{diag}(0,0,k,l)$,其中 $k>0,l>0$.

1) 试计算 $E+AB$,并指出 A 中元素满足什么条件时,$E+AB$ 可逆?

2) 当 $E+AB$ 可逆时,证明$(E+AB)^{-1}A$ 为对称矩阵.

解 1) 设 $A=\begin{bmatrix}0&a&b&c\\a&0&d&s\\b&d&0&t\\c&s&t&0\end{bmatrix}$,则

$$E+AB=\begin{bmatrix}1&0&kb&lc\\0&1&kd&ls\\0&0&1&lt\\0&0&kt&1\end{bmatrix},$$

$$|E+AB|=1-klt^2.$$

所以当 $t\neq\pm\sqrt{\frac{1}{kl}}$时,$E+AB$ 可逆.

2) $(E+AB)^{-1}A=(E+AB)^{-1}(A^{-1})^{-1}=[A^{-1}(E+AB)]^{-1}$

$$=(A^{-1}+B)^{-1}.$$

因为 A,B 是对称矩阵,所以由对称矩阵之逆是对称矩阵知 A^{-1}是对称矩阵. 故 $A^{-1}+B$ 是对称矩阵,从而$(A^{-1}+B)^{-1}$即$(E+AB)^{-1}A$ 是对称矩阵.

141. 若 A,D 可逆,则

1) $\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{bmatrix}$;

2) $\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix}$.

证 以 2) 为例，用分块矩阵的初等变换法：

$$\left[\begin{array}{cc:cc} A & B & E & 0 \\ 0 & D & 0 & E \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc:cc} A & B & E & 0 \\ 0 & E & 0 & D^{-1} \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cc:cc} A & 0 & E & -BD^{-1} \\ 0 & E & 0 & D^{-1} \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc:cc} E & 0 & A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & E & 0 & D^{-1} \end{array}\right].$$

注 也可直接用矩阵乘法验证.

142. 设 $T_1 = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$，$T_1$ 可逆，D 可逆，则

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} M & -MBD^{-1} \\ -D^{-1}CM & D^{-1}CMBD^{-1}+D^{-1} \end{bmatrix},$$

其中 $M=(A-BD^{-1}C)^{-1}$.

143. 设 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$的各阶顺序主子式全不为 0，则 $A=BC$，其中 B 为可逆的下三角矩阵，C 为可逆的上三角矩阵.

证 对 A 的阶数 n 用归纳法. 当 $n=1$ 时结论成立. 归纳假定结论对适合条件的 $n-1$ 阶矩阵成立. 令 A_1 为 A 的第 $n-1$ 阶顺序主子式，则 $A=\begin{bmatrix} A_1 & \alpha \\ \beta' & a_{nn} \end{bmatrix}$. 因为 $|A_1|\neq 0$，所以

$$\begin{bmatrix} E_{n-1} & 0 \\ -\beta' A_1^{-1} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 & \alpha \\ \beta' & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & \alpha \\ 0 & d \end{bmatrix}, \tag{1}$$

其中 $d=a_{nn}-\beta' A_1^{-1}\alpha$. 由 $|A|\neq 0$ 知 $d\neq 0$.

由归纳假定 $A_1=B_1C_1$，其中 B_1 为可逆的下三角矩阵，C_1 为可逆的上三角矩阵，那么

$$\begin{bmatrix} A_1 & \alpha \\ 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1C_1 & \alpha \\ 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1 & B_1^{-1}\alpha \\ 0 & d \end{bmatrix}; \tag{2}$$

由(1)、(2)得

$$A=\begin{bmatrix} E_{n-1} & 0 \\ -\beta' A_1^{-1} & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1 & B_1^{-1}\alpha \\ 0 & d \end{bmatrix}=BC,$$

其中　$B=\begin{bmatrix} E_{n-1} & 0 \\ -\beta' A_1^{-1} & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix} c_1 & B_1^{-1}\alpha \\ 0 & d \end{bmatrix}$，且 B 为可逆的下三角矩阵，C 为可逆的上三角矩阵.

144.　设 A 为 $m\times n$ 矩阵，若存在 $n\times m$ 矩阵 B，使 $BA=E$，则称 B 为 A 的一个左逆. 证明

1) A 有左逆$\Longleftrightarrow$秩 $A=n$；

2) A 的左逆唯一$\Longleftrightarrow A$ 为可逆方阵.

证　1)　必要性　设 $BA=E_n$，则

$$n=\text{秩 } E_n=\text{秩 } BA\leqslant \text{秩 } A\leqslant n.$$

所以　秩 $A=n$.

充分性　因为秩 $A=n$，所以秩$\overline{A'}A=n$. 令 $B=(\overline{A'}A)^{-1}A'$，则 $BA=E_n$.

2)　充分性　显然.

必要性　设 $B_{n\times m}$是 $A_{m\times n}$的唯一左逆. 在 $BA=E_n$ 的两边取共轭转置得

$$E=\overline{A'}\,\overline{B'}=\overline{A'}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\overline{A'}\beta_1,\overline{A'}\beta_2,\cdots,\overline{A'}\beta_n),\quad(1)$$

其中$\overline{B'}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$. 由(1)式知

$$\overline{A'}\beta_i=e_i,i=1,2,\cdots,n,$$

其中 e_i 为第 i 个分量为 1，其余分量均为 0 的列向量. 由于$\overline{B'}$唯一，$\overline{A'}\beta_i=e_i$ 的解唯一，从而$\overline{A'}x=0$ 只有零解.

又 $A\overline{A'}x=0$ 与$\overline{A'}x=0$ 同解，故 $A\overline{A'}x=0$ 只有零解，从而得 $|A\overline{A'}|\neq 0$. 那么

$$m=\text{秩}(A\overline{A'})=\text{秩 } A.$$

但由 1)知秩 $A=n$，所以 $m=n$，即 A,B 均为方阵. 又 $BA=E$，所以 A 可逆.

六、 矩阵的迹

145. 什么叫做矩阵的迹?

答 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$,A 的主对角元素的和称为 A 的迹,记为 $\mathrm{tr}A$,即

$$\mathrm{tr}A=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}.$$

146. $\mathrm{tr}A=\mathrm{tr}A'$.

147. 矩阵的迹是线性函数. 即

$$\mathrm{tr}(A+B)=\mathrm{tr}A+\mathrm{tr}B;$$

$$\mathrm{tr}(kA)=k\mathrm{tr}A.$$

证 设 $n\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})$,$B=(b_{ij})$,则

$$\mathrm{tr}(A+B)=(a_{11}+b_{11})+(a_{22}+b_{22})+\cdots+(a_{nn}+b_{nn})=\mathrm{tr}A+\mathrm{tr}B,$$

$$\mathrm{tr}(kA)=ka_{11}+ka_{22}+\cdots+ka_{nn}=k\mathrm{tr}A.$$

148. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$,A 的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\lambda^n+b_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+b_1\lambda+b_0,$$

则 $b_{n-1}=-\mathrm{tr}A$.

证 因为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n|A|,$$

所以 $b_{n-1}=-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})=-\mathrm{tr}A$.

注 若两个矩阵的特征多项式相同,则此两矩阵的迹相等.

149. 设 A 与 B 相似,则 $\mathrm{tr}A=\mathrm{tr}B$.

证 因为 $A\sim B$,所以 $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$,故 $\mathrm{tr}A=\mathrm{tr}B$.

150. 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的全部特征值,则

$$\mathrm{tr}A=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$$

证 由 Schur 定理,存在可逆矩阵 T,使

$$T^{-1}AT=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & *\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{bmatrix},$$

故 $\mathrm{tr}A=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$.

151.　$\mathrm{tr}AB=\mathrm{tr}BA$.

证　设 A 为 $n\times m$ 矩阵，B 为 $m\times n$ 矩阵，不失一般性，设 $n\geqslant m$，则由第 **208** 条有

$$|\lambda E-AB|=\lambda^{n-m}|\lambda E-BA|. \tag{1}$$

所以 AB 与 BA 有相同的非零特征值，由第 **150** 条有 $\mathrm{tr}AB=\mathrm{tr}BA$.

152.　不存在 n 阶矩阵 A、B，有 $AB-BA=E$.

证　用反证法. 若 $AB-BA=E$，则

$$n=\mathrm{tr}E=\mathrm{tr}(AB-BA)=\mathrm{tr}AB-\mathrm{tr}BA=0,$$

矛盾.

153.　设 A,B,C 都是 $n\times n$ 矩阵，且

$$AC=CA,BC=CB,C=AB-BA, \tag{1}$$

则存在不大于 n 的自然数 m，使得 $C^m=0$.

证　1) 先证 $\mathrm{tr}C^k=0$，其中 k 为任意自然数.

$$C^k=C^{k-1}(AB-BA)=A(C^{k-1}B)-(C^{k-1}B)A. \tag{2}$$

由(2)式及第 **151** 条即知 $\mathrm{tr}C^k=0$.

2) 再证 C 的特征值都等于 0. 设 C 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则存在可逆矩阵 T，使

$$C=T^{-1}\begin{bmatrix}\lambda_1 & & *\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{bmatrix}T.$$

所以 $C^k=T^{-1}\begin{bmatrix}\lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k\end{bmatrix}T,k=1,2,\cdots.$

从而

$$0=\mathrm{tr}C^k=\lambda_1^k+\lambda_2^k+\cdots+\lambda_n^k,\ k=1,2,\cdots. \tag{3}$$

不失一般性，设 C 的互异的非零特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$，且重数分别为 $r_1,r_2,\cdots r_s$，则(3)式变为

$$0=r_1\lambda_1^k+r_2\lambda_2^k+\cdots+r_s\lambda_s^k,k=1,2,\cdots.$$

取前 s 个等式，因为范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_s \\ \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_s^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^s & \cdots & \lambda_s^s \end{vmatrix} \neq 0.$$

因此 $r_1=r_2=\cdots=r_s=0$，换句话说非零特征值都是 0 重，故 C 的特征值全为 0.

3) 再证 $C^m=0$. 由于 C 的每个若当块都形如

$$J_i=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}_{n_i\times n_i},\ i=1,2,\cdots,t.$$

因此

$$C=T^{-1}\begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_t \end{bmatrix}T.$$

令 $m=\max\{n_1,n_2,\cdots,n_t\}$，则

$$C^m=T^{-1}\begin{bmatrix} J_1^m & & \\ & \ddots & \\ & & J_t^m \end{bmatrix}T=0.$$

七、 矩阵的直积

154. 什么叫做矩阵的直积？

答 设 $A=(a_{ij})_{n\times m}$，$B=(b_{ij})_{s\times t}$，则称下面的 $ns\times mt$ 矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1m}B \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \cdots & a_{nm}B \end{bmatrix}$$

为 A 与 B 的直积，记为 $A\otimes B$. 直积又称 Kronecker 积.

比如，$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，则

$$A\otimes B=\begin{bmatrix} aB & bB \\ cB & dB \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ax & bx \\ ay & by \\ cx & dx \\ cy & dy \end{bmatrix},$$

$$B\otimes A=\begin{bmatrix} xA \\ yA \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} xa & xb \\ xc & xd \\ ya & yb \\ yc & yd \end{bmatrix}.$$

由此可见，一般地，$A\otimes B\neq B\otimes A$.

155. 矩阵的直积具有以下性质：

1) $0\otimes A=0$，$A\otimes 0=0$；

2) $kA\otimes lB=kl(A\otimes B)$，$k$，$l$ 为常数；

3) $(A_1+A_2)\otimes B=A_1\otimes B+A_2\otimes B$，

$A\otimes(B_1+B_2)=A\otimes B_1+A\otimes B_2$；

4) $E_n\otimes E_m=E_{nm}$.

证 这些都可依定义验证，下面以 3)的第一个式子为例来证明.

设 $A_1=(a_{ij})_{n\times m}$，$A_2=(b_{ij})_{n\times m}$，那么

$$(A_1+A_2)\otimes B=\begin{bmatrix} (a_{11}+b_{11})B & \cdots & (a_{1m}+b_{1m})B \\ \vdots & & \vdots \\ (a_{n1}+b_{n1})B & \cdots & (a_{nm}+b_{nm})B \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1m}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}B & \cdots & a_{nm}B \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_{11}B & \cdots & b_{1m}B \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1}B & \cdots & b_{nm}B \end{bmatrix}$$

$$=A_1\otimes B+A_2\otimes B.$$

156. $(A\otimes B)'=A'\otimes B'$

证 $A=(a_{ij})_{n\times m}$，于是

$$(A\otimes B)'=\begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1m}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}B & \cdots & a_{nm}B \end{bmatrix}'$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}B' & \cdots & a_{n1}B' \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1m}B' & \cdots & a_{nm}B' \end{bmatrix}=A'\otimes B'.$$

157. $(A\otimes B)\otimes C=A\otimes(B\otimes C)$.

证 设 $A=(a_{ij})_{n\times m}$，则

$$(A\otimes B)\otimes C=\begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1m}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}B & \cdots & a_{nm}B \end{bmatrix}\otimes C$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}(B\otimes C) & \cdots & a_{1m}(B\otimes C) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(B\otimes C) & \cdots & a_{nm}(B\otimes C) \end{bmatrix}=A\otimes(B\otimes C).$$

158. $(A_1\otimes B_1)(A_2\otimes B_2)=A_1A_2\otimes B_1B_2$，其中 A_1A_2，B_1B_2 分别有意义.

证 设 $A_1=(a_{ij})_{n\times m}$，$A_2=(b_{ij})_{m\times p}$，$B_1=(c_{ij})_{r\times t}$，$B_2=(d_{ij})_{t\times s}$. 再令

$$C=(A_1\otimes B_1)(A_2\otimes B_2)=(C_{ij}), \quad (1)$$

$$D=A_1A_2\otimes B_1B_2=(D_{ij}). \quad (2)$$

下证 $C_{ij}=D_{ij}$. 由(1)，(2)得

$$C_{ij}=(a_{i1}B_1)(b_{1j}B_2)+\cdots+(a_{im}B_1)(b_{mj}B_2)$$
$$=(a_{i1}b_{1j}+\cdots+a_{im}b_{mj})B_1B_2=D_{ij}.$$

所以 $C=D$.

159. 当 A,B 可逆时,$(A\otimes B)^{-1}=A^{-1}\otimes B^{-1}$.

证 设 A 为 $n\times n$ 可逆矩阵,B 为 $m\times m$ 可逆矩阵,则

$$(A\otimes B)(A^{-1}\otimes B^{-1})=AA^{-1}\otimes BB^{-1}=E_n\otimes E_m=E_{nm}.$$

由此即得结论.

160. 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 n 阶矩阵 A 的全部特征值,$\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_m$ 为 m 阶矩阵 B 的全部特征值,则 $A\otimes B$ 的全部特征值为:$\lambda_i\cdot\mu_j,i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m$.

证 由 Schur 定理,存在可逆矩阵 $T_{n\times n}$和可逆矩阵 $Q_{m\times m}$,有

$$A=T^{-1}\begin{bmatrix}\lambda_1 & & *\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{bmatrix}T,B=Q^{-1}\begin{bmatrix}\mu_1 & & *\\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_m\end{bmatrix}Q.$$

那么

$$A\otimes B=\left[T^{-1}\begin{bmatrix}\lambda_1 & & *\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{bmatrix}T\right]\otimes\left[Q^{-1}\begin{bmatrix}\mu_1 & & *\\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_m\end{bmatrix}Q\right]$$

$$=(T^{-1}\otimes Q^{-1})\left[\begin{bmatrix}\lambda_1 & & *\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}\mu_1 & & *\\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_m\end{bmatrix}\right](T\otimes Q)$$

$$=M^{-1}\begin{bmatrix}\lambda_1\begin{bmatrix}\mu_1 & & *\\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_m\end{bmatrix} & & *\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\begin{bmatrix}\mu_1 & & *\\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_m\end{bmatrix}\end{bmatrix}M, \tag{1}$$

其中 $M=T\otimes Q$. 由(1)式得出 $A\otimes B$ 的特征值为

$$\lambda_1\mu_1,\cdots,\lambda_1\mu_m,\lambda_2\mu_1,\cdots,\lambda_2\mu_m,\cdots,\lambda_n\mu_1,\cdots,\lambda_n\mu_m.$$

161. 设 A 为 $n\times n$ 矩阵，B 为 $m\times m$ 矩阵，则 $|A\otimes B|=|A|^m\cdot|B|^n$.

证　由第 160 条(1)式知

$$\begin{aligned}|A\otimes B|&=(\lambda_1\mu_1\cdots\lambda_1\mu_m)(\lambda_2\mu_1\cdots\lambda_2\mu_m)\cdots(\lambda_n\mu_1\cdots\lambda_n\mu_m)\\&=(\lambda_1\cdots\lambda_n)^m(\mu_1\cdots\mu_m)^n\\&=|A|^m\cdot|B|^n.\end{aligned}$$

注　由此可知 $A\otimes B$ 可逆 $\Longleftrightarrow A$ 与 B 一定都可逆.

162. 秩$(A\otimes B)=$(秩 A)$\cdot$(秩 B).

证　设 A 为 $n\times m$ 矩阵，B 为 $s\times t$ 矩阵，秩 $A=k$，秩 $B=l$，则存在可逆矩阵 $P_{n\times n},Q_{m\times m},R_{s\times s},T_{t\times t}$，有

$$A=P\begin{bmatrix}E_k&0\\0&0\end{bmatrix}Q,B=R\begin{bmatrix}E_l&0\\0&0\end{bmatrix}T.$$

于是 $$A\otimes B=(P\otimes R)\left[\begin{bmatrix}E_k&0\\0&0\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}E_l&0\\0&0\end{bmatrix}\right](Q\otimes T)$$

$$=(P\otimes R)\begin{bmatrix}E_{kl}&0\\0&0\end{bmatrix}(Q\otimes T).$$

由于 $P\otimes R$ 和 $Q\otimes T$ 都是可逆矩阵，于是

$$\text{秩}(A\otimes B)=\text{秩}\begin{bmatrix}E_{kl}&0\\0&0\end{bmatrix}=kl=(\text{秩 }A)\cdot(\text{秩 }B).$$

163. 设 A,B 分别为 $n\times n$ 和 $m\times m$ 矩阵，则

$\mathrm{tr}(A\otimes B)=(\mathrm{tr}A)(\mathrm{tr}B)$.

证　设 $A=(a_{ij})$，则

$$A\otimes B=\begin{bmatrix}a_{11}B&\cdots&a_{1n}B\\\vdots&&\vdots\\a_{n1}B&\cdots&a_{nn}B\end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(A\otimes B)&=\mathrm{tr}(a_{11}B)+\mathrm{tr}(a_{22}B)+\cdots+\mathrm{tr}(a_{nn}B)\\&=(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\mathrm{tr}B\\&=(\mathrm{tr}A)\cdot(\mathrm{tr}B).\end{aligned}$$

第三章 矩阵的三种等价关系

一、关系

164. 什么叫关系？

答 关系是映射的推广．设 A,B 是两集合，且 $R\subseteq A\times B$，则称 R 为 A,B 间的一个关系．当 $(a,b)\in R$ 时，称 a 与 b 具有关系 R，记为 aRb，即

$$(a,b)\in R\Longleftrightarrow aRb.$$

反之，当 $(a,b)\overline{\in}R$ 时，称 a 与 b 不具有关系 R，记为 $a\overline{R}b$，即

$$(a,b)\overline{\in}R\Longleftrightarrow a\overline{R}b.$$

注 ① 由上面的定义可知，$\forall\ a\in A,\forall\ b\in B,aRb$ 或 $a\overline{R}b$ 有且仅有一个成立．

② 当 A,B 都是非空集合时，$A\times B$ 是非空集合，$A\times B$ 的每个子集，就是 A,B 间的一个关系．因此 A,B 间的关系不是唯一的，特别地，若 $A\times B$ 有 n 个元，则 $A\times B$ 有 2^n 个子集，从而 A,B 间有 2^n 个不同的关系．

③ $\varnothing\subseteq A\times B$，$\varnothing$ 也是 A,B 间的一个关系．对 $\forall\ a\in A,\forall\ b\in B$，都有 $(a,b)\overline{\in}\varnothing$，或 $a\overline{\varnothing}b$.

165. 设 $A=\{1,2,3\},B=\{$错，对$\}$.

1) $R_1=\{(1,$错$)\}$，

2) $(1,$错$)\in R_2$，

问 R_1,R_2 是不是 A,B 间的关系？

答 R_1 是 A,B 间的一个关系．R_2 不是 A,B 间的关系，因为 R_2 并没有明确规定是一个什么样的集合，只知道它至少有一个元 $(1,$错$)$，无法判定 $(2,$错$)$ 是否在 R_2 中．

166. 设 M 是一切 n 阶实方阵所成集合，Z 是整数集．

1) $R_1=\{(A,m)\mid A\in M, m\in Z$，秩 $A=m\}$，

2) $R_2=\{(A,M)\mid A\in M, m\in Z, |A|=m\}$，

问 R_1, R_2 是不是 M, Z 间的关系？

答 R_1, R_2 都是 M, Z 间的关系．比如，就 R_1 而言，$\forall\ A\in M$，$\forall\ m\in Z$，或者秩 $A=m$，或者秩 $A\neq m$，两者必居其一且仅居其一，故 $R_1\subseteq M\times Z$．

167. 为什么说关系是映射概念的推广？

答 我们先看一个映射的例子．设

$$A=\{1,2,3\}, B=\{\text{对},\text{错}\}, \tag{1}$$

映射 $f: A\longrightarrow B$ 规定如下：

$$f: 1\longrightarrow\text{对}, 2\longrightarrow\text{对}, 3\longrightarrow\text{错}.$$

f 可以看成是 $A\times B$ 的子集$\{(1,\text{对}),(2,\text{对}),(3,\text{错})\}$，即把 f 看成是 A, B 间的一个关系，在不引起混淆的情况下，可以写成 $f=\{(1,\text{对}),(2,\text{对}),(3,\text{错})\}$

一般地，设 f 是集合 A 到 B 的映射，则集合

$$\{(a,f(a))\mid\forall\ a\in A, f(a)\in B\}\subseteq A\times B$$

是 A, B 间的一个关系．此即表明可以用这个关系来描述映射 f．反之，若 A, B 间的关系 R 具有性质：

$\forall\ a\in A$，存在唯一的 $b\in B$，有 aRb，则 R 决定了一个 A 到 B 的映射 $f(a)=b$．这也就是说，映射是一种关系．

但这并不意味着 A, B 间的任意一个关系都可以决定 A 到 B 的一个映射．比如，对(1)式中 A, B，令 $R=\{(1,\text{对})\}$，则 R 是 A，B 间的关系，但它并不是 A 到 B 的映射．

从以上两点看出关系是映射概念的推广．

168. 什么叫做集合 A 上的二元关系？

答 设 $R\subseteq A\times A$，则称 R 为 A, A 间的一个二元关系，简称为 A 上的一个关系．换句话说，它是 A, B 间关系的特殊情况，即当

$A=B$ 时,A 与 A 之间的关系,称为 A 上的一个关系.

169. 设 Z 为整数集,问下列 R 是不是 Z 上的二元关系?

1) 规定 $(a,b)\in R\Longleftrightarrow a^2+b^2=1,\forall\ a,b\in Z$;

2) 规定 $(a,b)\in R\Longleftrightarrow a$ 整除 $b,\forall\ a,b\in Z$;

3) 规定 $(a,b)\in R\Longleftrightarrow a-b$ 被 2 整除,$\forall\ a,b\in Z$.

答 1),2),3)中的 R 都是 Z 上的关系.

170. 设 $A=\{1,2,3,4\}$,规定

$$(a,b)\in R\Longleftrightarrow a\text{ 整除 } b,\forall\ a,b\in A,$$

问 R 是不是 A 上的二元关系?如果是,请写出 R 的全部元素来.

答 R 是 A 上的二元关系,因为 $\forall\ a,b\in A$,a 或者整除 b,或者不能,两者必居其一.由规定可知:

$$R=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,4),(3,3),(4,4)\}.$$

二、 等价关系

171. 什么叫做等价关系?

答 设 R 是集 A 上的一个关系.

1) 若对 $\forall\ a,b\in A$,当 $(a,b)\in R$ 时,必有 $(b,a)\in R$,则称 R 具有对称性;

2) 若对 $\forall\ a\in A$,都有 $(a,a)\in R$,则称 R 具有自反性;

3) $\forall\ a,b,c\in A$,若 $(a,b)\in R,(b,c)\in R$,都有 $(a,c)\in R$,则称 R 具有传递性;

若 R 具有自反性、对称性与传递性,则称 R 为 A 的一个等价关系.

注 ① 如果 R 具有对称性,那么当 $a\neq b$ 时,(a,b) 和 (b,a) 或者都不在 R 中,或者同在 R 中,不可能一个在,一个不在.

② R 具有自反性即必须一切 $(a,a)\in R$,有一个 $(a,a)\overline{\in} R$,R 就不具有自反性.由此看出,具有自反性的关系 R,其元素个数至少和原集合 A 的元素个数一样多.

③ 上述三个性质有一个不成立时，它就不是等价关系．

④ 有时还把等价关系记为～，当$(a,b)\in\sim$时，记为$a\sim b$.

172. 设$A=\{1,2,3\}$，下列关系中哪些是A的等价关系？为什么？

1) $R_1=\{(1,1),(2,2)\}$;

2) $R_2=\{(1,2),(2,1),(1,1)\}$;

3) $R_3=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$;

4) $R_4=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}$;

5) $R_5=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(2,3),(3,2)\}$;

6) $R_6=\varnothing$.

答 1) R_1不是等价关系，它只具有对称性与传递性，但不具备自反性.

2) R_2也不是等价关系，它不具备自反性和传递性．

3) R_3是等价关系，因为它具备自反性、对称性与传递性．

4) R_4也是等价关系，它具有三性．

5) R_5也是等价关系，它具有三性．

6) R_6不是等价关系，它具有对称性与传递性，但不具有自反性．

173. 设$A=\{1,2,3\}$，问A上的二元关系有多少个？A的等价关系又有多少个？

答 $A\times A$共有9个元素，它共有2^9个不同的子集，每个子集都是一个二元关系，因此在A上有2^9个不同的二元关系．

要构成A的等价关系，至少要含有$(1,1),(2,2),(3,3)$这三个元素．因此$R_1=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$是元素最少的一个等价关系.其次还有以下几个等价关系：

$$R_2=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\};$$

$$R_3=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,3),(3,1)\};$$

$$R_4=\{(1,1),(2,2),(3,3),(2,3),(3,2)\};$$

$$R_5=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(2,3),(3,2)\}.$$

因此 A 有 5 个等价关系.

174. 设 R 为实数集，两个实数间的下列关系哪些是等价关系：$\geqslant$；$\leqslant$；$>$；$<$；$=$.

答 只有“$=$”是 R 的等价关系.

175. 设 A 是平面上所有三角形构成的集合，两个三角形之间的下列关系哪些是 A 的等价关系：全等；面积相等；相似.

答 都是等价关系.

176. 设 R_1,R_2 是 A 的两个等价关系，$R_1\cap R_2$ 和 $R_1\cup R_2$ 是不是 A 的等价关系？为什么？

答 可以证明 $R_1\cap R_2$ 是 A 的等价关系，但 $R_1\cup R_2$ 不一定是 A 的等价关系. 比如，$A=\{1,2,3\}$.

$$R_1=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\},$$

$$R_2=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,3),(3,1)\}$$

都是 A 的等价关系，而

$$R_1\cup R_2=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1)\}$$

不是等价关系，因为传递性不成立：

$$(2,1),(1,3)\in R_1\cup R_2, \text{但}(2,3)\notin R_1\cup R_2.$$

177. 有人说：假如集合 A 上的一个二元关系 R 具有对称性和传递性，那么它也具有自反性. 他的推论方法是：因为 R 具有对称性，即 $aRb\Rightarrow bRa$，又因为 R 具有传递性，所以 $aRb,bRa\Rightarrow aRa$. 这个推论方法有什么错误？

答 这个推论方法是错误的. 因为从上述推导过程要得到 aRa，前提是 aRb 存在，但具有对称性与传递性的关系，并不一定有此存在. 比如，$A=\{1,2\}$，$R=\{(1,1)\}$，R 具有对称性和传递性，但推不出自反性.

三、 等价类

178. 什么叫做集合的分类?

答 设 A 是一个非空集合,如果 A 分成若干个两两无公共元素的非空子集合之并,则称它是 A 的一个分类.即存在 A 的一个子集族 $\{A_i \neq \varnothing \mid i \in I\}$ (I 是指标集)满足

(i) $A = \bigcup_{i \in I} A_i$;

(ii) 当 $i \neq j$ 时, $A_i \cap A_j = \varnothing$,

则称 $\{A_i \mid i \in I\}$ 是 A 的一个分类.

179. 什么叫等价类?

答 设 A 有一个等价关系$\sim$. $\forall a \in A$,令

$$\bar{a} = \{x \mid x \in A, x \sim a\},$$

则称 $\bar{a}$ 是 a 的等价类, a 的等价类也可记为$[a]$.

180. 设 $A = \{1,2,3,4\}$, A 的一个等价关系为

$$\sim = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,1)\},$$

求 A 的所有不同的等价类.

解 由$\sim$可知: $1 \sim 1$, $1 \sim 2$. 故有三个不同等价类

$$\bar{1} = \{1,2\}, \bar{3} = \{3\}, \bar{4} = \{4\}.$$

181. 设 $A = \{1,2,3,4,5\}$,规定

$$a \sim b \Longleftrightarrow 2 \mid (a-b).$$

1) 证明: $\sim$是 A 的一个等价关系;

2) 求出 A 的所有不同的等价类.

解 1) 因为$\forall a \in A$, $2 \mid (a-a)$,即 $a \sim a$, $\sim$具有自反性.

$\forall a,b \in A$, $a \sim b \Rightarrow 2 \mid (a-b) \Rightarrow 2 \mid (b-a) \Rightarrow b \sim a$.

即$\sim$具有对称性.

$\forall a,b,c \in A$, $a \sim b$, $b \sim c \Rightarrow 2 \mid (a-b)$, $2 \mid (b-c) \Rightarrow 2 \mid (a-c) \Rightarrow a \sim c$. 即$\sim$具有传递性.

综上得知$\sim$是等价关系.

2) $\bar{1}=\{1,3,5\}$, $\bar{2}=\{2,4\}$为 A 的两个等价类．

182.　设～是集合 A 的一个等价关系，$\forall\, a,b,c\in A$，那么

1) $a\in\bar{a}$；

2) 若 $b,c\in\bar{a}$，则 $b\sim c$；

3) $\bar{a}=\bar{b}\Longleftrightarrow a\sim b$；

4) $\forall\, x,y\in A$ 则 $\bar{x}=\bar{y}$ 和 $\bar{x}\cap\bar{y}=\varnothing$ 有且仅有一成立．

证　1) 因为～是等价关系，$\forall\, a\in A$，都有 $a\sim a$，所以 $a\in\bar{a}$.

2) $b,c\in\bar{a}\Rightarrow b\sim a, c\sim a$，由对称性与传递性可得 $b\sim c$.

3) 设 $\bar{a}=\bar{b}$，则 $a\in\bar{a}=\bar{b}\Rightarrow a\sim b$.

反之，设 $a\sim b$，$\forall\, x\in\bar{a}$，$x\sim a, a\sim b\Rightarrow x\sim b\Rightarrow x\in\bar{b}$，此即 $\bar{a}\subseteq\bar{b}$. 类似地可证 $\bar{b}\subseteq\bar{a}$. 这样 $\bar{a}=\bar{b}$.

4) 若 $\bar{x}\cap\bar{y}\neq\varnothing$，则存在 $c\in\bar{x}\cap\bar{y}\Rightarrow c\in\bar{x}$，且 $c\in\bar{y}\Rightarrow c\sim x, c\sim y\Rightarrow x\sim y\Rightarrow\bar{x}=\bar{y}$.

183.　集合 A 的一个等价关系，可以确定 A 的一个分类．反之，集合 A 的一个分类，可以确定 A 的一个等价关系．

这里只用例子来说明．

设 $A=\{1,2,3,4,5\}$，令 $A_1=\{1,2\}$, $A_2=\{3\}$, $A_3=\{4,5\}$，则 A 分成三类，它所确定的等价关系为

$$\sim=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,2),(2,1),(4,5),(5,4)\},$$

再设 A 的等价关系为

$$R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(2,3),(3,2),(4,5),(5,4)\},$$

则这个等价关系所确定的等价类为

$$B_1=\{1,2,3\}=\bar{1}, B_2=\{4,5\}=\bar{4}.$$

注　从上述例子可见，由 A 的一个分类作相应的等价关系时，只要规定属于同一类的元素彼此等价即可．反之，给一个等价

关系，只要把它的所有等价类求出来，就得到了此集合的一个分类．

四、 剩余类

184. 设 n 为自然数，Z 是整数集，规定

$$a\sim b\Longleftrightarrow n\mid(a-b),\forall\ a,b\in Z.$$

1）证明：$\sim$ 是 Z 的一个等价关系；

2）Z 共有多少个不同的等价类？

证 1）仿第 **181** 条可证．

2）$\bar{1}=\{\cdots,-2n+1,-n+1,1,n+1,2n+1,\cdots\}$，

$\bar{2}=\{\cdots,-2n+2,-n+2,2,n+2,2n+2,\cdots\}$，

…………………………………

$\overline{n-1}=\{\cdots,-n+(n-1),n-1,n+(n-1),\cdots\}$，

$\bar{0}=\{\cdots,-2n,-n,0,n,2n,\cdots\}$．

共得出 n 个不同等价类．

由于任意整数 $m\in Z$，都有 $m=nq+r$，其中 $0\leqslant r<n$，因此任何整数属于且仅属于 $\bar{0},\bar{1},\cdots,\cdots,\overline{n-1}$ 之一．

185. 什么叫模 n 的剩余类？

答 设 n 是给定的整数，若 $a,b\in Z$，且 $n\mid(a-b)$，则称 a,b 关于模 n 同余．记为 $a\equiv b(\mathrm{mod}n)$，简记为 $a\equiv b(n)$．因此第 **184** 条的等价关系可改写为

$$a\sim b\Longleftrightarrow a\equiv b(\mathrm{mod}n).$$

从第 **184** 条知，给定 n 后，将 Z 分成 n 个等价类：$\bar{0},\bar{1},\cdots,\overline{n-1}$，其中每一个等价类都称为模 n 的剩余类．

五、 矩阵的初等变换与初等矩阵

186. 什么叫做矩阵的初等变换？

答 下面三种变换的每一种都叫做对矩阵作了一次初等变换：

1）交换矩阵两行（或列）；

2）用一个非零数乘矩阵的某一行（或列）；

3）用一个数乘矩阵某一行（或列）加到另一行（或列）上去．

注 对矩阵的行作若干次上述初等变换，称为对矩阵作了行初等变换．对列也有类似地说法．如果对某一矩阵既作了行初等变换，又作了列初等变换，就笼统地说成对矩阵作了初等变换．

187. 什么叫做初等矩阵？

答 由单位矩阵经过一次初等变换得到的矩阵，称为初等矩阵．具体地说有下面的三种：

1）互换单位矩阵第 i 行与第 j 行而得到的初等矩阵，记为 $P(i,j)$；

2）用非零数 c 乘单位矩阵的第 i 行而得到的初等矩阵记为 $P(i(c))$；

3）把单位矩阵的第 j 行的 k 倍加到第 i 行而得到的初等矩阵记为 $P(i,j(k))$．

注 对一个 $s\times n$ 矩阵 A 作一次行初等变换就相当于在 A 的左边乘相应的一个 $s\times s$ 初等矩阵；作一次列初等变换相当于在 A 的右边乘相应的 $n\times n$ 初等矩阵．

188. 初等矩阵是否可逆？如果可逆，请求出它的逆矩阵．

解 $|P(i,j)|=-1$，$P(i,j)$ 可逆，$P(i,j)^{-1}=P(i,j)$．

$|P(i(c))|=c\neq 0$，$P(i(c))$ 可逆，$P(i(c))^{-1}=P(i(\frac{1}{c}))$．

$|P(i,j(k))|=1$，$P(i,j(k))$ 可逆，

$P(i,j(k))^{-1}=P(i,j(-k))$．

189. 矩阵的三种初等变换是不是独立的？

答 不是．因为

$$P(i,j)=P(j,i(-1))\cdot P(i,j(1))\cdot P(j,i(-1))\cdot P(i(-1)).\tag{1}$$

(1)式说明，交换 i 行与 j 行这一初等变换，可以用四个另外的两类初等变换所取代．换句话说，三种行(或列)初等变换中，独立的只有两个，即用 $P(i(c))$左乘(或右乘)或用 $P(i,j(k))$左乘(或右乘)某一矩阵．

六、 矩阵的第一种等价关系——等价

190. 什么叫矩阵的等价？

答 设 A,B 都是数域 P 上的 $n\times m$ 矩阵，如果由 A 经过若干个初等变换得到 B，则称 A 与 B 等价，记为 $A\simeq B$.

191. 等价是不是矩阵间的一个等价关系？

答 设 M 是一切 $n\times m$ 矩阵的集合，规定：

$$ARB\Longleftrightarrow A\simeq B,\forall\ A,B\in M.$$

可以证明 R 是 M 的一个等价关系．

192. 设 A 是 $n\times m$ 矩阵，秩 $A=r$，则

$$A\simeq\begin{bmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

193. 设 A 为 $n\times n$ 矩阵，则 A 可逆$\Longleftrightarrow A$ 可表为有限个初等矩阵之积．

194. 设 A,B 都是 $s\times n$ 矩阵，则 $A\simeq B\Longleftrightarrow$存在 s 阶可逆矩阵 P 与 n 阶可逆矩阵 Q，使

$$A=PBQ.$$

195. 设 A,B 都是 $s\times n$ 矩阵，则 $A\simeq B\Longleftrightarrow$秩 $A=$秩 B.

证 必要性 设 $A\simeq B$，则 $A=PBQ$，其中 P,Q 均为可逆矩阵，所以秩 $A=$秩 B.

充分性 设秩 $A=$秩 $B=r$，由第 **192** 条知

$$A\simeq\begin{bmatrix}E_r & 0\\0 & 0\end{bmatrix},B\simeq\begin{bmatrix}E_r & 0\\0 & 0\end{bmatrix},$$

再由对称性与传递性得 $A\simeq B$.

196. 设 M 为一切 $n\times n$ 矩阵所成的集合,则

$$M=M_0\cup M_1\cup\cdots\cup M_n,$$

其中 M_k 为一切秩为 k 的 $n\times n$ 矩阵所成的集合 $(k=0,1,\cdots,n)$.

证 由于矩阵的等价是 M 的一个等价关系,由此得到 M 的不同等价类. 由第 **195** 条知,相同秩的矩阵在同一等价类中,而 $n\times n$矩阵的秩只有 $n+1$ 种可能:$0,1,\cdots,n$.

注 ① M_0 只含一个零矩阵 0. M_n 为一切可逆矩阵所成的集合,特别地,$E_n\in M_n$. 一般地有:

$$M_r=\left\{\begin{bmatrix}E_r & 0\\0 & 0\end{bmatrix},\cdots\right\},r=0,1,\cdots,n.$$

② 若 M 是一切 $n\times m$ 矩阵所成的集合,则

$$M=M_0\cup M_1\cup\cdots\cup M_k,$$

其中 $k=\min\{n,m\}$,M_i 为秩等于 i 的一切 $n\times m$ 矩阵所成的集合.

197. 什么叫做矩阵的标准形?

答 设 A 是 $n\times m$ 矩阵,秩 $A=r$,$A\simeq\begin{bmatrix}E_r & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$,则称 $\begin{bmatrix}E_r & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$为 A 的标准形.

注 ① 由于后面还要介绍对称矩阵的合同标准形,方阵的相似标准形,因此,这里应该称为在等价意义下的标准形.

② 矩阵等价意义下的标准形是唯一的.

③ 可逆矩阵的标准形为单位矩阵,或者说可逆矩阵可以经过一系列初等变换化为单位矩阵.

198. 只用行(或列)初等变换能否求出矩阵的秩?能否解线性方程组?

答 只用行(或列)初等变换可以求出矩阵的秩．只用行初等变换可以解线性方程组．但如果用列初等变换，一般不能得到同解线性方程组．

199. 设 $m\times n$ 矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 经过行初等变换化为矩阵 $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$. 证明：如果

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots k_n\alpha_n=0, \tag{1}$$

那么

$$k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots k_n\beta_n=0. \tag{2}$$

反之亦然．

证 由假设知，存在 $m\times m$ 可逆矩阵 P 使 $B=PA$，从而有 $\beta_i=P\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$.

先证(1)⇒(2). 由(1)成立，则

$$\begin{aligned}0&=P(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n)\\&=k_1P\alpha_1+k_2P\alpha_2+\cdots+k_nP\alpha_n\\&=k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots k_n\beta_n.\end{aligned}$$

再证(2)⇒(1). 由于

$$\begin{aligned}0&=k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_n\beta_n\\&=k_1P\alpha_1+k_2P\alpha_2+\cdots+k_nP\alpha_n\\&=P(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n),\end{aligned}$$

用 P^{-1}左乘上式，即得(1).

注 对矩阵施以行初等变换，不改变列向量的线性关系．

200. 对一个已知线性方程组作若干次行初等变换，得到一个与原方程组同解的线性方程组．

证 设线性方程组为 $AX=B$，其中 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $m\times 1$ 矩阵，令增广矩阵为 $\overline{A}=(A,B)$，由于若干次行初等变换相当于左乘一个 $m\times m$ 可逆矩阵 P，因此新方程组为$(PA)X=PB$，于是

$$X_0 \text{ 是 } AX=B \text{ 的解} \Longleftrightarrow AX_0=B \Longleftrightarrow (PA)X_0=PB.$$

201.　设 A 是 $n\times n$ 矩阵，秩 $A=r$，证明：存在 n 阶可逆矩阵 P 使 PAP^{-1} 的后 $n-r$ 行全为 0.

证　由第 **192** 条知，存在 n 阶可逆矩阵 P 和 Q，使 $PAQ=\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，那么 $PAP^{-1}=\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}T$，其中 $T=Q^{-1}P^{-1}$ 为可逆矩阵. 右乘 T 相当于对 $\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 作列变换，因此后 $n-r$ 行仍全为零.

202.　1）把矩阵 $\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix}$ 表成形如 $\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}1 & 0\\ x & 1\end{pmatrix}$ 的矩阵之积；

2）设 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ 为一复矩阵，$|A|=1$，证明 A 可以表成形如 $\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}1 & 0\\ x & 1\end{pmatrix}$ 的矩阵之积.

证　1）因为 $a\neq 0$，用第三种初等变换将 $\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix}$ 可变为 $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，即

$$\begin{pmatrix}1 & 1-a\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ a^{-1} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1-a^{-1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix},$$

所以

$$\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -a^{-1} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a-1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a^{-1}-1\\ 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{1}$$

2）当 $a\neq 0$ 时，可证

$$\begin{pmatrix}1 & -ab\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -a^{-1}c & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix}, \tag{2}$$

从而由(1)，(2)两式得

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ a^{-1}c & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & ab\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -a^{-1} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a-1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a^{-1}-1\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

当 $a=0$ 时，则 $1=|A|=ad-bc=-bc$，所以 $c\neq 0$. 因为

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & b\\c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c & b+d\\c & d\end{bmatrix},$$

所以
$$\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c & b+d\\c & d\end{bmatrix}.$$

由 $a\neq 0$ 的情形知，$\begin{bmatrix}c & b+d\\c & d\end{bmatrix}$ 可表为若干个 $\begin{bmatrix}1 & x\\0 & 1\end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix}1 & 0\\x & 1\end{bmatrix}$ 的矩阵之积，从而 $\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$ 能表成若干个形如 $\begin{bmatrix}1 & x\\0 & 1\end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix}1 & 0\\x & 1\end{bmatrix}$ 的矩阵之积.

203. 设 A 是 $n\times n$ 矩阵，$|A|=1$，证明：A 一定可以表成 $P(i,j(k))$ 这一种初等矩阵之积.

证 设 $A=(a_{ij})$，对 n 用数学归纳法. 第 **202** 条知当 $n=2$ 时结论成立. 归纳假定结论对 $n-1$ 成立，再证结论对 n 成立. 不失一般性，假设 $a_{11}\neq 0$（因为由 $|A|\neq 0$，可用第三种初等变换把 A 的某个不为 0 的元变到(1,1)这个位置)，则

$$P(2,1(a_{11}^{-1}(1-a_{21})))A=\begin{bmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\1 & \cdots & a'_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix},$$

$$P(2,1(a_{11}^{-1}(1-a_{21})))AP(1,2(1-a_{11}))=\begin{bmatrix}1 & \cdots & a'_{1n}\\1 & \cdots & a'_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}\quad(1)$$

将(1)式右端经过若干次第三种变换 $P(i,1(k))$，可化为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = B, \text{即 } R_1\cdots R_m A T_1 \cdots T_t = B. \tag{2}$$

其中 $R_1, \cdots, R_m, T_1, \cdots T_t$ 都是第三种初等矩阵.

由于 $|A|=|B|=|B_1|=1$，B_1 为 $(n-1)$ 阶方阵，由归纳假设，B_1 可以表成第三种初等矩阵（$n-1$ 阶）之积，即 $B_1=P_1\cdots P_s$. 令

$$Q_i=\begin{pmatrix} 1 & \\ & P_i \end{pmatrix}, i=1,2,\cdots,s,$$

则 Q_i 仍为第三种初等矩阵，且

$$B=\begin{pmatrix} 1 & \\ & P_1 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} 1 & \\ & P_s \end{pmatrix}=Q_1\cdots Q_s. \tag{3}$$

由(2)、(3)得

$$A=R_m^{-1}\cdots R_1^{-1}Q_1\cdots Q_s T_t^{-1}T_{t-1}^{-1}\cdots T_1^{-1}. \tag{4}$$

(4)式右端的每个矩阵都是第三种初等矩阵.

204. 矩阵的列(行)向量组如果是线性无关的，就称该矩阵为列(行)满秩的. 设 A 是 $m\times r$ 矩阵，则

1) A 是列满秩 $\Longleftrightarrow$ 存在 $m\times m$ 可逆矩阵 P 使 $A=P\begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix}$；

2) A 是行满秩 $\Longleftrightarrow$ 存在 $r\times r$ 可逆矩阵 Q 使 $A=(E_r\ 0)Q$.

证 1) 充分性是显然的，下证必要性. 设秩 $A=r$，则可通过行初等变换，使 A 变为前 r 行线性无关的 B，即存在 $m\times m$ 可逆矩阵 P_1 使 $P_1A=B=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$，其中 B_1 为 $r\times r$ 可逆矩阵. 令 $P_2=\begin{pmatrix} B_1^{-1} & 0 \\ 0 & E_{m-r} \end{pmatrix}$，则

$$P_2P_1A=P_2\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_r \\ B_2 \end{pmatrix},$$

再令

$$P_3=\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ -B_2 & E_{m-r} \end{bmatrix}, P_4=P_3P_2P_1, \text{则 } P_4A=\begin{bmatrix} E_r \\ 0 \end{bmatrix}.$$

令 $P=P_4^{-1}$，于是 $A=P\begin{bmatrix} E_r \\ 0 \end{bmatrix}$.

类似地可证明 2).

七、　分块矩阵的初等变换

205.　什么叫广义初等矩阵?

答　下面 5 种类型的矩阵统称为广义初等矩阵:

$$\begin{bmatrix} 0 & E_n \\ E_m & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & E_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} E_m & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} E_m & C \\ 0 & E_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} E_m & 0 \\ D & E_n \end{bmatrix},$$

其中 A 是 $m\times m$ 可逆矩阵，B 是 $n\times n$ 可逆矩阵，C 是 $m\times n$ 矩阵，D 是 $n\times m$ 矩阵.

注　① 广义初等矩阵与初等矩阵的作用是类似的. 左乘广义初等矩阵之一，相当于作一次行变换，右乘一次相当于作一次列变换. 这样的行、列变换称为分块矩阵的初等变换.

② 广义初等矩阵都是可逆矩阵，且

$$\begin{bmatrix} 0 & E_n \\ E_m & 0 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & E_m \\ E_n & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & E_n \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & E_n \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} E_m & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} E_m & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} E_m & C \\ 0 & E_n \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} E_m & -C \\ 0 & E_n \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} E_m & 0 \\ D & E_n \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} E_m & 0 \\ -D & E_n \end{bmatrix}.$$

206.　用两种方法求

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

的逆矩阵. 1) 用初等变换;2) 利用分块矩阵的初等变换.

解　1) 略.

2) 令 $B=\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}$,则 $A=\begin{bmatrix}B&B\\B&-B\end{bmatrix}$,故

$$\begin{bmatrix}B&B&E&0\\B&-B&0&E\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}B&B&E&0\\0&-2B&-E&E\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}B&0&\frac{1}{2}E&\frac{1}{2}E\\0&-2B&-E&E\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}E&0&\frac{1}{2}B^{-1}&\frac{1}{2}B^{-1}\\0&E&\frac{1}{2}B^{-1}&-\frac{1}{2}B^{-1}\end{bmatrix}.$$

但 $B^{-1}=\frac{1}{2}B$,所以

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}B^{-1}&B^{-1}\\B^{-1}&-B^{-1}\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}B&B\\B&-B\end{bmatrix}=\frac{1}{4}A.$$

207.　设 A,B 分别是 $n\times m$ 和 $m\times n$ 矩阵,证明:

$$|E_n-AB|=|E_m-BA|.$$

证　因为

$$\begin{bmatrix}E_m&0\\-A&E_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_m&B\\A&E_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E_m&B\\0&E_n-AB\end{bmatrix},\qquad(1)$$

$$\begin{bmatrix}E_m&B\\A&E_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_m&0\\-A&E_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E_m-BA&B\\0&E\end{bmatrix}.\qquad(2)$$

对(1)、(2)两式两边取行列式即得欲证的等式.

208.　设 A,B 分别是 $n\times m$ 和 $m\times n$ 矩阵,$\lambda\neq0$,则

$$|\lambda E_n-AB|=\lambda^{n-m}|\lambda E_m-BA|.\qquad(1)$$

证　当 $m=n$ 时,由于

$$\begin{bmatrix}0&E\\E&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E&B\\A&\lambda E\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&E\\E&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda E&A\\B&E\end{bmatrix},$$

两边取行列式,即有 $|\lambda E_n-AB|=|\lambda E_n-BA|$,即(1)式成立.

当 $m<n$ 时,令 $B_1=\begin{bmatrix}B\\0\end{bmatrix}_{n\times n}$,$A_1=(A,0)_{n\times n}$,则由上面的证明

知

$$|\lambda E_n - A_1B_1| = |\lambda E_n - B_1A_1|. \tag{2}$$

但是

$$A_1B_1 = (A,0)\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} = AB, \tag{3}$$

$$B_1A_1 = \begin{bmatrix} BA & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{4}$$

则

$$|\lambda E_n - A_1B_1| = |\lambda E_n - AB|, \tag{5}$$

$$|\lambda E - B_1A_1| = \begin{vmatrix} \lambda E_m - BA & 0 \\ 0 & \lambda E_{n-m} \end{vmatrix} = \lambda^{n-m}|\lambda E_m - BA|. \tag{6}$$

将(5)、(6)代入(2)，即得(1).

注 ① 公式(1)称为 Sylvester 公式.

② 这公式说明 AB 与 BA 具有相同的非零特征值.

八、 矩阵的第二种等价关系——合同

209. 什么叫做矩阵的合同?

答 设 A,B 都是数域 P 上的 $n\times n$ 矩阵. 若存在 P 上的 $n\times n$ 可逆矩阵 T 使 $B=T'AT$，则称 A 在 P 上合同于 B，记为 $A\equiv B$.

210. 设 M 是由一切 n 阶方阵全体构成的集合，则合同是 M 的一个等价关系.

证 $\forall A\in M$，因为 $A=E'AE$，所以 $A\equiv A$，即合同具有自反性.

$\forall A,B\in M$，若 $A\equiv B$，则存在可逆阵 T，有 $B=T'AT$. 所以 $A=(T^{-1})'BT^{-1}$，即 $B\equiv A$，即合同具有对称性.

$\forall A,B,C\in M$，若 $A\equiv B,B\equiv C$，则存在可逆阵 T 和 S，有 $B=T'AT,C=S'BS$. 从而 $C=(TS)'A(TS)$，所以 $A\equiv C$，即合同具有

传递性.

故合同是一个等价关系.

九、 矩阵的第三种等价关系——相似

211. 什么叫矩阵的相似?

答 设 A,B 都是数域 P 上的 $n\times n$ 矩阵. 若存在 P 上的 $n\times n$ 可逆矩阵 T,使 $B=T^{-1}AT$,则称 A 与 B 相似,记为 $A\sim B$.

212. 矩阵的相似是不是一种等价关系?

答 设 M 为数域 P 上一切 $n\times n$ 矩阵所成集合,仿第 **210** 条可证"$\sim$"是 M 的一种等价关系.

213. 矩阵的三种等价关系:等价、合同、相似之间有什么关系?

答 因为两矩阵等价$\Longleftrightarrow$具有相同的秩,因此合同一定等价,相似也一定等价. 反之不然.

合同与相似一般说来两者之间没有什么关系,即合同可以不相似,相似也可以不合同.

214. 设 A 是 n 阶矩阵,证明 $A\sim A'$.

证 存在可逆 λ—矩阵 $P(\lambda)$和 $Q(\lambda)$使

$$P(\lambda)(\lambda E-A)Q(\lambda)=\begin{bmatrix} d_1(\lambda) & & & \\ & d_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n(\lambda)\end{bmatrix}, \quad (1)$$

其中 $d_1(\lambda),d_2(\lambda),\cdots,d_n(\lambda)$为 A 的不变因子. 对(1)式两边取转置,则

$$Q'(\lambda)(\lambda I-A')P'(\lambda)=\begin{bmatrix} d_1(\lambda) & & & \\ & d_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n(\lambda)\end{bmatrix}, \quad (2)$$

(1)、(2)两式说明 A 与 A' 有相同的不变因子，所以 $A\sim A'$.

215. 设数域 P 上有 $A\sim B$，则$\forall f(x)\in P(x)$，有

$$f(A)\sim f(B).$$

证 设 $f(x)=a_mx^m+\cdots a_1x+a_0$，因为 $B=T^{-1}AT$，

$$\therefore B^k=T^{-1}A^kT, k=1,2,\cdots,m.$$

于是
$$\begin{aligned} f(B)&=a_mB^m+\cdots+a_1B+a_0E\\ &=a_mT^{-1}A^mT+\cdots+a_1T^{-1}AT+a_0T^{-1}ET\\ &=T^{-1}(a_mA^m+\cdots+a_1A+a_0E)T\\ &=T^{-1}f(A)T, \end{aligned}$$

即 $f(A)\sim f(B)$.

216. 如果 A,B 都是 n 阶方阵，且 A 可逆，证明 $AB\sim BA$.

证 因为 $AB=A(BA)A^{-1}$，所以 $AB\sim BA$.

217. 设 $A\sim B,C\sim D$，证明$\begin{bmatrix}A&0\\0&C\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}B&0\\0&D\end{bmatrix}$.

证 设 A,C 分别为 $n\times n$ 和 $m\times m$ 矩阵，由假设，存在可逆矩阵 T、S，有 $B=T^{-1}AT,D=S^{-1}CS$. 令 $P=\begin{bmatrix}T&\\&S\end{bmatrix}$，则 P 可逆，且

$$P^{-1}\begin{bmatrix}A&0\\0&C\end{bmatrix}P=\begin{bmatrix}T^{-1}&\\&S^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A&\\&C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}T&\\&S\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B&0\\0&D\end{bmatrix}.$$

第四章　矩阵的秩

一、　定义

218.　什么叫做向量组的秩?

答　设 $P^n=\{(a_1,\cdots,a_n)|a_i\in P\}$ 为 n 维向量空间，$\alpha_1,\cdots,\alpha_m\in P^n$，$\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r}$ 为向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 的一个极大线性无关组，则称 r 为向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 的秩，并记为秩$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}=r$.

如果 $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_m=0$，那么称秩$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}=0$.

注　在一般线性空间中，可类似定义向量组的秩.

219.　什么叫做矩阵的秩?

答　设 $A=(a_{ij})_{s\times n}$，$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 是 A 的行向量，$\beta_1,\cdots,\beta_n$ 为 A 的列向量，矩阵 A 的秩可以有三种定义方法：

1）秩 $A=$秩$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s\}$；

2）秩 $A=$秩$\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$；

3）若 A 中存在一个 k 阶子式不等于 0，而一切 $k+1$ 阶子式都等于 0，则称 k 为 A 的秩，并记为秩 $A=k$；特别地，当 $A=0$ 时，规定秩 $A=0$.

220.　矩阵的行秩等于矩阵的列秩.

221.　矩阵 A 的行秩等于 $r\Longleftrightarrow A$ 中有一个 r 阶子式不等于 0，而一切 $r+1$ 阶子式都等于 0.

注　① 由第 **220**、**221** 条可知第 **219** 条中矩阵秩的三种定义是等价的.

② 设 A 是 $s\times n$ 矩阵，则秩 $A\leqslant\min\{s,n\}$.

222. 设 A 为 $s\times n$ 矩阵，P 为 s 阶可逆矩阵，Q 为 n 阶可逆矩阵，则

$$\text{秩}\ A=\text{秩}(PA)=\text{秩}(AQ)=\text{秩}(PAQ). \tag{1}$$

注 (1)式说明初等变换不改变矩阵的秩.

223. 设 A 为 n 阶方阵,则 A 可逆$\Longleftrightarrow$秩 $A=n$.

二、 求法

224. 求矩阵

$$A=\begin{bmatrix}2 & -4 & 3 & -3 & 5\\ 1 & -2 & 1 & 5 & 3\\ 1 & -2 & 4 & -34 & 0\end{bmatrix}$$

的秩.

解 因为

$$A\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & 5 & 3\\ 1 & -2 & 4 & -34 & 0\\ 2 & -4 & 3 & -3 & 5\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & 5 & 3\\ 0 & 0 & 3 & -39 & -3\\ 0 & 0 & 1 & -13 & -1\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & 5 & 3\\ 0 & 0 & 1 & -13 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

所以秩 $A=2$.

225. 设 n 阶非零实方阵 $A=(a_{ij})$,且$|A|$的每一个元素 a_{ij} 都等于它的代数余子式 A_{ij},求秩 A.

解 不失一般性,设$(a_{i1},\cdots,a_{in})\neq 0$,则

$$|A|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$$

$$a_{i1}^2+a_{i2}^2+\cdots+a_{in}^2\neq 0.$$

所以秩 $A=n$.

226. 求矩阵

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 1 & 4\\ \lambda & 4 & 10 & 1\\ 1 & 7 & 17 & 3\\ 2 & 2 & 4 & 3\end{bmatrix}$$

的秩.

解　对矩阵 A 施行初等变换得

$$A \longrightarrow A_1=\begin{bmatrix}1 & 7 & 17 & 3\\ 0 & 4 & 10 & 1\\ 0 & 4-7\lambda & 10-17\lambda & 1-3\lambda\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

1) 当 $\lambda=0$ 时,显然秩 $A_1=2$,即秩 $A=2$;

2) 当 $\lambda\neq0$ 时,

$$A_1\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 7 & 17 & 3\\ 0 & 4 & 10 & 1\\ 0 & -7\lambda & -17\lambda & -3\lambda\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 10 & 1\\ 0 & 7 & 17 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

∴　秩 $A=3$.

227.　求下列矩阵的秩:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5\\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 & a_5^2\\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 & a_5^3\\ (a_1+1)^3 & (a_2+1)^3 & (a_3+1)^3 & (a_4+1)^3 & (a_5+1)^3\end{bmatrix},$$

其中当 $i\neq j$ 时,$a_i\neq a_j$,i、$j=1,2,3,4,5$.

解　矩阵 A 是一个 5 阶方阵,因其第 5 行是第 1,2,3,4 行的线性组合,故 $|A|=0$,即 5 阶子式等于零. 而

$$D_4=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4\\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2\\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3\end{vmatrix}\neq0,$$

即 A 中有不等于零的 4 阶子式,故秩 $A=4$.

228.　1) 设 A 是秩为 r 的 n 阶方阵,$A^2=mA$,其中 $m\neq0$,则

必存在可逆矩阵 T,使 $T^{-1}AT=\begin{bmatrix} mE_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$;

2) 设 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})$与 $B=\mathrm{diag}(n,0,\cdots,0)$,其中

$$a_{ij}=1(i、j=1,2,\cdots,n).$$

证明:必存在可逆阵 T,使 $T^{-1}AT=B$.

证 1) 由假设知 x^2-mx 为 A 的零化多项式,它无重根,且特征值为 m 或 0,又由秩$(A)=r$,从而存在可逆阵 T,使

$$T^{-1}AT=\begin{bmatrix} m & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & m & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} mE_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2) 由于秩$(A)=1$,$A^2=nA$,由上面 1),存在可逆阵 T,使

$$T^{-1}AT=\mathrm{diag}(n,0,\cdots,0)=B.$$

229. 设有一组互不相等的非零实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,且 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$,则矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{bmatrix}$$

的秩为 $n-1$.

证 由第 387 条知

$$|A|=\left[\sum_{k=1}^n x_k\right]\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)=0,$$

所以秩 $A\leqslant n-1$.

另一方面,因为 A 的 $n-1$ 阶顺序主子式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n-1}(x_i - x_j) \neq 0,$$

所以秩 $A \geqslant n-1$. 从而秩 $A=n-1$.

230. 求下列 $n\times n$ 矩阵 A 的秩，其中

$$A=\begin{bmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ a & 1 & a & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

解 1) 当 $a=1$ 时，显然秩 $A=1$.

2) $|A|=(1-a)^{n-1}[1+(n-1)a]$.

(*i*) 当 $a\neq 1$ 且 $1+(n-1)a\neq 0$ 时，$|A|\neq 0$. ∴秩 $A=n$.

(*ii*) 当 $a\neq 1$，而 $1+(n-1)a=0$ 时，$|A|=0$，但 A 的第 $n-1$ 阶顺序主子式

$$|A_{n-1}|=(1-a)^{n-2}[1+(n-2)a]\neq 0,$$

(否则 $1+(n+2)a=0$，$1+(n-1)a=0$，则 $a=0$. 矛盾.) ∴秩 $A=n-1$.

231. 设 $A=(a_{ij})$ 是 n 阶实方阵，且

$$a_{ii}>0, i=1,2,\cdots,n; \tag{1}$$

$$a_{ij}<0, i\neq j, i、j=1,2,\cdots,n; \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}=0, i=1,2,\cdots,n, \tag{3}$$

则秩 $A=n-1$.

证 把 A 的各列都加到第 1 列，由(3)式得第 1 列全为 0，于是 $|A|=0$.

考察 $|A|$ 中 a_{11} 的代数余子式

$$A_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

由(1)、(2)、(3)知 A_{11}是严格对角占优的，即有

$$a_{ii}>\sum_{\substack{j=2\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}|,i=2,3,\cdots,n,$$

故 $A_{11}\neq 0$，所以秩 $A=n-1$.

232. 求 $A=\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 2 & -3 & 2 \\ \lambda^2 & -3 & 2 & 1 & 1 \\ \lambda^3 & -1 & 2 & -1 & \mu \end{bmatrix}$的秩.

解 令$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & \mu \end{vmatrix}=0$，解得 $\mu=\frac{1}{2}$.

1) 当 $\mu\neq\frac{1}{2}$时，秩 $A=3$.

2) 当 $\mu=\frac{1}{2}$时，则

$$A=\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 2 & -3 & 2 \\ \lambda^2 & -3 & 2 & 1 & -1 \\ \lambda^3 & -1 & 2 & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 & \lambda \\ -3 & 2 & 1 & -1 & \lambda^2 \\ -2 & 4 & -2 & 1 & 2\lambda^3 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 & \lambda \\ 0 & 8 & -8 & 5 & \lambda^2+3\lambda \\ 0 & 8 & -8 & 5 & 2\lambda^3+2\lambda \end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 & \lambda \\ 0 & 8 & -8 & 5 & \lambda^2+3\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\lambda^3-\lambda^2-\lambda \end{bmatrix},$$

而 $2\lambda^3-\lambda^2-\lambda=\lambda(2\lambda+1)(\lambda-1)$，故

(i) 当 $\mu=\frac{1}{2}$且 $\lambda\overline{\in}\{0,1,-\frac{1}{2}\}$时，秩 $A=3$；

(ii) 当 $\mu=\frac{1}{2}$且 $\lambda\in\{0,1,-\frac{1}{2}\}$时，秩 $A=2$.

233. 设 $s\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})$的秩为 r，并设 A 的一个 r 阶子

式

$$\begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & \cdots & a_{i_1j_r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_rj_1} & \cdots & a_{i_rj_r} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{1}$$

令 $A=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_s\end{bmatrix}=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$，其中 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 为 A 的行向量，$\beta_1,\cdots,\beta_n$ 为 A 的列向量，则

1) $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r}$ 为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 的一个极大线性无关组；

2) $\beta_{j_1},\cdots,\beta_{j_r}$ 为 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 的一个极大线性无关组．

证　1) 令

$$\begin{cases}\gamma_{i_1}=(a_{i_1j_1},\cdots,a_{i_1j_r}),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \gamma_{i_r}=(a_{i_rj_1},\cdots,a_{i_rj_r}).\end{cases}$$

由(1)式知 $\gamma_{i_1},\cdots,\gamma_{i_r}$ 线性无关．从而延长为 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r}$ 后也线性无关．又秩$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s\}=r$，故 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r}$ 就是 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 的一个极大线性无关组．

2) 类似可证．

234.　设 A 为 n 阶反对称实矩阵，则秩$(E+A)=n$.

证　因为 A 的特征值只能是 0 或纯虚数，从而 -1 不是 A 的特征值，即

$$|(-1)E-A|\neq 0,\ |E+A|\neq 0,$$

$\therefore$　秩$(E+A)=n$.

三、　矩阵的运算及秩的变化

235.　秩 $A=$秩 $A'=$秩 $\overline{A}=$秩(kA)，其中 $k\neq 0$.

证　由秩的定义可证．

236. 1) 若 n 维向量组(Ⅰ)可由 n 维向量组(Ⅱ)线性表出，则秩(Ⅰ)≤秩(Ⅱ)；

2) 等价向量组具有相同的秩．

证 见 1425 条．

237. 秩$(A+B)\leqslant$秩 $A+$秩 B.

证 设 A,B 都是 $s\times n$ 矩阵，且

$$A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n),B=(\beta_1,\cdots,\beta_n),$$

其中 α_i 和 β_i 分别为 A 与 B 的列向量，那么

$$A+B=(\alpha_1+\beta_1,\cdots,\alpha_n+\beta_n).$$

设秩 $A=r$，秩 $B=t$，且 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r}$ 与 $\beta_{j_1},\cdots,\beta_{j_t}$ 分别为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 的极大线性无关组，那么 $\alpha_1+\beta_1,\cdots,\alpha_n+\beta_n$ 可由 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r},\beta_{j_1},\cdots,\beta_{j_t}$ 线性表出．由第 236 条知：

$$\begin{aligned}秩(A+B)&=秩\{\alpha_1+\beta_1,\cdots,\alpha_n+\beta_n\}\\&\leqslant秩\{\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r},\beta_{j_1},\cdots,\beta_{j_t}\}\leqslant r+t=秩 A+秩 B.\end{aligned}$$

注 ① 秩$(A-B)\leqslant$秩 $A+$秩$(-B)=$秩 $A+$秩 B.

② 秩$(kA+lB)\leqslant$秩 $A+$秩 B，其中 k,l 为任意常数．

238. 1) 秩$(AB)\leqslant\min\{$秩 A，秩 $B\}$；

2) 秩$(A_1A_2\cdots A_t)\leqslant\min\{$秩 A_1，秩 $A_2,\cdots$，秩 $A_t\}$.

239. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $n\times m$ 矩阵，$n<m$，则 $|AB|=0$.

证 设 AB 为 $m\times n$ 矩阵，则

$$秩(AB)\leqslant秩 A\leqslant\min\{m,n\}=n<m,$$

$\therefore\quad |AB|=0.$

240. 薛尔佛斯特(Sylvester)公式 设 A,B 分别为 $s\times n$ 与 $n\times m$ 矩阵，则

$$秩 A+秩 B-n\leqslant秩(AB).$$

证 $$\begin{pmatrix}E_n & 0\\ -A & E_s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_n & B\\ A & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_n & -B\\ 0 & E_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_n & 0\\ 0 & -AB\end{pmatrix}. \qquad (1)$$

由(1)知

$$秩\begin{bmatrix} E_n & B \\ A & 0 \end{bmatrix} = 秩 E_n + 秩(-AB) = n + 秩(AB). \tag{2}$$

但

$$秩\begin{bmatrix} E & B \\ A & 0 \end{bmatrix} = 秩\begin{bmatrix} B & E \\ 0 & A \end{bmatrix} \geqslant 秩 A + 秩 B, \tag{3}$$

由(2)、(3)式即得欲证之不等式.

注 由此可知

$$秩 A + 秩 B - n \leqslant 秩(AB) \leqslant \min\{秩 A, 秩 B\}.$$

241. 佛罗扁尼斯(Frobenius)不等式

$$秩(ABC) \geqslant 秩(AB) + 秩(BC) - 秩(B).$$

证 设 A,B,C 分别为 $s\times m, m\times n, n\times t$ 矩阵,且秩 $B=r$. 由满秩分解知 $B=B_1B_2$,其中 B_1,B_2 分别为 $m\times r$ 与 $r\times n$ 矩阵,且秩 $B_1=$ 秩 $B_2=r$. 故

$$秩(ABC) = 秩(AB_1B_2C) \geqslant 秩(AB_1) + 秩(B_2C) - r; \tag{1}$$

$$秩(AB) = 秩(AB_1B_2) \leqslant 秩(AB_1); \tag{2}$$

$$秩(BC) = 秩(B_1B_2C) \leqslant 秩(B_2C). \tag{3}$$

将(2)、(3)式代入(1),即可得出结论.

242. 设 Q 为 $k\times k$ 矩阵,m,n 为非负整数,则

1) $秩(Q^n) + 秩(Q^{m+2n}) \geqslant 秩(Q^{m+n}) + 秩(Q^{2n})$;

2) $秩(Q^m) + 秩(Q^{m+2n}) \geqslant 2\,秩(Q^{m+n})$.

证 1) 令 $A=Q^m, B=C=Q^n$,由第 **241** 条得

$$秩(Q^{m+2n}) \geqslant 秩(Q^{m+n}) + 秩(Q^{2n}) - 秩(Q^n).$$

2) 令 $A=Q^n, B=Q^m, C=Q^n$,由第 **241** 条即得 2).

243. 设秩$(A-E)=p$,秩$(B-E)=q$,则

$$秩(AB-E) \leqslant p+q.$$

证 1 因为 $AB-E=A(B-E)+A-E$,所以

$$秩(AB-E) \leqslant 秩(A(B-E)) + 秩(A-E)$$

$$\leqslant 秩(B-E)+秩(A-E)=p+q.$$

证 2　因 $AB-E=(A,E)\begin{bmatrix}B-E\\A-E\end{bmatrix}$，故

$$秩(AB-E)\leqslant 秩\begin{bmatrix}B-E\\A-E\end{bmatrix}\leqslant 秩(B-E)+秩(A-E)$$

$$=p+q.$$

244.　设 A 是秩为 r 的 $m\times n$ 矩阵，从 A 中任取 s 行作 $s\times n$ 子矩阵 B，则

$$秩 B\geqslant r+s-m.$$

证　A 中去掉一行向量，其秩最多减 1. 矩阵 B 可视为 A 去掉 $m-s$ 个行向量后所得的矩阵，因此 B 的秩至少是 $r-(m-s)=r+s-m$，即秩 $B\geqslant r+s-m$.

245.　设 A 为 $m\times n$ 矩阵，其秩为 s. C 为 A 中任意 r 行、t 列交点上的 $r\times t$ 个元素按原相应位置组成的子矩阵，则

$$秩 C\geqslant r+s+t-m-n.$$

证　C 看成是从 A 中任取 r 行(即删去 $m-r$ 行)所作成的 $r\times n$ 矩阵 B，由第 **244** 条知

$$秩 B\geqslant s-(m-r);$$

B 中再任取 t 列(即删去 B 的任意 $n-t$ 列)所成的 $r\times t$ 矩阵 C，也有

$$秩 C\geqslant 秩 B-(n-t)\geqslant s-(m-r)-(n-t)$$
$$=r+s+t-m-n.$$

246.　设 A 是 $m\times n$ 矩阵且秩 $A=r$；$P=(p_{ij})$ 是 $s\times m$ 矩阵，其中 $p_{11}=p_{22}=\cdots=p_{kk}=1$，其余元素等于零；$Q=(q_{ij})$ 是 $n\times t$ 矩阵，其中 $q_{11}=q_{22}=\cdots=q_{ll}=1$，其余元素等于零，则

1) 秩$(PA)\geqslant k+r-m$；

2) 秩$(AQ)\geqslant l+r-n$；

3) 秩$(PAQ)\geqslant k+l+r-m-n$.

证　令 B 为 A 的前 k 行构成的 $k\times n$ 子矩阵，C 为 A 的前 l 列构成的 $m\times l$ 子矩阵，D 为 A 的前 k 行和前 l 列交叉点处的元素仍按原来顺序构成的 $k\times l$ 子矩阵，则

1) $PA=\begin{bmatrix}B\\0\end{bmatrix}$. 因为秩 $A=r$，所以秩 $B\geqslant r-(m-k)$，从而有

$$\text{秩}(PA)=\text{秩}\,B\geqslant k+r-m.$$

2) $AQ=(C,0)$，因为秩 $A=r$，所以秩 $C\geqslant r-(n-l)$，从而有

$$\text{秩}(AQ)=\text{秩}\,C\geqslant l+r-n.$$

3) $PAQ=\begin{bmatrix}B\\0\end{bmatrix}Q=\begin{bmatrix}D&0\\0&0\end{bmatrix}$，其中 D 为 A 的左上方 $k\times l$ 子矩阵．因为秩 $A=r$，且 A 为 $m\times n$ 矩阵，所以秩$(D)\geqslant r-(m-k)-(n-l)$，故

$$\text{秩}(PAQ)=\text{秩}(D)\geqslant k+l+r-m-n.$$

247.　设 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 都是 n 阶方阵，且 $A_1A_2\cdots A_m=0$，则

$$\text{秩}\,A_1+\text{秩}\,A_2+\cdots+\text{秩}\,A_m\leqslant(m-1)n.$$

证　由第 **240** 条有

$$\begin{aligned}0&=\text{秩}(A_1A_2\cdots A_m)=\text{秩}[A_1(A_2\cdots A_m)]\\&\geqslant\text{秩}\,A_1+\text{秩}(A_2\cdots A_m)-n\\&\geqslant\text{秩}\,A_1+\text{秩}\,A_2+\text{秩}(A_3\cdots A_m)-2n\geqslant\cdots\\&\geqslant\text{秩}\,A_1+\text{秩}\,A_2+\cdots+\text{秩}\,A_m-(m-1)n.\end{aligned}$$

故

$$\text{秩}\,A_1+\text{秩}\,A_2+\cdots+\text{秩}\,A_m\leqslant(m-1)n.$$

248.　设矩阵 $A=(a_{ij})$ 为 $m\times n$ 矩阵，则 A 的秩为 0 或 1 的充分必要条件是存在 $m+n$ 个数 $c_1,c_2,\cdots,c_m,b_1,b_2,\cdots,b_n$，使得

$$a_{ij}=c_ib_j,i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n.$$

证　先证必要性．　设秩 $A=0$ 或 1．若 A 的秩为零，则 $a_{ij}=0,i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n$，于是只要取 c_i 与 b_j 全为零即知结论成立．

当秩 $A=1$ 时不妨设$(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n})\neq0$，且

$$(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})=c_i(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n}),i=1,2,\cdots,m,$$

则 $a_{ij}=c_ib_j$，其中 $b_j=a_{1j},i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n$.

再证充分性．设有数 $c_1,c_2,\cdots,c_m,b_1,b_2,\cdots,b_n$，

使得 $$a_{ij}=c_ib_j,i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n.$$

记 $$A_1=(c_1,c_2,\cdots,c_m),B_1=(b_1,b_2,\cdots,b_n),$$

则 $$A=(a_{ij})=A'_1B_1.$$

于是　秩 $A\leqslant\min$(秩 A_1，秩 B_1)$\leqslant 1$，即秩 $A=0$ 或 1.

249.　设齐次方程组 $AX=0$ 和 $BX=0$，其中 A,B 分别为 $s\times n$ 与 $m\times n$ 矩阵，那么

1) 若 $AX=0$ 的解都是 $BX=0$ 的解，则秩 $A\geqslant$ 秩 B；

2) 若 $AX=0$ 与 $BX=0$ 同解，则秩 $A=$ 秩 B；

3) 若 $AX=0$ 的解都是 $BX=0$ 的解，且秩 $A=$ 秩 B，则 $AX=0$ 与 $BX=0$ 同解．

证　设 W_1 与 W_2 分别为 $AX=0$ 与 $BX=0$ 的解空间，则

$$\dim W_1=n-\text{秩 }A,\qquad \dim W_2=n-\text{秩 }B. \tag{1}$$

1) 由假设知 $W_1\subseteq W_2$，则 $\dim W_1\leqslant\dim W_2$. 由(1)式可得

秩 $A\geqslant$ 秩 B.

2) 由于 $W_1=W_2$，则由(1)式即证秩 $A=$ 秩 B.

3) 由于 $W_1\subseteq W_2$，又由(1)式可知 $\dim W_1=\dim W_2$，从而 $W_1=W_2$，即证 $AX=0$ 与 $BX=0$ 同解．

注　当秩 $A=$ 秩 B 时，$AX=0$ 与 $BX=0$ 不一定同解．比如 $A=(0,1,0,\cdots,0)$，$B=(1,0,\cdots,0)$，秩 $A=$ 秩 $B=1$，但 $AX=0$ 的解空间为

$$W_1=\{(k_1,0,k_3,\cdots,k_n)'\mid k_i\in P\},$$

而 $BX=0$ 的解空间为

$$W_2=\{(0,k_2,\cdots,k_n)'\mid k_i\in P\},$$

显然 $W_1\neq W_2$.

250.　设 A 为 $n\times m$ 实矩阵，则

$$秩 A = 秩 A' = 秩(AA') = 秩(A'A). \quad (1)$$

若 A 是复矩阵呢?

证 由于秩 A=秩 A',因此只须证明秩 A=秩$(A'A)$,或者证明 $AX=0$ 与 $A'AX=0$ 同解即可. 事实上,$AX=0$ 的解显然是 $A'AX=0$ 的解. 反之,设 X_0 是 $A'AX=0$ 的解,则

$$0 = X'_0 A'AX_0 = (AX_0)'(AX_0). \quad (2)$$

由 A 是实矩阵得 $AX_0=0$,即 $A'AX=0$ 的解也是 $AX=0$ 的解. 由第 **249** 条得秩 A=秩$(A'A)$,从而得证(1)式.

当 A 为复矩阵时,(1)式不一定成立. 比如,取 $A=\begin{bmatrix}1 & i\\ i & -1\end{bmatrix}$,则 $A'A=0$,秩$(A'A)=0$,但秩 $A=1$.

注 当 A 是复矩阵时,有

$$秩 A = 秩 A' = 秩(A\overline{A}') = 秩(\overline{A}'A),$$

其中 $\overline{A}'$ 为 A' 的共轭矩阵.

251. 设 A, B 都是 n 阶方阵,则秩(AB)=秩 B 的充要条件是方程组 $ABX=0$ 的解必为方程组 $BX=0$ 的解,其中 $X'=(x_1,\cdots,x_n)$.

证 由第 **249** 条即知.

252. 设 A,B,C 都是 n 阶方阵,而且秩 A=秩(BA),证明:秩(A^2)=秩(BA^2).

证 由秩 A=秩(BA)及第 **249** 条知 $BAX=0$ 与 $AX=0$ 同解. 设 X_0 是 $BA^2X=0$ 的任一个解,即 $BA^2X_0=0$,则 AX_0 是方程 $BAX=0$ 的解,因而是 $AX=0$ 的解,即 $A^2X_0=0$,亦即 X_0 是 $A^2X=0$ 的解. 此即 $BA^2X=0$ 与 $A^2X=0$ 同解. 由第 **249** 条,秩(A^2)=秩(BA^2).

253. 设 A 是一个方阵,则

1) 存在正整数 k,使秩(A^k)=秩(A^{k+1});

2) 若秩(A^k)=秩(A^{k+1}),则秩(A^{k+1})=秩$(A^{k+2})=\cdots$. (1)

证 1) 考虑 $A, A^2, \cdots, A^m, \cdots$，有

$$秩 A \geqslant 秩(A^2) \geqslant \cdots \geqslant 秩(A^m) \geqslant \cdots, \tag{2}$$

(2)式不可能无限不等，故存在正整数 k，使

$$秩(A^k) = 秩(A^{k+1}).$$

2) 若 $A^{k+2}X_0 = 0$，则 $A^{k+1}(AX_0) = 0$.

因秩(A^k) = 秩(A^{k+1})，由第 **251** 条，$A^{k+1}X = 0$ 与 $A^kX = 0$ 同解，故 $A^k(AX_0) = 0$，即 X_0 是 $A^{k+1}X = 0$ 的解．这样 $A^{k+1}X = 0$ 与 $A^{k+2}X = 0$ 同解，即秩(A^{k+2}) = 秩(A^{k+1}).

同理可证其他，从而得证(1)式．

254. 设 A, B 为 $n \times n$ 矩阵，且 $AB = 0$，则

$$秩 A + 秩 B \leqslant n.$$

证 1 由第 **240** 条，$0 = 秩 AB \geqslant 秩 A + 秩 B - n$，由此得结论.

证 2 设 B 的列向量为 $B_1, B_2, \cdots, B_n$，则

$$AB = A(B_1, B_2, \cdots, B_n) = (AB_1, AB_2, \cdots, AB_n) = 0,$$

故 $AB_1 = AB_2 = \cdots = AB_n = 0$，即 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 都是方程组 $AX = 0$ 的解．若秩 $A = r$，那么方程组的基础解系含有 $n - r$ 个向量，因此秩 $B \leqslant n - r$. 所以

$$秩(A) + 秩(B) \leqslant r + (n - r) = n.$$

255. 设 A 为 $n \times n$ 矩阵，且 $A^2 = E$，则

$$秩(A+E) + 秩(A-E) = n.$$

证 秩$(A+E)$ + 秩$(A-E) \geqslant$ 秩$(A+E-A+E)$ = 秩$(2E) = n$. 因 $A^2 = E$，故 $(A+E)(A-E) = 0$，由第 **254** 条得

$$秩(A+E) + 秩(A-E) \leqslant n.$$

$$\therefore 秩(A+E) + 秩(A-E) = n.$$

256. 设 A, B 为 n 阶方阵，且 $ABA = B^{-1}$，则

$$秩(E+AB) + 秩(E-AB) = n.$$

证 $\because ABA = B^{-1}$，$\therefore (AB)^2 = E$. 由第 **255** 条，秩$(AB+E)$ + 秩$(AB-E) = n$. 又秩$(AB+E)$ = 秩$(E+AB)$，秩$(AB-E)$ =

秩$(E-AB)$,故秩$(E+AB)+$秩$(E-AB)=n$.

257. 设 A 是一个 $m\times n$ 矩阵,则存在非零的 $n\times s$ 矩阵 B,使得 $AB=0$ 的充要条件是秩$(A)<n$.

证 必要性.用反证法,若秩 $A=n$,则 $AX=0$ 只有零解,从而与必要性假设矛盾.

充分性.因为秩 $A<n$,所以齐次线性方程组 $AX=0$ 有非零解,不妨设 $X'_0=(x_1,\cdots,x_n)\neq 0$,令 $B=X'_0$,由此即得结论.

258. 设 $s\times n$ 矩阵 A 是列线性无关的,$n\times s$ 矩阵 B,C 都是 A 的左逆(即 $BA=E_n,CA=E_n$),则 $B-C$ 的秩不大于 $s-n$.

证 因为 B,C 皆为 A 的左逆,所以

$$BA=E=CA,(B-C)A=0.$$

这表明 A 的每一个列向量都是齐次方程组

$$(B-C)X=0$$

的解向量.由于 A 的 n 个列向量线性无关,若设

$$秩(B-C)=r,$$

则 $s-r\geqslant n$,即 $r\leqslant s-n$.

259. 设 $m\times n$ 矩阵 A 的秩为 r,且 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 不全为 0,若矩阵 B 满足

$$AB=\begin{bmatrix} b_1 & b_1 & \cdots & b_1 \\ b_2 & b_2 & \cdots & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_m & b_m & \cdots & b_m \end{bmatrix},$$

则秩 $B\leqslant n-r+1$.

证 因秩 $A=r$,故 $AX=b$ 的线性无关的解最多为 $n-r+1$ 个,其中 $b=(b_1,b_2,\cdots,b_m)'$.而 B 的任意列向量都是上述方程组的解向量,因而秩 $B\leqslant n-r+1$.

260. 设 A 是一个 3 阶方阵,且 $A^2=E,A\neq\pm E$,则 $A+E$ 与 $A-E$ 中有一个的秩为 1,另一个的秩为 2.

证 由 $A^2=E$ 知存在可逆矩阵 T，使

$$T^{-1}AT=\mathrm{diag}(a_1,a_2,a_3) \tag{1}$$

其中 $a_i=\pm1(i=1,2,3)$.

又因为 $A\neq\pm E$，故 $A\pm E\neq0$，从而 a_1,a_2,a_3 只有两种可能：a_1,a_2,a_3 分别为 $1,1,-1$ 或 $1,-1,-1$. 由(1)可知 $A+E$ 与 $A-E$ 中只能有一个的秩为 1，另一个的秩是 2.

261. 设 A 是 2 阶方阵，且 $A^2=E$，则 $A\neq\pm E$，则

$$秩(A+E)=秩(A-E)=1.$$

证 仿第 **260** 条可证.

262. 1) 设 A 是 n 阶对合矩阵(即 $A^2=E$)，则

$$秩(A+E)^m+秩(A-E)^k=n; \tag{1}$$

2) 设 A 是 n 阶幂等矩阵(即 $A^2=A$)，则

$$秩(A^m)+矩(A-E)^k=n, \tag{2}$$

其中 m,k 是任意自然数.

证 1),2)的证法类似，只证 1). 由 $A^2=E$ 知 A 可对角化. 由于 A 的特征值只能是±1，故存在逆矩阵 T，使

$$A=T^{-1}\mathrm{diag}(E_s,-E_{n-s})T,$$

$$(A+E)^m=T^{-1}\mathrm{diag}(2^mE_s,0)T, \tag{3}$$

$$(A-E)^k=T^{-1}\mathrm{diag}(0,(-2)^kE_{n-s})T, \tag{4}$$

由(3)、(4)式得

$$秩(A+E)^m=s,秩(A-E)^k=n-s,$$

所以 $秩(A+E)^m+秩(A-E)^k=s+n-s=n.$

263. 设数域 P 上 n 阶方阵 A,B 可换，证明：

$$秩(A+B)\leqslant 秩A+秩B-秩(AB).$$

证 设 W_1,W_2,W_3,W_4 分别是 $A,B,A+B,AB$ 的行空间，那么

$$\dim W_1=秩A,\dim W_2=秩B,$$

$$\dim W_3=秩(A+B),\dim W_4=秩(AB).$$

由于 $W_3 \subseteq W_1+W_2$，所以

$$\dim W_3 \leqslant \dim(W_1+W_2)=\dim W_1+\dim W_2-\dim(W_1 \cap W_2).$$

$$秩(A+B) \leqslant 秩 A+秩 B-\dim(W_1 \cap W_2) \qquad (1)$$

由于 AB 的行向量是 B 的行向量的线性组合，所以 $W_4 \subseteq W_2$，又 $AB=BA$，所以 $W_4 \subseteq W_1$ 故 $W_4 \subseteq W_1 \cap W_2$，

$$秩(AB) \leqslant \dim(W_1 \cap W_2) \qquad (2)$$

将(2)式代入(1)式即证．

264. 设 A,B,C 是三个 n 阶方阵，秩 $A=$ 秩(BA)，则

$$秩(AC)=秩(BAC).$$

证 因秩 $A=$ 秩(BA)，由第 **249** 条，齐次线性方程组

$$(BA)X=0 \text{ 与 } AX=0 \qquad (1)$$

同解．又方程组 $(AC)X=0$ 的解当然是方程组

$$(BAC)X=0 \qquad (2)$$

的解．反之，设 X_0 为(2)的任一解，令 $CX_0=C_1$，则由(2)有 $(BA)C_1=0$. 从而由(1)知，C_1 也是 $AX=0$ 的解，即(2)的解也是 $(AC)X=0$ 的解．故

$$(BAC)X=0 \text{ 与 } (AC)X=0$$

同解．由第 **249** 条，秩$(AC)=$ 秩(BAC).

265. 设 A,B,C 分别为 $m\times n, n\times s, s\times m$ 矩阵，秩$(CA)=$ 秩 A，则秩$(CAB)=$ 秩(AB).

证 类似于第 **264** 条可证．

266. 设 A,B,C 分别是 $m\times n, n\times s, s\times m$ 矩阵，秩$(BC)=$ 秩 B，则秩$(ABC)=$ 秩(AB).

证 因 秩$(ABC)=$ 秩$(ABC)'=$ 秩$(C'B'A')$，

秩$(AB)=$ 秩$(AB)'=$ 秩$(B'A')$，

所以只需要证明秩$(C'B'A')=$ 秩$(B'A')$. 由题设有：秩$(C'B')=$ 秩 B'. 于是由第 **265** 条知秩$(C'B'A')=$ 秩$(B'A')$，从而秩(ABC)

$=$秩(AB).

267.　1）列满秩矩阵左乘一矩阵，其秩不变；

2）行满秩矩阵右乘一矩阵，其秩不变．

证　1）设 A,B 分别为 $m\times n$ 与 $n\times s$ 矩阵，且秩 $A=n$，下证秩$(AB)=$秩 B.

因 $\overline{A}'A$ 为可逆矩阵，所以秩 $B=$秩$(\overline{A}'AB)\leqslant$秩$(AB)\leqslant$秩 B. 即秩$(AB)=$秩 B.

2）类似可证．

268.　设 P 是 m 阶方阵，Q 为 $n\times m$ 矩阵，且秩 $Q=m$，$Q=QP$，则 $P=E$.

证　两边左乘 $\overline{Q}'$ 得 $\overline{Q}'Q=\overline{Q}'QP$，而 $\overline{Q}'Q$ 可逆，故 $P=E$.

四、　分块矩阵的秩

269.　设 A,B 分别为 $s\times n$ 与 $s\times m$ 矩阵，则

$$\max\{\text{秩 }A,\text{秩 }B\}\leqslant\text{秩}(A,B)\leqslant\text{秩 }A+\text{秩 }B.$$

证　(A,B)为 $s\times(n+m)$矩阵，它比 A 多 m 列，

所以　秩 $A\leqslant$秩(A,B). 类似地，秩 $B\leqslant$秩(A,B)，从而

$$\max\{\text{秩 }A,\text{秩 }B\}\leqslant\text{秩}(A,B).$$

设 $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，$B=(\beta_1,\cdots,\beta_m)$，$(A,B)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\cdots,\beta_m)$，其中 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为 A 的列向量，$\beta_1,\cdots,\beta_m$ 为 B 的列向量．

设秩 $A=r$，秩 $B=t$，且 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r}$ 与 $\beta_{j_1},\cdots,\beta_{j_t}$ 分别为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 的一个极大线性无关组，那么向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\cdots,\beta_m$ 与 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r},\beta_{j_1},\cdots,\beta_{j_t}$ 等价，故

$$\begin{aligned}\text{秩}(A,B)&=\text{秩}\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\cdots,\beta_m\}=\text{秩}\{\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r},\beta_{j_1},\cdots,\beta_{j_t}\}\\&\leqslant r+t=\text{秩 }A+\text{秩 }B.\end{aligned}$$

270.　1）秩$(A,B)=$秩(B,A)；

2）秩$(A,B)=$秩$\begin{bmatrix}A'\\B'\end{bmatrix}$.

证 1) 因初等变换不改变矩阵的秩.

2) 秩(A,B)=秩$(A,B)'$=秩$\begin{bmatrix}A'\\B'\end{bmatrix}$.

271. 设 $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$为 $n\times m$ 复矩阵,其中 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 为 A 的列向量,记 $R(A)=\{Ax|x\in C^{m\times 1}\}$,则

1) $R(A)$为 $C^{n\times 1}$的子空间;

2) $\dim R(A)$=秩 A;

3) $N(A)=\{x|Ax=0\}$为 $C^{m\times 1}$的子空间,且

$$\dim N(A)=m-\text{秩 } A.$$

证 1) $$Ax=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)\begin{bmatrix}x_1\\\vdots\\x_m\end{bmatrix}=x_1\alpha_1+\cdots+x_m\alpha_m, \quad (1)$$

由(1)式知 $R(A)=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$为线性空间,且为 $C^{n\times 1}$的子空间.

2) $\dim R(A)=\dim L(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$=秩$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}$=秩 A.

3) ∵$N(A)$是 $Ax=0$ 的解空间,

$$\therefore \dim N(A)=m-\text{秩 } A.$$

272. 秩(AB)=秩 $B-\dim(N(A)\cap R(B))$, 其中 A 为 $n\times m$ 矩阵,B 为 $m\times s$ 矩阵,

$$N(A)=\{x|Ax=0\},R(B)=\{Bx|x\in C^{s\times 1}\}.$$

证 令 $D=N(A)\cap R(B)$,H 为 D 在 $R(B)$中的补子空间,即 $R(B)=H\oplus D$,则由第 **271** 条知

$$\text{秩 } B=\dim R(B)=\dim(H\oplus D)=\dim H+\dim D,$$

故 $\dim H$=秩 $B-\dim(N(A)\cap R(B))$. 下证 $\dim H$=秩(AB)即可.

取 H 的一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$,则 $H=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)$. 分三步证明.

1) 先证 $A\alpha_1,\cdots,A\alpha_r$ 线性无关. 设

$$0=k_1A\alpha_1+\cdots+k_rA\alpha_r=A(k_1\alpha_1+\cdots+k\alpha_r),$$

故　$k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r\in N(A)$，又 $k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r\in H\subseteq R(B)$，

从而　$k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r\in N(A)\cap R(B)=D$. 但 $H\cap D=\{0\}$，

故　$k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r=0$，而 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，故 $k_1=\cdots=k_r=0$.

2) 再证 $R(AB)=L(A\alpha_1,\cdots,A\alpha_r)$.　(1)

$\forall\ ABx\in R(AB)$，因为 $Bx\in R(B)=H\oplus D$，所以 $Bx=c+d$，其中 $c\in H,d\in D=N(A)\cap R(B)$，这样 $Ad=0$.

$$\begin{aligned}\therefore ABx&=Ac+Ad=Ac=A(l_1\alpha_1+\cdots+l_r\alpha_r)\\&=l_1A\alpha_1+\cdots+l_rA\alpha_r\in L(A\alpha_1,\cdots,A\alpha_r).\end{aligned}$$

此即 $R(AB)\subseteq L(A\alpha_1,\cdots,A\alpha_r)$.

反之，$\forall\ k_1A\alpha_1+\cdots+k_rA\alpha_r\in L(A\alpha_1,\cdots,A\alpha_r)$，由于 $\alpha_i\in H\subseteq R(B)$，$\therefore \alpha_i=Bx_i(i=1,2,\cdots,r)$. 这样，

$$\begin{aligned}k_1A\alpha_1+\cdots+k_rA\alpha_r&=k_1ABx_1+\cdots+k_rABx_r\\&=AB(k_1x_1+\cdots+k_rx_r)\subseteq R(AB),\end{aligned}$$

即得(1). 由(1)知 $\dim R(AB)=r$.

3) 最后证明 $\dim H=$秩(AB).

秩$(AB)=\dim R(AB)=r=$秩 H.

注　类似可证：秩$(AB)=$秩$(A)-\dim(N(B')\cap R(A'))$. 因为

$$\begin{aligned}\text{秩}(AB)&=\text{秩}(AB)'=\text{秩}(B'A')\\&=\text{秩}(A')-\dim(N(B')\cap R(A'))\\&=\text{秩}\ A-\dim(N(B')\cap R(A')).\end{aligned}$$

273.　1) 秩$(AB)\leqslant\min\{$秩 A，秩 $B\}$；

2) 秩$(AB)=$秩 $B\Longleftrightarrow N(A)\cap R(B)=\{0\}$；

3) 秩$(AB)=$秩 $A\Longleftrightarrow N(B')\cap R(A')=\{0\}$.

证　由第 **272** 条可得.

274.　$R(A,B)=R(A)+R(B)$.

证　$\forall\ (A,B)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\in R(A,B)$，则

$$(A,B)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=Ax_1+Bx_2\in R(A)+R(B).$$

所以 $R(A,B)\subseteq R(A)+R(B)$. 由于每步可逆，所以也有 $R(A)+R(B)\subseteq R(A,B)$.

注 再一次证得秩$(A,B)\leqslant$秩 $A+$秩 B. 因为

$$\text{秩}(A,B)=\dim R(A,B)=\dim[R(A)+R(B)]$$
$$\leqslant\dim R(A)+\dim R(B)=\text{秩 }A+\text{秩 }B.$$

275. 1) 秩$(A,B)=$秩 $A+$秩$(E-AA^+)B$;

2) 秩$(A,B)=$秩 $B+$秩$(E-BB^+)A$;

3) 秩$\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}=$秩 $A+$秩 $B(E-A^+A)$;

4) 秩$\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}=$秩 $B+$秩 $A(E-B^+B)$.

其中 A^+表示 A 的加号广义逆.

证 只证 1)，其它可类似得到.

$$\text{秩}(A,B)=\text{秩}\left[(A,B)\begin{pmatrix}E & -A^+B\\0 & E\end{pmatrix}\right]$$
$$=\text{秩}(A,(E-AA^+)B)=\dim R(A,(E-AA^+)B)$$
$$=\dim[R(A)+R((E-AA^+)B)]. \tag{1}$$

(1)之最后一式由第 **274** 条知.

可证 $R(A)\perp R(E-AA^+)B$. 因为

$$[(E-AA^+)B]'A=B'(E-AA^+)A=0. \tag{2}$$

由(1)、(2)式得

$$\text{秩}(A,B)=\dim R(A)+\dim R(E-AA^+)B$$
$$=\text{秩 }A+\text{秩}(E-AA^+)B.$$

276. 1) 秩$\begin{bmatrix}A & B\\C & 0\end{bmatrix}$

$$=\text{秩 }B+\text{秩 }C+\text{秩}(E-BB^+)A(E-C^+C); \tag{1}$$

2) 秩$\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \geqslant$秩$B+$秩$C$. (2)

证 1) 令$X=\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix}, Y=\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$，由第 **275** 条知

$$秩\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}=秩(X,Y)=秩 Y+秩(E-YY^{+})X, \quad (3)$$

$$秩 Y=秩\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}=秩 B. \quad (4)$$

$$\begin{aligned}(E-YY^{+})X &= \left[E-\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}^{+}\right]\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} \\ &= \left[E-\begin{bmatrix} BB^{+} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} E-BB^{+} & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (E-BB^{+})A \\ C \end{bmatrix}. \quad (5)\end{aligned}$$

再由第 **275** 条和(5)式知

$$秩(E-YY^{+})X=秩 C+秩(E-BB^{+})A(E-C^{+}C). \quad (6)$$

将(4)、(6)代入(3)，即得(1)式.

2) 由(1)式可得.

277. 1) 秩$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}=$秩$A+$秩$B$； (1)

2) 秩$\begin{bmatrix} B & BC \\ AB & 0 \end{bmatrix}=$秩$B+$秩$(ABC)$； (2)

3) 秩$\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & E_n \end{bmatrix}=$秩$(AB)+n$. (3)

证 1) 秩$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}=$秩$\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}$，由第 **276** 条可证(1)式.

2) $\begin{bmatrix} B & BC \\ AB & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} B & BC \\ 0 & -ABC \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & -ABC \end{bmatrix}$.

由于初等变换不改变秩，故

$$秩\begin{bmatrix} B & BC \\ AB & 0 \end{bmatrix}=秩\begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & -ABC \end{bmatrix}=秩 B+秩(-ABC)$$

$$=秩 B+秩(ABC).$$

3) $\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & E \end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix} -AB & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix} -AB & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix}$,

$\therefore 秩\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & E \end{bmatrix}=秩\begin{bmatrix} -AB & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix}=秩(AB)+n.$

注 一般地,秩$\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m \end{bmatrix}=\sum_{i=1}^{m}$ 秩 A_i,其中 A_i 为方阵.

278. 设 A,B,C,D 都是 n 阶方阵,$AC=CA,AD=CB$,且 $|A|\neq 0$,令 $G=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$,则

$$n\leqslant 秩 G<2n.$$

证 因为 $AC=CA$,所以,由假设知

$$|G|=\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{vmatrix}=|A||D-CA^{-1}B|=|AD-CB|=0,$$

因此 秩 $G<2n$. 又因为 $|A|\neq 0$, $\therefore$ 秩 $G\geqslant n$.

279. 1) 设 $A=\begin{bmatrix} 0 & B \\ B & 0 \end{bmatrix}$,其中 B 为 n 阶方阵,则

$$秩 A=2 秩 B;$$

2) 设 $B=(b_{ij}),b_{ij}=1,i、j=1,2,\cdots,n$,求 $A=\begin{bmatrix} 0 & B \\ B & 0 \end{bmatrix}$ 的秩.

证 1) $A\longrightarrow\begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$,由第 **277** 条知

$$秩 A=秩 B+秩 B=2 秩 B.$$

2) 由于秩 $B=1$,因此由 1)得秩 $A=2$.

五、 降阶公式

280. **第一降秩定理**：设 A,D 分别为 n 阶与 m 阶方阵，则

$$秩\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}=\begin{cases} 秩 A+秩(D-CA^{-1}B)，当 A 可逆； \\ 秩 D+秩(A-BD^{-1}C)，当 D 可逆. \end{cases}$$

证　考虑 $\begin{bmatrix} E_n & 0 \\ -CA^{-1} & E_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_n & -A^{-1}B \\ 0 & E_m \end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{bmatrix},$$

则

$$秩\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}=秩(A)+秩(D-CA^{-1}B).$$

同理可证　$秩\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}=秩(D)+秩(A-BD^{-1}C)$.

281. **第二降秩定理**：设 A,D 分别为 n 阶与 m 阶可逆矩阵，则

$$秩(D-CA^{-1}B)=秩 D-秩 A+秩(A-BD^{-1}C).$$

证　令 $M=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$，由第 **280** 条，当 A,D 均可逆时，有

$$\begin{aligned} 秩(M)&=秩 A+秩(D-CA^{-1}B) \\ &=秩 D+秩(A-BD^{-1}C), \end{aligned}$$

移项即得定理.

282. 设 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})$. 取 A 的第 $i_1,i_2,\cdots,i_r$ 行，以及第 $j_1,j_2,\cdots,j_s$ 列，按原来顺序组成的子矩阵，记为 $A\begin{pmatrix} i_1 i_2\cdots i_r \\ j_1 j_2\cdots j_s \end{pmatrix}$. 且设 A 的 k 阶顺序主子式

$$\Delta_k=\left|A\begin{pmatrix} 12\cdots k \\ 12\cdots k \end{pmatrix}\right|\neq 0,1\leqslant k\leqslant n-1,n\geqslant 2.$$

记

$$S_{ij}=\left|A\begin{pmatrix}1 & 2\cdots k & i\\ 1 & 2\cdots k & j\end{pmatrix}\right|, i、j=k+1,\cdots,n.$$

称$(n-k)$阶方阵

$$S=\begin{bmatrix}s_{k+1,k+1} & \cdots & s_{k+1,n}\\ \vdots & & \vdots\\ s_{n,k+1} & \cdots & s_{n,n}\end{bmatrix}$$

为薛尔佛斯特方阵．记 A 的分块为

$$A=\begin{bmatrix}A\begin{pmatrix}1 & 2\cdots k\\ 1 & 2\cdots k\end{pmatrix} & A_1\\ A_2 & A\begin{pmatrix}k+1\cdots n\\ k+1\cdots n\end{pmatrix}\end{bmatrix},$$

则

$$A\begin{pmatrix}k+1\cdots n\\ k+1\cdots n\end{pmatrix}-A_2\left(A\begin{pmatrix}1 & 2\cdots k\\ 1 & 2\cdots k\end{pmatrix}\right)^{-1}A_1=\Delta_k^{-1}S. \qquad (1)$$

证 令 $A\begin{pmatrix}k+1\cdots n\\ k+1\cdots n\end{pmatrix}-A_2\left[A\begin{pmatrix}1 & 2\cdots k\\ 1 & 2\cdots k\end{pmatrix}\right]^{-1}A_1$

$$=C=\begin{bmatrix}c_{k+1,k+1} & \cdots & c_{k+1,n}\\ \vdots & & \vdots\\ c_{n,k+1} & \cdots & c_{n,n}\end{bmatrix}, \qquad (2)$$

且 $A_2=\begin{bmatrix}\alpha_{k+1}\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}$，$\left[A\begin{pmatrix}1 & 2\cdots k\\ 1 & 2\cdots k\end{pmatrix}\right]^{-1}=(\beta_1,\cdots,\beta_k)$，

$A_1=(\gamma_{k+1},\cdots,\gamma_n)$，则由(2)式得

$$\begin{aligned}c_{k+1,k+1}&=a_{k+1,k+1}-(\alpha_{k+1}\beta_1a_{1,k+1}+\cdots+\alpha_{k+1}\beta_ka_{k,k+1})\\ &=a_{k+1,k+1}-\alpha_{k+1}(\beta_1,\cdots,\beta_k)\gamma_{k+1}.\end{aligned}$$

所以 $$\begin{aligned}s_{k+1,k+1}&=\begin{vmatrix}\Delta_k & \gamma_{k+1}\\ \alpha_{k+1} & a_{k+1,k+1}\end{vmatrix}=\Delta_k(a_{k+1,k+1}-\alpha_{k+1}\Delta_k^{-1}\gamma_{k+1})\\ &=\Delta_k(a_{k+1,k+1}-\alpha_{k+1}(\beta_1,\cdots,\beta_k)\gamma_{k+1})=\Delta_k(c_{k+1,k+1}).\end{aligned}$$

类似可证得 $s_{ij}=\Delta_k(c_{ij}),i、j=k+1,\cdots,n.$ (3)

由(3)即证得(1)式．

283. 第三降秩定理：设 $m\times n$ 矩阵 A 的 k 阶顺序主子式 $\left|A\begin{pmatrix}12\cdots k\\12\cdots k\end{pmatrix}\right|=\Delta_k\neq0$，记 $s_{ij}=\left|A\begin{pmatrix}12\cdots k_i\\12\cdots k_j\end{pmatrix}\right|,i=k+1,\cdots,m,j=k+1,\cdots,n$，称$(m-k)\times(n-k)$矩阵

$$S=\begin{bmatrix}s_{k+1,k+1} & \cdots & s_{k+1,n}\\ \vdots & & \vdots\\ s_{m,k+1} & \cdots & s_{m,n}\end{bmatrix}$$

为薛尔佛斯特矩阵，则

$$秩(A)=k+秩(S).$$

证 将 A 作如下分块

$$A=\begin{bmatrix}A\begin{pmatrix}12\cdots k\\12\cdots k\end{pmatrix} & A_1\\ A_2 & A\begin{pmatrix}k+1\cdots m\\k+1\cdots n\end{pmatrix}\end{bmatrix},$$

其中 $A\begin{pmatrix}12\cdots k\\12\cdots k\end{pmatrix}$ 为 k 阶顺序方阵，A_1 为 $k\times(n-k)$矩阵，A_2 为$(m-k)\times k$ 矩阵，$A\begin{pmatrix}k+1\cdots m\\k+1\cdots n\end{pmatrix}$为$(m-k)\times(n-k)$矩阵．

对 A 应用第一降秩定理得

$$秩(A)=秩\, A\begin{pmatrix}12\cdots k\\12\cdots k\end{pmatrix}+秩\left[A\begin{pmatrix}k+1\cdots m\\k+1\cdots n\end{pmatrix}-A_2\left(A\begin{pmatrix}12\cdots k\\12\cdots k\end{pmatrix}\right)^{-1}A_1\right].$$

因为$\left|A\begin{pmatrix}12\cdots k\\12\cdots k\end{pmatrix}\right|\neq0$，所以秩$\left[A\begin{pmatrix}12\cdots k\\12\cdots k\end{pmatrix}\right]=k.$

由第 **282** 条，再记

$$A\begin{pmatrix}k+1\cdots m\\k+1\cdots n\end{pmatrix}-A_2\left[A\begin{pmatrix}12\cdots k\\12\cdots k\end{pmatrix}\right]^{-1}A_1$$

$$
=\begin{bmatrix}
c_{k+1,k+1} & c_{k+1,k+2} & \cdots & c_{k+1,n} \\
c_{k+2,k+1} & c_{k+2,k+2} & \cdots & c_{k+2,n} \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\
c_{m,k+1} & c_{m,k+1} & \cdots & c_{m,n}
\end{bmatrix}
$$

$$
=\Delta_k^{-1}S.
$$

所以
$$
秩(A)=k+秩(S).
$$

第五章　线性方程组

一、 克莱姆(Cramer)法则

284. 什么是线性方程组?

答 形如

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases} \tag{1}$$

的方程组称为线性方程组.

注 ① (1)式可简写为 $AX=B$,

其中 $A=(a_{ij})_{m\times n}, X'=(x_1,\cdots,x_n), B'=(b_1,\cdots,b_m)$.

② 当 $B=0$ 时,$AX=0$ 称为齐次线性方程组.

③ 当 $B\neq 0$ 时,称 $AX=B$ 为非齐次线性方程组,并称 $AX=0$ 为 $AX=B$ 的导出组.

④ 若 $X'_0=(c_1,\cdots,c_n)$,使 $AX_0=B$ 成立,则称 X_0 为 $AX=B$ 的一个解.

285. 什么是克莱姆法则?

答 克莱姆法则是:设线性方程组为 $AX=B$,其中 $A=(a_{ij})_{m\times n}, B'=(b_1,\cdots,b_n)$.

若 $|A|\neq 0$,则线性方程组有唯一的解:

$$x_1=\frac{d_1}{d}, x_2=\frac{d_2}{d}, \cdots, x_n=\frac{d_n}{d},$$

其中 $d=|A|$,d_i 是把矩阵 A 中第 i 列换成方程组的常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 所成的矩阵的行列式.

注　当 $|A|\neq 0$ 时，$AX=0$ 只有零解；当 $|A|=0$ 时，$AX=0$ 有非零解.

286.　解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=4, \\ 7x_1-x_2+6x_3=0, \\ 2x_1+x_2+\ x_3=0. \end{cases}$$

解　因为

$$d=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=30\neq 0,$$

$$d_1=\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-28,\quad d_2=\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 7 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=20,$$

$$d_3=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 7 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}=36.$$

所以方程组的唯一解为：

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{d_1}{d}=-\dfrac{14}{15}, \\ x_2=\dfrac{d_2}{d}=\dfrac{2}{3}, \\ x_3=\dfrac{d_3}{d}=\dfrac{6}{5}. \end{cases}$$

287.　解线性方程组

$$\begin{cases} x+y+z=1, \\ ax+by+cz=a+b+c, \\ bcx+cay+abz=(a+b+c)^2, \end{cases}$$

其中 $a\neq b, b\neq c, c\neq a$.

解　设所给方程组的系数行列式为 d，则

$$d=(a-b)(b-c)(c-a)\neq 0,$$

$$d_x=-(b-c)[a^2+(a+b+c)^2],$$

$$\therefore x=-\frac{a^2+(a+b+c)^2}{(c-a)(a-b)}.$$

类似可得

$$y=-\frac{b^2+(a+b+c)^2}{(a-b)(b-c)},$$

$$z=-\frac{c^2+(a+b+c)^2}{(b-c)(c-a)}.$$

288. 设 a,b,c,d 为实数且不全为零，求证下列线性方程组有唯一解

$$\begin{cases} ax+by+cz+dt=0, \\ bx-ay+dz-ct=0, \\ cx-dy-az+bt=0, \\ dx+cy-bz-at=0. \end{cases}$$

证 设系数矩阵为 A，由于

$$AA'=(a^2+b^2+c^2+d^2)E,$$

因此 $|A|^2=(a^2+b^2+c^2+d^2)^4\neq 0$，即 $|A|\neq 0$. 由克莱姆法则，原线性方程组有唯一零解.

289. 已知 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为 n 个互不相同的数，解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_n=1, \\ a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=t, \\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots \\ a_1^{n-1}x_1+a_2^{n-1}x_2+\cdots+a_n^{n-1}x_n=t^{n-1}. \end{cases}$$

解 设它的系数行列式为 d，则

$$d=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)\neq 0.$$

故原线性方程组有唯一解

$$x_i=\frac{d_i}{d}=\frac{\begin{vmatrix}1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ a_1 & \cdots & a_{i-1} & t & a_{i+1} & \cdots & a_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_1^{n-1} & \cdots & a_{i-1}^{n-1} & t^{n-1} & a_{i+1}^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1}\end{vmatrix}}{d}$$

$$=\frac{(t-a_1)(t-a_2)\cdots(t-a_{i-1})(a_{i+1}-t)\cdots(a_n-t)}{(a_i-a_1)(a_i-a_2)\cdots(a_i-a_{i-1})(a_{i+1}-a_i)\cdots(a_n-a_i)},$$

$$i=1,2,\cdots,n.$$

290. 证明线性方程组

$$\begin{cases}x_1=2a_{11}x_1+2a_{12}x_2+\cdots+2a_{1n}x_n,\\ x_2=2a_{21}x_1+2a_{22}x_2+\cdots+2a_{2n}x_n,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_n=2a_{n1}x_1+2a_{n2}x_2+\cdots+2a_{nn}x_n.\end{cases}\tag{1}$$

只有零解，其中 a_{ij} 全为整数.

解 将(1)写成

$$\begin{cases}(a_{11}-\frac{1}{2})x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\ a_{21}x_1+(a_{22}-\frac{1}{2})x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+(a_{nn}-\frac{1}{2})x_n=0.\end{cases}\tag{2}$$

令

$$f(\lambda)=\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^n\lambda^n+b_1\lambda^{n-1}+\cdots+b_n,$$

其中 b_i 均为整数，则 $f(\frac{1}{2})$ 就是(2)的系数行列式.

若 $f(\frac{1}{2})=0$，即

$$(-1)^n\cdot\frac{1}{2^n}+b_1\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots+b_n=0.$$

去分母得

$$(-1)^n+2(b_1+2b_2+\cdots+2^{n-1}b_n)=0. \tag{3}$$

但(3)式不可能成立(因 $(-1)^n$ 是奇数，而后一项是偶数)，所以(2)的系数行列式 $f(\frac{1}{2})\neq 0$，故(1)只有零解.

291. 证明线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_n=0, \\ x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1^n+x_2^n+\cdots+x_n^n=0. \end{cases} \tag{1}$$

在复数域内只有零解.

证 对 n 用数学归纳法.

当 $n=1$ 时，结论当然成立. 假定对未知量个数不大于 $n-1$ 时结论成立，下证对 n 个未知量时结论也成立.

如果(1)有解 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，且全不是零. 不失一般性，可令 $x_1,\cdots,x_m$ 两两互异，且其个数分别为 $k_1,k_2,\cdots,k_m$. 从而

$$k_1+k_2+\cdots+k_m=n,$$

于是(1)可变为

$$\begin{cases} k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_mx_m=0, \\ k_1x_1^2+k_2x_2^2+\cdots+k_mx_m^2=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ k_1x_1^n+k_2x_2^n+\cdots+k_mx_m^n=0. \end{cases} \tag{2}$$

(2)式可以看成是 m 个未知数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 的齐次线性方程组，而其前 m 个方程的系数行列式为

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_m \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_m^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^m & x_2^m & \cdots & x_m^m \end{vmatrix} = x_1x_2\cdots x_m \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_m \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{m-1} & x_2^{m-1} & \cdots & x_m^{m-1} \end{vmatrix} \neq 0,$$

因而可得 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$，这不可能.

因此，(1)的任一解 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中必有为零的，不妨取 $x_n=0$，则(1)变为

$$\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}=0, \\ x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n-1}^2=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1^{n-1}+x_2^{n-1}+\cdots+x_{n-1}^{n-1}=0, \\ x_1^n+x_2^n+\cdots+x_{n-1}^n=0. \end{cases}$$

由前 $n-1$ 个方程并利用归纳假设可知 $x_1=\cdots=x_{n-1}=0$. 故(1)只有零解.

292. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是数域 P 中互不相同的数，$b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是数域 P 中任一组给定的不全为零的数. 证明：存在唯一的数域 P 上次数小于 n 的多项式 $f(x)$，使

$$f(a_i)=b_i, \quad i=1,2,\cdots,n.$$

证 考虑线性方程组

$$\begin{cases} x_1+a_1x_2+\cdots+a_1^{n-1}x_n=b_1, \\ x_1+a_2x_2+\cdots+a_2^{n-1}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1+a_nx_2+\cdots+a_n^{n-1}x_n=b_n. \end{cases}$$

由于它的系数行列式是一个范德蒙行列式，又 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 互不相等，因此，系数行列式不等于零. 从而由克莱姆法则知以上线性方

程组有唯一解. 设其解为

$$x_1=c_0, x_2=c_1, \cdots, x_n=c_{n-1}.$$

令

$$f(x)=c_0+c_1x+\cdots c_{n-1}x^{n-1},$$

则 $f(x)$ 的次数显然小于 n，而且有 $f(a_i)=b_i, i=1,2,\cdots,n$.

若还有次数不超过 n 的多项式 $g(x)$，有

$$g(a_i)=b_i,\ i=1,2,\cdots,n.$$

下证 $f(x)=g(x)$. 事实上，若 $f(x)\neq g(x)$，令 $F(x)=f(x)-g(x)$，则 $F(x)\neq 0$. 而 $\partial(F(x))\leqslant n-1$，但 $F(x)$ 有 n 个不同根 $a_1,\cdots,a_n$，故 $F(x)=0$. 矛盾.

注 这称为拉格朗日 (Lagrange)插值公式，它还可以直接解出，令

$$G(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots,(x-a_n),$$

$$L(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{b_iG(x)}{(x-a_i)G'(a_i)},$$

$\partial(L(x))=n-1$，且 $L(a_i)=b_i$，$(i=1,2,\cdots,n)$.

293. 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=2, \\ x_1+C_2^1x_2+C_3^1x_3+\cdots+C_n^1x_n=2, \\ x_1+C_3^2x_2+C_4^2x_3+\cdots+C_{n+1}^2x_n=2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1+C_n^{n-1}x_2+C_{n+1}^{n-1}x_3+\cdots+C_{2n-1}^{n-1}x_n=2. \end{cases}$$

解 系数行列式为

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & C_2^1 & C_3^1 & \cdots & C_n^1 \\ 1 & C_3^2 & C_4^2 & \cdots & C_{n+1}^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & C_n^{n-1} & C_{n+1}^{n-1} & \cdots & C_{2n-1}^{n-1} \end{vmatrix}.$$

由第 438 条知 $D_n=1$.

其次,由于

$$D_{x_1}=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 2 & C_2^1 & C_3^1 & \cdots & C_n^1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 2 & C_n^{n-1} & C_{n+1}^{n-1} & \cdots & C_{2n-1}^{n-1}\end{vmatrix}=2D_n=2,$$

$$D_{x_i}=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 2 & \cdots & 1\\ 1 & C_2^1 & \cdots & 2 & \cdots & C_n^1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & C_n^{n-2} & \cdots & 2 & \cdots & C_{2n-1}^{n-1}\end{vmatrix}=0,\ i=2,\cdots,n,$$

$\therefore\quad x_1=2, x_2=x_3=\cdots=x_n=0.$

注　由于 $D_n\neq0$,因此有唯一解.但从原线性方程组马上看出有一组解为 $x_1=2, x_2=x_3=\cdots=x_n=0$.

294.　设 A 为 $n\times n$ 矩阵,A^* 为 A 的伴随矩阵,证明:$AX=B$ 有唯一解$\Longleftrightarrow A^*X=D$ 有唯一解,其中 $B'=(b_1,\cdots,b_n)$,$D'=(a_1,\cdots,a_n)$.

证　必要性　设 $AX=B$ 有唯一解,则 $|A|\neq0$,而 $|A^*|=|A|^{n-1}\neq0$,故 $A^*X=D$ 有唯一解.

充分性　设 $A^*X=D$ 有唯一解,则 $|A^*|\neq0$,即秩 $A^*=n$,从而秩 $A=n$,$|A|\neq0$,故 $AX=B$ 有唯一解.

295.　设 $f(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n$,证明:若 $f(x)$ 至少有 $n+1$ 个不同的根,则 $f(x)=0$.

证　取 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n+1}$ 为 $f(x)$ 的 $n+1$ 个不同的根,则有齐次线性方程组

$$c_0+c_1\alpha_i+\cdots+c_n\alpha_i^n=0,\ i=1,2,\cdots,n+1.$$

其系数行列式 $|A|$ 是一个 $n+1$ 阶范德蒙行列式,由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n+1}$ 互不相同知 $|A|\neq0$,故线性方程组只有零解,$c_0=c_1=\cdots=c_n=0$,即 $f(x)$ 是零多项式.

296. 设整系数线性方程组

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i=1,2,\cdots,n \tag{1}$$

对任意 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 均有整数解，证明其系数行列式必为 ± 1.

证 记 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，取线性方程组(1)右端依次为单位矩阵的各列，所得解依次为 $c_1,\cdots,c_n$. 令 $D=(c_1,\cdots,c_n)$，则 $AD=E$，且 A、D 均为整数矩阵，故 $|A|\cdot|D|=1$，但 $|A|$ 与 $|D|$ 均为整数，所以 $|A|=1$ 或 -1.

二、 线性方程组的同解

297. 什么叫做线性方程组的同解？

答 设有两个线性方程组，如果它们的解集相等，那么称这两个线性方程组同解.

注 ① 同解是一种等价关系.

② 两个矛盾方程组也是同解的，因为它们的解集都是空集.

298. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，P 为 $k\times m$ 矩阵，秩 $P=m$，则下面两个线性方程组同解：

$$AX=B \quad 与\ PAX=PB. \tag{1}$$

证 $AX=B$ 的解显然是 $PAX=PB$ 的解.

反之，任取 $PAX=PB$ 的一个解 X_0，即有 $PAX_0=PB$.
因为秩$(\overline{P}'P)=$秩 $P=m$，所以 $\overline{P}'P$ 可逆. 那么 $\overline{P}'PAX_0=\overline{P}'PB$，两边乘$(\overline{P}'P)^{-1}$，即得 $AX_0=B$. 即得 X_0 是 $AX=B$ 的解.

注 ① 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，若 P 是 m 阶可逆阵，则 $AX=B$ 与 $PAX=PB$ 同解.

② $AX=B$ 与 $P(i,j)AX=P(i,j)B$ 同解，其中 $P(i,j)$ 由单位矩阵 E 交换第 i 行与第 j 行得出. 这就是说，交换线性方程组中任意两个方程，所得线性方程组与原方程组同解.

③ $AX=B$ 与 $P(i(c))AX=P(i(c))B$ 同解，其中 $P(i(c))$ 由

单位矩阵 E 的第 i 行乘非零常数 c 得出. 这就是说,以非零常数乘线性方程组中任意一个方程所得的线性方程组与原线性方程组同解.

④ $AX=B$ 与 $P(i,j(k))AX=P(i,j(k))B$ 同解,其中 $P(i,j(k))$ 由单位矩阵 E 的第 j 行乘以 k 加到第 i 行得出.

这就是说,在线性方程组中,用某一方程的 k 倍加到另一方程,则所得线性方程组与原线性方程组同解.

⑤ 综上所述,对线性方程组进行若干次行的初等变换,所得新线性方程组与原线性方程组同解.

三、 消元法

299. 什么叫高斯(Gauss)消元法?

答 设 $A=(a_{ij})_{s\times n}$, $B'=(b_1,\cdots,b_s)$, 秩 $A=r$, 线性方程组 $AX=B$, 令 $\overline{A}=(A,B)_{s\times(n+1)}$ 为增广矩阵,经过行线性变换,线性方程组可变为同解的线性方程组.

$$\begin{cases} c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1r}x_r+\cdots+c_{1n}x_n=d_1, \\ \qquad c_{22}x_2+\cdots+c_{2r}x_r+\cdots+c_{2n}x_n=d_2, \\ \qquad\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad c_{rr}x_r+\cdots+c_{rn}x_n=d_r, \\ \qquad\qquad\qquad 0=d_{r+1}, \\ \qquad\qquad\qquad 0=0, \\ \qquad\qquad\qquad \cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad 0=0. \end{cases}$$

那么,1) 当 $d_{r+1}\neq 0$ 时,原线性方程组无解.

2) 当 $d_{r+1}=0$ 时,有两种可能:

1° $r=n$,这时原方程组有唯一解;

2° $r<n$,这时原方程组有无穷多个解.

300. 用消元法解下列线性方程组：

$$1)\begin{cases} x_1+3x_2+5x_3-4x_4 \quad =1, \\ x_1+3x_2+2x_3-2x_4+x_5=-1, \\ x_1-2x_2+x_3-x_4-x_5=3, \\ x_1-4x_2+x_3+x_4-x_5=3, \\ x_1+2x_2+x_3-x_4+x_5=-1. \end{cases}$$

$$2)\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4, \\ \quad x_2-x_3+x_4=-3, \\ x_1+3x_2 \quad +x_4=1, \\ \quad -7x_2+3x_3+x_4=-3. \end{cases}$$

$$3)\begin{cases} x_1+2x_2 \quad -3x_4+2x_5=1, \\ x_1-x_2-3x_3+x_4-3x_5=2, \\ 2x_1-3x_2+4x_3-5x_4+2x_5=7, \\ 9x_1-9x_2+6x_3-16x_4+2x_5=25. \end{cases}$$

解　1) 增广矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & -4 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$
\longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 3 & 5 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & 3 & 1 & -2 \end{array}\right]
$$

$$
\longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 3 & 5 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -8 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 3 & 1 & -2 \end{array}\right]
$$

$$
\longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 3 & 5 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]
$$

$$
\longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 3 & 5 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right]
$$

$$
\longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 3 & 5 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]
$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

则相应的线性方程组为

$$\begin{cases} x_1 \quad - x_4 \quad = 1, \\ \quad x_2 \quad - x_4 \quad = 0, \\ \quad\quad x_3 \quad\quad = 0, \\ \quad\quad\quad 2x_4 + x_5 = -2. \end{cases}$$

故原线性方程组有无穷多个解.解为

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 4x_4, \\ x_2 = x_4, \\ x_3 = 0, \\ x_5 = 2 - 2x_4. \end{cases}$$

其中 x_4 为任意常数.

2）仿上对增广矩阵经过一系列的行初等变换后可化为阶梯形：

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right],$$

故原方程组有唯一解：$x_1 = -8, x_2 = 3, x_3 = 6, x_4 = 0$.

3）增广矩阵经过一系列的行初等变换后可化为

$$\left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 2 & 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 4 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 33 & -25 & 29 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right],$$

由于相应的最后一个方程是矛盾方程，故原方程组无解.

301. 当 c,d 取什么值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1, \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4+x_5=c, \\ \qquad x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3, \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=d \end{cases}$$

有解？在有解的情形下，求它的解.

解 用初等行变换将增广矩阵化为阶梯形矩阵：

$$\left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & c \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & d \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & c-3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & d-5 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d-2 \end{array}\right].$$

当 $c=0,d=2$ 时，线性方程组有解，且其解为

$$\begin{cases} x_1=x_3+x_4+5x_5-2, \\ x_2=-2x_3-2x_4-6x_5+3. \end{cases}$$

其中 x_3,x_4,x_5 是自由未知量.

注 当 $c\neq 0$ 或 $d\neq 2$ 时，原方程组无解.

302. 讨论 a,b 取什么值时，线性方程组

$$\begin{cases} ax_1+bx_2+2x_3=1, \\ ax_1+(2b-1)x_2+3x_3=1, \\ ax_1+bx_2+(b+3)x_3=2b-1 \end{cases}$$

有解，并求解.

解
$$\begin{bmatrix} a & b & 2 & \vdots & 1 \\ a & 2b-1 & 3 & \vdots & 1 \\ a & b & b+3 & \vdots & 2b-1 \end{bmatrix}$$
$$\longrightarrow \begin{bmatrix} a & b & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & b-1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & b+1 & \vdots & 2b-2 \end{bmatrix}. \qquad (1)$$

1) 当 $a\neq 0$ 且 $b\neq \pm 1$ 时，秩 $A=$秩 $\bar{A}=3$. 原线性方程组有唯一解 $x_1=\frac{5-b}{a(b+1)}$, $x_2=\frac{-2}{b+1}$, $x_3=\frac{2(b-1)}{b+1}$.

2) 当 $b=-1$ 时，由(1)知：秩 $A=2$，秩 $\overline{A}=3$，故原线性方程组无解.

3) 当 $b=1$ 时，由(1)式得：

$$\begin{cases} ax_1+x_2+2x_3=1, \\ x_3=0, \\ 2x_3=0. \end{cases}$$

此时原线性方程组有无穷多个解

$$\begin{cases} x_2=1-ax_1, \\ x_3=0. \end{cases}$$

x_1 为自由未知量.

4) 当 $a=0$ 且 $b\neq \pm 1$ 时，则线性方程组为

$$\begin{cases} bx_2+2x_3=1, & (2) \\ (b-1)x_2+x_3=0, & (3) \\ (b+1)x_3=2(b-1). & (4) \end{cases}$$

由(4)解得 $x_3=\frac{2(b-1)}{b+1}$. 代入(3)得 $x_2=-\frac{2}{b+1}$. 再代入(2)得

$$\frac{-2b}{b+1}+\frac{4(b-1)}{b+1}=\frac{2b-4}{b+1}=1,$$

解得 $b=5$.

1° 当 $a=0,b=5$ 时,原线性方程组有无穷多解.

$$x_1=k,x_2=-\frac{1}{3},x_3=\frac{4}{3},$$

其中 k 为任意常数.

2° 当 $a=0,b\neq\pm1,b\neq5$ 时,原线性方程组无解.

303.　证明:线性方程组

$$\begin{cases}x_1-x_2=a_1,\\x_2-x_3=a_2,\\x_3-x_4=a_3,\\x_4-x_5=a_4,\\x_5-x_1=a_5\end{cases}$$

有解$\Longleftrightarrow\sum_{i=1}^{5}a_i=0$. 在有解的情况下,求出它的一般解.

证　将增广矩阵化为阶梯形矩阵:

$$\left[\begin{array}{ccccc:c}1&-1&0&0&0&a_1\\0&1&-1&0&0&a_2\\0&0&1&-1&0&a_3\\0&0&0&1&-1&a_4\\-1&0&0&0&1&a_5\end{array}\right]$$

$$\longrightarrow\left[\begin{array}{ccccc:c}1&-1&0&0&0&a_1\\0&1&-1&0&0&a_2\\0&0&1&-1&0&a_3\\0&0&0&1&-1&a_4\\0&0&0&0&0&\sum_{i=1}^{5}a_i\end{array}\right].$$

由此可见,系数矩阵的秩是 4,而线性方程组有解的充分必要条件

是增广矩阵 $\overline{A}$ 的秩是 4，即 $\sum_{i=1}^{5} a_i=0$. 当 $\sum_{i=1}^{5} a_i=0$ 时，线性方程组有无穷多个解，且其解为：

$$\begin{cases} x_1=a_1+a_2+a_3+a_4+x_5, \\ x_2=a_2+a_3+a_4+x_5, \\ x_3=a_3+a_4+x_5, \\ x_4=a_4+x_5, \end{cases}$$

其中 x_5 为自由未知量．

304.　解线性方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2-x_3-\cdots-x_n=2a, \\ -x_1+3x_2-x_3-\cdots-x_n=4a, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -x_1-x_2-x_3-\cdots+(2^n-1)x_n=2^n a. \end{cases}$$

解　令 $s=x_1+x_2+\cdots+x_n$，则原线性方程组变为

$$\begin{cases} -s+2x_1=2a, \\ -s+4x_2=4a, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ -s+2^n x_n=2^n\cdot a. \end{cases}$$

由此可得

$$x_1=a+\frac{s}{2}, x_2=a+\frac{s}{4}, \cdots, x_n=a+\frac{s}{2^n}.$$

将它们统统加起来，得

$$s=\sum_{i=1}^{n} x_i=na+s\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)$$

$$=na+\left(1-\frac{1}{2^n}\right)s,$$

$$\therefore s=2^n\cdot na.$$

所以原线性方程组的解为

$$\begin{cases} x_1=a+\dfrac{s}{2}=a(1+n\cdot 2^{n-1}), \\ x_2=a+\dfrac{s}{4}=a(1+n2^{n-1}), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n=a+\dfrac{s}{2^n}=a(1+n). \end{cases}$$

305.　设 n 阶方阵

$$A=\begin{bmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & \cdots & a \end{bmatrix},$$

$C'=(1,1,\cdots,1)$ 为 $n\times 1$ 矩阵，试讨论 $AX=C$ 的解的情况，在有解的情况下，并求出解.

解　$|A|=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$.

1）当 $a\neq b$，且 $a\neq(1-n)b$ 时，$|A|\neq 0$. 因而线性方程组 $AX=C$ 有唯一解，且解为

$$x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{1}{[a+(n-1)b]}.$$

2）当 $a=b\neq 0$ 时，则原线性方程组与下面线性方程组

$$ax_1+ax_2+\cdots+ax_n=1$$

同解. 故原线性方程组的解为

$$x_1=\frac{1}{a}-(x_2+\cdots+x_n),$$

其中 $x_2,x_3,\cdots,x_n$ 为自由未知量.

3）当 $a=b=0$ 时，原线性方程组无解.

4）当 $a+(n-1)b=0$ 即 $a=(1-n)b$ 时，原线性方程组无解. 因为将线性方程组中前 $n-1$ 个方程统统加到最后一个方程，得 $0=n$，矛盾.

四、 迭代法介绍

306. 什么是迭代法？

答 迭代法是求解线性方程组的一种近似法．它是通过某种极限过程去逼近精确解，求得满足误差要求的近似解的一种方法．

307. 什么是简单迭代法？简单迭代法的计算步骤是什么？

答 简单迭代法由三个步骤构成．

第一步：将线性方程组改写成迭代形式．即将第 1 个方程写成未知量 x_1 的表达式，将第 2 个方程写成 x_2 的表达式，…，将第 n 个方程写成未知量 x_n 的表达式．比如假定所给线性方程组已经化成迭代形式：

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_n. \end{cases} \tag{1}$$

于是，它的一般迭代公式是：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = a_{11}x_1^{(k)} + a_{12}x_2^{(k)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k)} + b_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n^{(k+1)} = a_{n1}x_1^{(k)} + a_{n2}x_2^{(k)} + \cdots + a_{nn}x_n^{(k)} + b_n. \end{cases} \tag{2}$$

第二步：求近似解．任意给定初始近似值 $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}$，并代入迭代公式(2)的右端，得第一次近似解 $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \cdots, x_n^{(1)}$；再以第一次近似解 $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \cdots, x_n^{(1)}$ 代入迭代公式(2)，得到第二次近似解；这样继续做下去，可得到第 k 次近似解．

第三步：误差估计．在迭代过程中，随时将前后两次迭代所得的近似值进行比较，如果发现有：

$$|x_1^{(k)} - x_1^{(k+1)}| < \varepsilon,$$
$$|x_2^{(k)} - x_2^{(k+1)}| < \varepsilon,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$|x_n^{(k)} - x_n^{(k+1)}| < \varepsilon.$$

其中 ε 为预先要求的误差,则迭代过程停止. 且取第 $k+1$ 次近似值为线性方程组的近似解.

即 $\quad x_1 \approx x_1^{(k+1)}, x_2 \approx x_2^{(k+1)}, \cdots, x_n \approx x_n^{(k+1)}$.

308. 什么是简单迭代法的演算表格?

答 简单迭代法的演算表格是表 5-1.

表 5-1

	$a_{11}\quad a_{12}\quad a_{13}\quad \cdots\quad a_{1n}$ $a_{21}\quad a_{22}\quad a_{23}\quad \cdots\quad a_{2n}$ ………………… $a_{n1}\quad a_{n2}\quad a_{n3}\quad \cdots\quad a_{nn}$	b_1 b_2 $\vdots$ b_n
初始近似值 第一次近似值 第二次近似值	$x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}$ $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \cdots, x_n^{(1)}$ $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, \cdots, x_n^{(2)}$	

计算时,先将(2)中所有已知数据和初始值填入表 5－1 中各自的位置上,然后依次将 $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}$ 与表 5-1 中第一行对应的系数 $a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}$相乘,把这些乘积求和后,再与同一行上的 b_1 相加,即得

$$a_{11}x_1^{(0)} + a_{12}x_2^{(0)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(0)} + b_1 = x_1^{(1)}.$$

填入表 5－1 内 $x_1^{(1)}$ 处. 同样将 $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}$ 与第二行相对应的系数相乘求和后,再加上 b_2,得 $x_2^{(1)}$,填入表 5－1 内. 如此顺序计算下去,就得到第一次近似值 $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \cdots, x_n^{(1)}$. 同法可求出第二次近似值 $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \cdots, x_n^{(2)}$. 如此继续下去,可求出各次近似值.

309. 线性方程组迭代公式收敛的充分条件是什么?

答 下面给出线性方程组迭代公式收敛的一个充分条件. 设线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases}$$

如果系数矩阵是行对角严格占优的，即

$$|a_{ii}|>\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}|,\ (i=1,2,\cdots,n),$$

那么迭代公式

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=-\dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2^{(k)}-\dfrac{a_{13}}{a_{11}}x_3^{(k)}-\cdots-\dfrac{a_{1n}}{a_{11}}x_n^{(k)}+\dfrac{b_1}{a_{11}}, \\ x_2^{(k+1)}=-\dfrac{a_{21}}{a_{22}}x_1^{(k)}-\dfrac{a_{23}}{a_{22}}x_3^{(k)}-\cdots-\dfrac{a_{2n}}{a_{22}}x_n^{(k)}+\dfrac{b_2}{a_{22}}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n^{(k+1)}=-\dfrac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1^{(k)}-\dfrac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2^{(k)}-\dfrac{a_{n3}}{a_{nn}}x_3^{(k)}-\cdots+\dfrac{b_n}{a_{nn}} \end{cases} \tag{2}$$

对任取的初始值是收敛的.

注 类似地，假如线性方程组(2)中的系数矩阵是列对角严格占优的，即

$$|a_{ii}|>\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ji}|,\ i=1,2,\cdots,n,$$

那么迭代公式(2)对任取的初始值也是收敛的.

310. 用简单迭代法解线性方程组

$$\begin{cases} 13x_1+4x_2=8, \\ 6x_1-16x_2+5x_3=0, \\ 5x_1-5x_2+6x_3=5. \end{cases}$$

精确到四位小数.

解 按列的规则，线性方程组适合对角严格占优条件，所以迭代形式

$$\begin{cases} x_1 = \qquad -\dfrac{4}{13}x_2 + \qquad + \dfrac{8}{13}, \\ x_2 = \dfrac{3}{8}x_1 \qquad + \dfrac{5}{16}x_3 \qquad , \\ x_3 = -\dfrac{5}{6}x_1 + \dfrac{5}{6}x_2 \qquad + \dfrac{5}{6}. \end{cases}$$

是收敛的. 因此有收敛的迭代公式

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \qquad -0.3077x_2^{(k)} \qquad +0.6154, \\ x_2^{(k+1)} = 0.375x_1^{(k)} \qquad +0.3125x_3^{(k)} \qquad , \\ x_3^{(k+1)} = -0.8333x_1^{(k)} + 0.8333x_2^{(k)} \qquad +0.8333. \end{cases}$$

演算表格见表 5-2.

表 5-2

	0	−0.3077	0	0.6154
	0.375	0	0.3125	0
	−0.8333	0.8333	0	0.8333
初始近似值	0	0	0	
第一次近似值	0.6154	0	0.8333	
第二次近似值	0.6154	0.4912	0.3205	
第三次近似值	0.4643	0.3310	0.7298	
第四次近似值	0.5136	0.4022	0.7222	
第五次近似值	0.4916	0.4183	0.7405	
第六次近似值	0.4867	0.4158	0.7722	
第七次近似值	0.4875	0.4238	0.7742	
第八次近似值	0.4850	0.4248	0.7802	
第九次近似值	0.4847	0.4257	0.7831	

由表 5－2 看出，精确到两位小数的解为

$$x_1=0.4847, x_2=0.4257, x_3=0.7831.$$

311.　什么是逐个迭代法?

答　逐个迭代法与简单迭代法几乎完全一样，唯一差别是它们所用的迭代公式不同.逐个迭代法的公式是

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=a_{11}x_1^{(k)}+a_{12}x_2^{(k)}+a_{13}x_3^{(k)}+\cdots+a_{1n}x_n^{(k)}+b_1, \\ x_2^{(k+1)}=a_{21}x_1^{(k+1)}+a_{22}x_2^{(k)}+a_{23}x_3^{(k)}+\cdots+a_{2n}x_n^{(k)}+b_2, \\ x_3^{(k+1)}=a_{31}x_1^{(k+1)}+a_{32}x_2^{(k+1)}+a_{33}x_3^{(k)}+\cdots+a_{3n}x_n^{(k)}+b_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n^{(k+1)}=a_{n1}x_1^{(k+1)}+a_{n2}x_2^{(k+1)}+a_{n3}x_3^{(k+1)}+\cdots+a_{nn}x_n^{(k)}+b_n. \end{cases} \quad (*)$$

312.　简单迭代公式和逐个迭代公式的异同是什么?

答　这两个迭代公式的差别是在用第 k 次近似值 $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \cdots, x_n^{(k)}$ 求第 $k+1$ 次近似值 $x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \cdots, x_n^{(k+1)}$ 时，简单迭代公式是将 $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \cdots, x_n^{(k)}$ 整个地代入公式第 **309** 条的(2)的右端，而逐个迭代公式则是将 $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \cdots, x_n^{(k)}$ 逐次代入第 **311** 条的(*)中，也就是说，在计算 $x_i^{(k+1)}$ 时，及时地引用新算出的 $x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \cdots, x_{i-1}^{(k+1)}$. 一般说来，在计算过程中，及时地引用新值比用旧值更接近精确解，收敛速度要比简单迭代快.

313.　用逐个迭代法求解方程组

$$\begin{cases} 5x_1+1.5x_2+1.3x_3+0.9x_4 \qquad =21.1, \\ 1.5x_1+4.5x_2+1.4x_3+1.0x_4+0.5x_5=21.9, \\ 1.3x_1+1.4x_2+5.5x_3+1.5x_4+0.7x_5=23.1, \\ 0.9x_1+1.0x_2+1.5x_3+5.5x_4+1.2x_5=26.4, \\ \qquad\qquad 0.5x_2+0.7x_3+1.2x_4+2.5x_5=10.0. \end{cases}$$

解　显然，它适合对角严格占优条件，因此有下面收敛的逐个迭代公式

$$
\begin{cases}
x_1^{(k+1)} = & -0.3000\times x_2^{(k)}-0.2600x_3^{(k)}-0.1800x_4^{(k)}+4.2200,\\
x_2^{(k+1)} = -0.3333x_1^{(k+1)} & -0.3111x_3^{(k)}-0.2222x_4^{(k)}-0.1111x_5^{(k)}+4.8667,\\
x_3^{(k+1)} = -0.2364x_1^{(k+1)}-0.2545x_2^{(k+1)} & -0.2727x_4^{(k)}-0.1273x_5^{(k)}+4.2000,\\
x_4^{(k+1)} = -0.1636x_1^{(k+1)}-0.1818x_2^{(k+1)}-0.2727x_3^{(k+1)} & -0.2182x_5^{(k)}+4.8000,\\
x_5^{(k+1)} = & -0.2000x_2^{(k+1)}-0.2800x_3^{(k+1)}-0.4800x_4^{(k+1)}+4.0000.
\end{cases}
$$

演算表格见表 5-3.

表 5-3

	0	−0.3000	−0.2600	−0.1800	0	4.2200
	−0.3333	0	−0.3111	−0.2222	−0.1111	4.8667
	−0.2364	−0.2545	0	−0.2727	−0.1273	4.2000
	−0.1636	−0.1818	−0.2727	0	−0.2182	4.8000
	0	−0.2000	−0.2800	−0.4800	0	4.0000
初始近似值	0	0	0	0	0	
第一次近似值	4.2200	3.4602	2.3218	2.8473	1.2912	
第二次近似值	2.0657	2.6803	2.0887	3.1235	1.3798	
第三次近似值	2.3107	2.5994	1.9649	3.1125	1.4359	
第四次近似值	2.3690	2.6147	1.9430	3.0938	1.4481	
第五次近似值	2.3735	2.6228	1.9434	3.0889	1.4485	
第六次近似值	2.3719	2.6242	1.9447	3.0885	1.4482	

所求的解为：

$x_1=2.3719$，　$x_2=2.6242$，　$x_3=1.9447$，　$x_4=3.0885$，

$x_5=1.4482$.

注　此条如果用简单迭代法计算，必须迭代 30 次才能得到这样的结果．这充分说明逐个迭代法可以提高收敛的速度．

五、齐次线性方程组的解空间

314.　什么是齐次线性方程组的解空间？

答　设 A 为 $m\times n$ 矩阵，齐次线性方程组 $AX=0$ 的所有解构成的线性空间

$$W=\{X\mid AX=0\},$$

称 W 为 $AX=0$ 的解空间，这里 $\dim W=n-$秩 A.

注　当 $\dim W=0$（即秩 $A=n$）时，$AX=0$ 仅有零解，即 $W=\{0\}$.

当 $\dim W=t$（即秩 $A=n-t$）时，设 W 的一组基为 $\eta_1,\cdots,\eta_t$，则 $\eta_1,\cdots,\eta_t$ 为 $AX=0$ 的一组基础解系，且 $W=L(\eta_1,\cdots,\eta_t)$.

315.　求齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1-3x_2+5x_3-2x_4+x_5=0,\\-2x_1+x_2-3x_3+x_4-4x_5=0,\\-x_1-7x_2+9x_3-4x_4-5x_5=0,\\3x_1-14x_2+22x_3-9x_4+x_5=0\end{cases}$$

的一个基础解系.

解

$$\begin{bmatrix}1 & -3 & 5 & -2 & 1\\-2 & 1 & -3 & 1 & -4\\-1 & -7 & 9 & -4 & -5\\3 & -14 & 22 & -9 & 1\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & -3 & 5 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & \frac{3}{5} & \frac{2}{5}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

其相应的线性方程组为

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_2 - \frac{7}{5}x_3 + \frac{3}{5}x_4 + \frac{2}{5}x_5 = 0. \end{cases}$$

令 $x_3=1, x_4=0, x_5=0$，求得一个解为

$$\eta_1=(-\frac{4}{5},\frac{7}{5},1,0,0).$$

令 $x_3=0, x_4=1, x_5=0$，求得一个解为

$$\eta_2=(\frac{1}{5},-\frac{3}{5},0,1,0).$$

令 $x_3=0, x_4=0, x_5=1$，求得一个解为

$$\eta_3=(-\frac{11}{5},-\frac{2}{5},0,0,1).$$

从而得到线性方程组的一个基础解系是 η_1,η_2,η_3.

316. 问 λ 为何值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1+\lambda x_2+x_3=0, \\ x_1-x_2+x_3=0, \\ \lambda x_1+x_2+2x_3=0. \end{cases} \tag{1}$$

有非零解，并在有解时求出所有非零解.

解 令系数矩阵为 A，则

$$|A|=(\lambda+1)(\lambda-2).$$

当 $|A|=0$ 即 $\lambda=-1$ 或 $\lambda=2$ 时，(1)有非零解.

当 $\lambda=-1$ 时，(1)与下面的线性方程组同解：

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases} \tag{2}$$

于是(1)的一个基础解系为：$\alpha=(1,1,0)$.

当 $\lambda=2$ 时，(1)与下面的线性方程组同解：

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases} \tag{3}$$

故(1)的一个基础解系为：$\beta=(1,0,-1)$.

综上所述：当 $\lambda=-1$ 时，(1)有非零解为 $\{k\alpha \mid k\neq 0\}$；当 $\lambda=2$ 时，(1)有非零解为 $\{k\beta \mid k\neq 0\}$.

317.　设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的秩为 n，求齐次线性方程组 $BX=0$ 的一个基础解系，其中 $B=(a_{ij})_{r\times n}$，$r<n$，X 为 n 元列向量.

解　由秩 $A=n$，得秩 $B=r$. 令 W 为 $BX=0$ 的解空间，则 $\dim W=n-r$.

令 A_{ij} 为行列式 $|A|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式，由秩 $A=n$ 知 A 的伴随矩阵 A^* 的秩等于 n. 因此

$$\begin{cases} \eta_{r+1} = (A_{r+1,1}, \cdots, A_{r+1,n}), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \eta_n \quad = (A_{n1}, \cdots, A_{nn}) \end{cases}$$

构成 $BX=0$ 的一个基础解系.

318.　设 $\alpha_1=(1,-1,0,0)$，$\alpha_2=(1,1,0,1)$，$\alpha_3=(2,0,1,1)$，它们生成的子空间为 $W=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$. 试构造一个齐次线性方程组，使它的解空间是 W.

解　由于 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 的极大无关组为 α_1,α_2，令

$$A=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

作齐次线性方程组 $AX=0$，并求出它的一个基础解系为

$$\beta'_1=(1,0,-1,-1),$$

$$\beta'_2=(0,1,1,-1).$$

由 $A\beta_1=0, A\beta_2=0$，得

$$\alpha_i\beta_j=0 \quad i,j=1,2. \tag{1}$$

令 $B'=(\beta_1,\beta_2)$，作齐次线性方程组 $BX=0$. 由于秩 $B=2$，故 $BX=0$ 的基础解系所含向量个数等于 $4-2=2$.

由(1)式知 $\beta'_j\alpha'_i=0, i、j=1,2$. 这就证明了 α_1,α_2 为 $BX=0$ 的一个基础解系. 由于 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=L(\alpha_1,\alpha_2)$，故 $BX=0$ 的解空间为 $L(\alpha_1,\alpha_2)$.

319. 设线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n-1,1}x_1+a_{n-1,2}x_2+\cdots+a_{n-1,n}x_n=0. \end{cases} \tag{1}$$

的系数矩阵为 $A=(a_{ij})_{(n-1)\times n}$. 设 M_i 是矩阵 A 中划去第 i 列剩下的 $(n-1)\times(n-1)$ 矩阵的行列式.

1) 证明：$(M_1,-M_2,\cdots(-1)^{n-1}M_n)$ 是(1)的一个解；

2) 如果 A 的秩为 $n-1$，那么(1)的解都是 $(M_1,-M_2,\cdots,(-1)^{n-1}M_n)$ 的倍数.

证 1) 考察行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

的最后一行各元素的代数余子式，即有 $A_{nj}=(-1)^{n+j}M_j$.

由于 $a_{k1}A_{n1}+a_{k2}A_{n2}+\cdots+a_{kn}A_{nn}=0, k=1,2,\cdots,n-1$，所以 $a_{k1}M_1-a_{k2}M_2+\cdots(-1)^{n-1}M_n=0, k=1,2,\cdots,n-1$，即 $(M_1,-M_2,\cdots,(-1)^{n-1}M_n)$ 是(1)的一个解.

2) 当 A 的秩为 $n-1$ 时，基础解系所含向量的个数为 $n-1$，

因而 A 的秩为 $n-1$. 故 A 中至少有一个 $n-1$ 阶子式不为 0，所以 $\beta=(M_1,-M_2,\cdots,(-1)^{n-1}M_n)\neq 0$ 可作基础解系，从而(1)的解空间为 $L(\beta)$，(1)的解集可表为

$$\{k(M_1,-M_2,\cdots,(-1)^{n-1}M_n)\mid k \text{ 为任意常数}\}.$$

320. 设 A,B 分别为 $s\times n$ 与 $m\times n$ 矩阵，$AX=0$ 与 $BX=0$ 的解空间分别为 W_1 与 W_2，若 $W_1\subseteq W_2$，则 $W_1=W_2 \Longleftrightarrow$ 秩 $A=$ 秩 B.

证　见第 **249** 条.

注　① 在复数域上，$AX=0$ 与 $\overline{A}'AX=0$ 同解.

② 在实数域上，$AX=0$ 与 $A'AX=0$ 同解.

321. 设 $\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})$，　$i=1,2,\cdots,s$，$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$. 证明：如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=0. \end{cases} \tag{1}$$

的解全是方程 $b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n=0$ 的解，那么 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表出.

证　设 $A=(a_{ij})_{s\times n}$，$B=\begin{bmatrix} A \\ \beta \end{bmatrix}_{(s+1)\times n}$，再设 $AX=0$ 的解空间为 W_1，$BX=0$ 的解空间为 W_2，则 $W_1\subseteq W_2$，再由于 $AX=0$ 的解都是 $\beta X=0$ 的解，故 $W_1=W_2$. 由第 **320** 条知秩 $A=$ 秩 B，故 β 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性表出.

322. 试证：若齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1+\cdots+a_{sn}x_n=0 \end{cases}$$

的系数矩阵的秩是 r，且 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 都是此线性方程组的解，则

秩$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t\}\leqslant n-r$.

证 设$A=(a_{ij})_{s\times n}$,且$AX=0$的解空间为W,由假设知$\dim W=n-r$,而$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t\in W$. 故

$$秩\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t\}\leqslant\dim W=n-r.$$

323. 证明:与基础解系等价的线性无关向量组也是基础解系.

证 设齐次线性方程组$AX=0$的解空间为W,$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r$是它的一个基础解系,则$W=L(\eta_1,\cdots\eta_r)$. 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$与$\eta_1,\cdots,\eta_r$等价,因此,

$$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)=L(\eta_1,\eta_2,\cdots\eta_r)=W,$$

即$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$也是一个基础解系.

324. 设$r\times n$矩阵$C=(c_{ij})$的行向量是齐次线性方程组$AX=0$的一基础解系,其中$A=(a_{ij})$是$m\times n$矩阵,$B=(b_{ij})$是r阶非奇异矩阵,则BC的行也是$AX=0$的基础解系.

证 令$C'=(\alpha_1',\cdots,\alpha_r')$,其中$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$为$C$的行向量. 由假设

$$A\alpha_i'=0(i=1,2,\cdots,n), \tag{1}$$

$$BC=\begin{bmatrix}b_{11} & \cdots & b_{1r}\\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_r\end{bmatrix}, \tag{2}$$

其中

$$\beta_k=b_{k_1}\alpha_1+\cdots+b_{kr}\alpha_r(k=1,2,\cdots,r),$$

则

$$A\beta'_k=A(b_{k_1}\alpha'_1+\cdots+b_{k_r}\alpha'_r)=0\ (k=1,2,\cdots,r).$$

这样,$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$均为$AX=0$的解. 由(2)式知$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$与$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$有相同的秩,但秩$(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)=r$,故秩$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r)=r$,从而$\beta_1,\cdots,\beta_r$也是$AX=0$的一个基础解系.

325. 设A,B都是n阶方阵,则

1) 齐次线性方程组 $ABX=0$ 与 $BX=0$ 同解的充要条件是秩$(AB)=$秩 B,这里 $X=(x_1,\cdots,x_n)'$;

2) 这两个解空间正交的充要条件是$|B|\neq0$.

证 1) 由第**251**条知.

2) 必要性 设 W_1,W_2 分别为 $ABX=0$ 和 $BX=0$ 的解空间,由于 $W_1\perp W_2$,则 $W_1\cap W_2=\{0\}$;但 $W_2\subseteq W_1$,故 $W_2=W_1\cap W_2=\{0\}$,即 $BX=0$ 仅有零解.所以$|B|\neq0$.

充分性 设$|B|\neq0$,则 $W_2=\{0\}$.故 W_1 中任意向量 α 必与 0 正交.即 $W_1\perp W_2$.

326. 设 $\xi_1,\cdots,\xi_s$ 是某个齐次线性方程组的一个基础解系,$\eta_1,\cdots,\eta_k$ 是该齐次线性方程组的 k 个线性无关的解.证明:若 $k<s$,则在 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 中必可取出 $s-k$ 个解连同 $\eta_1,\cdots,\eta_k$ 一起构成一个基础解系.

证 设 $\xi_1,\cdots,\xi_s$ 是齐次线性方程组 $AX=0$ 的基础解系,则有 $L(\xi_1,\cdots,\xi_s)=L(\eta_1,\cdots,\eta_k,\xi_1,\cdots,\xi_s)$.从而由 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_k$ 出发可增加 $s-k$ 个向量,不失一般性,使 $\eta_1,\cdots,\eta_k,\xi_1,\cdots,\xi_{s-k}$为 $\eta_1,\cdots,\eta_k,\xi_1,\cdots,\xi_s$ 的一个极大线性无关组,从而 $\eta_1,\cdots,\eta_k,\xi_1,\cdots,\xi_{s-k}$为 $AX=0$ 的基础解系.

327. 设 $A\neq0$ 是 $m\times n$ 矩阵,$b=(b_1,\cdots,b_m)'$,$A'X=0$ 的解空间为 W,证明线性方程组 $AX=b$ 有解$\Longleftrightarrow b\perp W$.

证 必要性 设 u 使 $Au=b$.$\forall\ \beta\in W$,由 $A'\beta=0$ 可推出 $\beta'A=0$.因此 $\beta'b=\beta'Au=0$,即 $b\perp W$.

充分性 $\forall\ \beta\in W$,由 $b\perp W$ 有 $\beta'b=0$.设秩$(A)=r$,A 的行向量记作 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$,不妨设 A 的前 r 行即 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性无关,则,

$$\alpha_j=k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r,\ j=r+1,\cdots,m.$$

又设

$$\beta_j=(k_1,\cdots,k_r,0,\cdots,1,\cdots,0)',$$

则 $A'\beta_j=0$,即 β_j 是 $A'X=0$ 的解.因而 $\beta'_jb=0$.

即

$$b_j=k_1b_1+\cdots+k_rb_r,\ j=r+1,\cdots,m.$$

即矩阵(A,b)中第j行是第$1,2,\cdots,r$行的线性组合$(j=r+1,\cdots,m)$，故秩$(A,b)=r=$秩A，即$AX=b$有解.

328. 设$A=(a_{ij})$是实$m\times n$矩阵，秩$A=r<n$. X_0为$AX=0$的非零解，求证：秩$(A',X_0)=r+1$.

证 秩$A'=r$，令$A'=(\beta_1,\cdots,\beta_m)$，其中$\beta_1,\cdots,\beta_m$为$A'$的列向量，不失一般性，设$A'$的前$r$列线性无关. 令$C'=(\beta_1,\cdots,\beta_r)$，则

$$r=\text{秩}(C')=\text{秩}(CC'). \tag{1}$$

用反证法，设秩$(A',X_0)=r$，那么

$$(A',X_0)=(\beta_1,\cdots,\beta_r,\beta_{r+1},\cdots,\beta_m,X_0)$$

$$(C',X_0)=(\beta_1,\cdots,\beta_r,X_0), \tag{2}$$

由假设知

$$\text{秩}(C',X_0)=\text{秩}(A',X_0)=r, \tag{3}$$

$$\therefore\quad A=\begin{bmatrix}\beta'_1\\ \vdots\\ \beta'_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C\\ \beta'_{r+1}\\ \vdots\\ \beta'_m\end{bmatrix},$$

$AX_0=0$，$\therefore CX_0=0$.

由(2)、(3)知$X_0=l_1\beta_1+\cdots+l_r\beta_r$，且$l_1,\cdots,l_r$不全为零. 因此

$$0=l_1C\beta_1+\cdots+l_rC\beta_r, \tag{4}$$

$$CC'=(C\beta_1,\cdots,C\beta_r).$$

由(4)式知秩$(CC')<r$，这与秩$CC'=r$矛盾.

$\therefore$ 秩$(A',X_0)=r+1$.

329. 设A为实矩阵，若$AX=0$有非零复数解，则它必有非零实数解.

证 设它的非零复数解为

$$\alpha=\begin{bmatrix}c_1+d_1i\\ \vdots\\ c_n+d_ni\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{bmatrix}+i\begin{bmatrix}d_1\\ \vdots\\ d_n\end{bmatrix}=C+Di,$$

其中 $C'=(c_1,\cdots c_n)$，$D'=(d_1,\cdots d_n)$，则 C，D 至少有一非零向量.

$\therefore\quad 0=A\alpha=AC+(AD)i$，从而 $AC=0$，$AD=0$.

330. 证明包含 $n+2$ 个未知量 $x_1,x_2,\cdots,x_n,x_{n+1},x_{n+2}$ 的 n 个线性齐次方程式

$$a_{i1}x_1+\cdots+a_{i,n+2}x_{n+2}=0,i=1,2,\cdots,n$$

中总可以找到两个未知量 $x_p,x_q(p<q)$，使以任意值代入之后所得的方程组恒有解存在.

证　设齐次线性方程组的系数矩阵 A 的秩为 r，则 $r\leqslant n$，自由未知量的个数等于 $n+2-r\geqslant 2$. 在这 $n+2-r$ 个自由未知量中任意找两个未知量 $x_p,x_q(p<q)$，以任意值代入之后，所得方程组恒有解存在. 由于 $n+2-r\geqslant 2$，故 x_p,x_q 总是可以找到的.

331. 设有数域 P 上的线性方程组 $AX=0$ 与 $BX=0$，其中 A，B 分别为 $m\times n$ 与 $s\times n$ 矩阵，如果它们的通解中所含自由未知量的个数之和大于 n. 证明线性方程组 $AX=0$ 与 $BX=0$ 有非零公共解.

证　设 $AX=0$ 的通解中含 r 个自由未知量，$Bx=0$ 的通解中含七个自由未知量，则 $AX=0$ 的基础解系含 r 个解向量，设为 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r$；$BX=0$ 的基础解系含 t 个解向量，设为 $\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_t$. 令

$$V_1=L(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r),\quad V_2=L(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_t).$$

则 V_1 与 V_2 分别为 $AX=0$ 和 $BX=0$ 的解空间. 于是 V_1,V_2,V_1+V_2 都是 P^n 的子空间. 若 $V_1\cap V_2=\{0\}$，则

$$维(V_1+V_2)=r+t>n,$$

这不可能，因此，$V_1\cap V_2\neq\{0\}$，故 $AX=0$ 与 $BX=0$ 有非零的公共解.

六、非齐次线性方程组解的结构

332. 非齐次线性方程组的有解判别定理是什么?

答 线性方程组 $AX=B$,其中 $A=(a_{ij})_{m\times n}$,X 和 B 分别为 $n\times 1$ 与 $m\times 1$ 矩阵.令增广矩阵为 $\overline{A}=(A,B)$.则 $AX=B$ 有解的充分必要条件是它的系数矩阵与增广矩阵有相同的秩,即秩 $A=$ 秩 $\overline{A}$.

333. 在线性方程组 $AX=B$ 中,增广矩阵 $\overline{A}=(A,B)$的秩与秩 A 的关系有几种可能?

答 只有两种可能:秩 $\overline{A}=$秩 A 或秩 $\overline{A}=$秩 $A+1$.

334. 什么是非齐次线性方程组 $AX=B$ 的解的结构?

答 非齐次线性方程组 $AX=B$ 的解的结构是:非齐次线性方程组的全部解等于它的一个特解与它的导出组的全部解的和.即若 γ_0 是非齐次线性方程组的一个解,则线性方程组的任意一个解 γ 可以表示成 γ_0 与它的导出组的某个解 η 之和,即

$$\gamma=\gamma_0+\eta$$

或

$$\gamma=\gamma_0+k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r},$$

其中 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$是导出组的一个基础解系,$k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$是数域 P 中的任意数,$r=$秩 A,n 是未知量的个数.

注 $AX=B$ 有唯一解$\Longleftrightarrow$导出组 $AX=0$ 只有零解.

335. 解线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3-x_4-x_5=-2,\\ x_1+x_2\qquad\;+2x_4-3x_5=-1,\\ \qquad\;\;2x_2+x_3-3x_4+2x_5=-1,\\ 2x_1\qquad\;+x_3+x_4-4x_5=-3.\end{cases}$$

解 对增广矩阵 $\overline{A}$ 作初等行变换化为阶梯形:

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&-1&-1&-2\\1&1&0&2&-3&-1\\0&2&1&-3&2&-1\\2&0&1&1&-4&-3\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&2&-3&-1\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&-3&2&-1\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}=B.$$

由 B 知原线性方程组的一般解为

$$\begin{cases}x_1=-1-2x_4+3x_5,\\x_2=0,\\x_3=-1+3x_4-2x_5,\end{cases}$$

其中 x_4,x_5 是自由未知量.

336. 讨论线性方程组

$$\begin{cases}(3-2\lambda)x_1+(2-\lambda)x_2+x_3=\lambda,\\(2-\lambda)x_1+(2-\lambda)x_2+x_3=1,\\x_1+x_2+(2-\lambda)x_3=1\end{cases}\quad(1)$$

解的情况,并在有解时求出其解.

解 设系数行列式为 Δ,则

$$\Delta=(\lambda-1)^2(3-\lambda).$$

1) 当 $\lambda\neq1$ 且 $\lambda\neq3$ 时,有 $\Delta\neq0$,由克莱姆法则知原线性方程组有唯一解为

$$x_1=-1,x_2=\frac{4-\lambda}{3-\lambda},x_3=\frac{1}{3-\lambda}.$$

2) 当 $\lambda=1$ 时,则(1)与下面方程同解

$$x_1+x_2+x_3=1,$$

从而原线性方程组有无穷多个解:

$$x_1=1-x_2-x_3,$$

其中 x_2, x_3 为自由未知量.

3）当 $\lambda=3$ 时，原线性方程组为

$$\begin{cases} -3x_1-x_2+x_3=3, \\ -x_1-x_2+x_3=1, \\ x_1+x_2-x_3=1. \end{cases} \tag{2}$$

从(2)的后两个方程看出此线性方程组无解，从而原方程组无解.

337. 有一堆苹果，要分给 5 只猴子. 第一只猴子来了，把苹果平均分成 5 堆，还多一个，扔了，自己拿走一堆；第二只猴子来了，又把苹果平均分成 5 堆，又多一个，扔了，自己拿走一堆；以后每只猴子来了，都如此办理. 问原来至少有多少个苹果？最后至少有多少个苹果？（李政道提供，他指出：此题用通常方法求解相当麻烦.）

解 设原来共有 x 个苹果，5 只猴子分得的苹果个数依次为 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. 则有

$$\begin{cases} x=5x_1+1, \\ 4x_1=5x_2+1, \\ 4x_2=5x_3+1, \\ 4x_3=5x_4+1, \\ 4x_4=5x_5+1. \end{cases} \tag{1}$$

将后 4 个方程两端分别加 4，再整理可得

$$\begin{cases} x_1+1=\frac{5}{4}(x_2+1), \\ x_2+1=\frac{5}{4}(x_3+1), \\ x_3+1=\frac{5}{4}(x_4+1), \\ x_4+1=\frac{5}{4}(x_5+1). \end{cases} \tag{2}$$

在(2)中，从后向前逐次代入可得

$$x_1+1=(\frac{5}{4})^4(x_5+1),$$

所以

$$x_1=(\frac{5}{4})^4(x_5+1)-1. \tag{3}$$

将(3)代入(1)中第一个方程得

$$x=5\cdot(\frac{5}{4})^4(x_5+1)-4, \tag{4}$$

由于 x 是整数，4 与 5 互素，由(4)式看出 x_5+1 必须能被 4^4 整除．即

$$x_5+1=4^4n,(n\text{ 为正整数}).$$

当 $n=1$ 时，$x_5=255$，$x=3121$．故原来至少要有 3121 个苹果，最后还剩下 1020 个苹果．

338.　证明：象棋盘上的马，从任一固定位置出发，只能经过偶数步才能跳回原处．

证　取固定位置为坐标原点，建立直角坐标系（如图 5－1）．则马共有 8 种跳法．设跳往 $A_i(i=1,2,\cdots,8)$ 位置为第 i 种跳法．

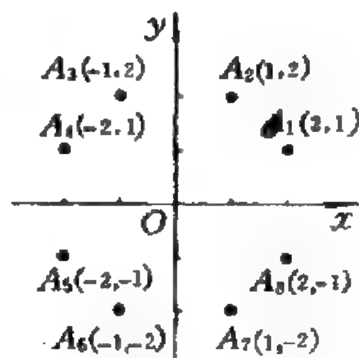


图 5－1

下面用反证法．设共用了 $2m+1$ 步回到原处，并设第 i 种跳法共跳了 x_i 次$(i=1,2,\cdots,8)$，则

$$\begin{cases}x_1(1,2)+x_2(2,1)+\cdots+x_8(-1,2)=(0,0),\\ x_1+x_2+\cdots+x_8=2m+1.\end{cases}$$

所以

$$\begin{cases}x_1+2x_2+2x_3+x_4-x_5-2x_6-2x_7-x_8=0, & (1)\\ 2x_1+x_2-x_3-2x_4-2x_5-x_6+x_7+2x_8=0, & (2)\\ x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8=2m+1. & (3)\end{cases}$$

(1)－(2)＋(3)得

$$2(x_2+2x_3+2x_4+x_5-x_7-x_8)=2m+1. \tag{4}$$

由于(4)式左边为偶数，右边为奇数，故矛盾，从而得证.

339. 线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{1}$$

有解的充分必要条件是齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}y_1+\cdots+a_{m1}y_m=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}y_1+\cdots+a_{mn}y_m=0 \end{cases} \tag{2}$$

的每个解$(c_1,\cdots,c_m)$都适合$b_1c_1+\cdots+b_mc_m=0$.

证 必要性 设(1)有解$(d_1,\cdots,d_n)$，则

$$\begin{aligned} b_1c_1+\cdots+b_mc_m&=(a_{11}d_1+\cdots+a_{1n}d_n)c_1+\cdots+(a_{m1}d_1+\cdots+a_{mn}d_n)c_m \\ &=(a_{11}c_1+\cdots+a_{m1}c_m)d_1+\cdots+(a_{1n}c_1+\cdots+a_{mn}c_m)d_n \\ &=0\cdot d_1+\cdots+0\cdot d_n=0. \end{aligned}$$

充分性 见第**321**条.

340. 设η_0是线性方程组$AX=B$的一个解，其中$B\neq 0$且η_1，$\eta_2,\cdots,\eta_t$是它的导出组$AX=0$的一个基础解系，令

$$\gamma_1=\eta_0,\gamma_2=\eta_0+\eta_1,\cdots,\gamma_{t+1}=\eta_0+\eta_t,$$

证明：1) $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_{t+1}$线性无关；

2) 线性方程组的任一解γ都可表示成

$$\gamma=u_1\gamma_1+u_2\gamma_2+\cdots+u_{t+1}\gamma_{t+1},$$

其中$u_1+u_2+\cdots+u_{t+1}=1$.

证 1) 若有一组数$k_1,k_2,\cdots,k_{t+1}$，使得

$$k_1\gamma_1+k_2\gamma_2+\cdots+k_{t+1}\gamma_{t+1}=0.$$

则

$$(k_1+k_2+\cdots+k_{t+1})\eta_0+(k_2\eta_1+k_3\eta_2+\cdots+k_{t+1}\eta_t)=0.$$

若 $k_1+k_2+\cdots+k_{t+1}\neq 0$，则 η_0 是 $AX=0$ 的解，此与题设矛盾，故 $k_1+k_2+\cdots+k_{t+1}=0$. 于是有

$$k_2\eta_1+k_3\eta_2+\cdots+k_{t+1}\eta_t=0.$$

由于 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 是基础解系，故它们线性无关，从而

$$k_2=k_3=\cdots=k_{t+1}=0, \text{故 } k_1=0.$$

2) 对于线性方程组的任一解 γ，由第 **334** 条知，γ 可以表示成

$$\begin{aligned}\gamma&=\eta_0+k_1\eta_1+\cdots+k_t\eta_t\\&=\gamma_1+k_1(\gamma_2-\gamma_1)+\cdots+k_t(\gamma_{t+1}-\gamma_1)\\&=[1-(k_1+k_2+\cdots+k_t)]\gamma_1+k_1\gamma_2+\cdots+k_t\gamma_{t+1}.\end{aligned}$$

令　$u_1=1-(k_1+k_2+\cdots+k_t), u_2=k_1,\cdots,u_{t+1}=k_t,$

则

$$\gamma=u_1\gamma_1+u_2\gamma_2+\cdots+u_{t+1}\gamma_{t+1},$$

其中　$u_1+u_2+\cdots+u_{t+1}=1.$

注　这里 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_{t+1}$ 为非齐次线性方程组解向量的一个极大线性无关组，其中 $t=n-$ 秩 A.

341.　设线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}\tag{1}$$

有解，并且添加一个方程

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b\tag{3}$$

后得到的线性方程组(2)与原线性方程组(1)同解. 证明添加的方程(3)可以由(1)经过行初等变换得到.

证　设(1)与(2)的系数矩阵和增广矩阵分别是 $A,\overline{A}$ 和 $B,\overline{B}$.

因为(1)有解，设秩 $A=$ 秩 $\overline{A}=r\neq 0$；由题设知(2)亦有解，设秩 $B=$ 秩 $\overline{B}=r_1$. 取(1)的解向量的一个极大无关组，设为 $\eta_1,\eta_2,$

$\cdots,\eta_k$. 由于(1)与(2)同解,因此 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_k$ 也是方程组(2)的解向量的极大线性无关组. 由第 **340** 条知

$$k=n-r+1=n-r_1+1,$$

故 $r=r_1$,即 $\overline{B}$ 的最后一行可由前 m 行线性表出.

342. 设线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \tag{1}$$

之系数矩阵 A 的秩等于矩阵

$$B=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_n \\ b_1 & \cdots & b_n & k \end{bmatrix}$$

的秩,其中 k 为任意常数. 试证线性方程组(1)有解.

证 令 $\overline{A}$ 为(1)的增广矩阵,则秩 $A\leqslant$ 秩 $\overline{A}\leqslant$ 秩 $B=$ 秩 A. 所以秩 $A=$ 秩 $\overline{A}$,故线性方程组(1)有解.

343. 求证线性方程组 $FX=h$ 的解全是线性方程组 $C'X=d$ 的解的充要条件为 $\begin{bmatrix} C \\ d \end{bmatrix}'$ 可用 (F,h) 的行向量线性表出(其中 C 为一列向量).

证 必要性 由 **341** 条得出.

充分性 由 **342** 条得出.

344. 设线性方程组

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=a_i,\ i=1,2,\cdots,n; \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}y_j=0,\ i=1,2,\cdots,n; \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij}z_j=a_i,\ i=1,2,\cdots,n; \tag{3}$$

其中 $\gamma_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\beta_{kj}$，且设(1)与(3)的导出组及(2)的基础解系所含向量的个数分别为 s,l,t. 求证：

1) 若(3)有解，则(1)有解；

2) $l\geqslant s, l\geqslant t$.

证　令 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，$B=(\beta_{ij})_{n\times n}$，$C=(\gamma_{ij})_{n\times n}$. $d=(a_1,\cdots,a_n)'$，则线性方程组(1)、(2)、(3)分别可改写为

$$AX=d,\quad BY=0,\quad CZ=d,\quad 且\ C=AB.$$

1) 设(3)有解 Z_0，即 $CZ_0=d$. 记 $BZ_0=X_0$，则

$$AX_0=A(BZ_0)=CZ_0=d.$$

故(1)有解 X_0.

2) 由于 $C=AB$，故秩 $C=n-l\leqslant$ 秩 $A=n-s$，$l\geqslant s$. 同样，秩 $C=n-l\leqslant$ 秩 $B=n-t$，$l\geqslant t$.

345.　设线性方程组 $AX=d$ 有解，其中 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，秩 $A=r_1$，线性方程组 $BX=c$ 无解，其中 $B=(b_{ij})_{m\times s}$，秩 $B=r_2$，证明

$$矩阵\ G=(A,B,d,c)的秩\leqslant r_1+r_2+1.$$

证　由于 $AX=d$ 有解，而秩 $A=r_1$，故增广矩阵 $\overline{A}=(A,d)$ 的秩为 r_1.

又由于 $BX=c$ 无解，而秩 $B=r_2$，故增广矩阵 $\overline{B}=(B,c)$ 的秩为 r_2+1，因而

$$\begin{aligned}秩 G&=秩(A,B,d,c)=秩(A,d,B,c)\\&=秩(\overline{A},\overline{B})\leqslant 秩\overline{A}+秩\overline{B}\\&=r_1+r_2+1.\end{aligned}$$

346.　设线性方程组 $AX=b$ 有解，问在怎样的条件下，线性方程组的任何解 X 的第 k 个分量 x_k 取同一值.

解　可以证明 A 的第 k 列不能由其余各列线性表出的充分必要条件是方程组的任何解向量的第 k 个分量都相等.

上述条件还是必要的.

因为若条件满足，可设 $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，其中 α_i 为 A 的列向量. 假若线性方程组有两个解 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_k,\cdots,x_n)$，$X^*=(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_k^*,\cdots,x_n^*)$，使 $x_k\neq x_k^*$. 记 $T=X-X^*=(t_1,t_2,\cdots,t_k,\cdots,t_n)$，$t_k\neq 0$，由 $AX=b$，$AX^*=b$，有 $A(X-X^*)=0$，即 $AT=0$，也即 $t_1\alpha_1+\cdots+t_k\alpha_k+\cdots+t_n\alpha_n=0$.

由于 $t_k\neq 0$，故 α_k 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_j,\cdots,\alpha_n(j\neq k)$ 线性表出. 此与条件不符，故线性方程组的任何解的第 k 个分量取同一值.

反过来，若线性方程组的任何解的第 k 个分量取同一值，则 α_k 不能由其余列向量线性表出. 因为若有

$$\alpha_k=t_1\alpha_1+t_2\alpha_2+\cdots+t_{k-1}\alpha_{k-1}+t_{k+1}\alpha_{k+1}+\cdots+t_n\alpha_n,$$

则令 $T=(t_1,t_2,\cdots,t_{k-1},-1,t_{k+1},\cdots,t_n)'$ 是 $AX=0$ 的解，取 $AX=b$ 的任一解 X，$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$，则 $X^*=X+T$ 也是 $AX=b$ 的解，显然 X 与 X^* 的第 k 个分量不同，矛盾.

347. 求证：$A_{n\times r}X=b$ 只有唯一解的充要条件为 A 的列线性无关.

证 由第 **334** 条知，$A_{n\times r}X=b$ 只有唯一解 $\Longleftrightarrow A_{n\times r}X=0$ 只有零解.

记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$，$X=(x_1,x_2,\cdots,x_r)'$，则 $AX=0\Longleftrightarrow x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_r\alpha_r=0$，故 $AX=0$ 只有零解等价于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关.

348. 设 A 是非零实 $m\times n$ 矩阵，b 是实 $m\times 1$ 矩阵. 证明：线性方程组 $A'AX=A'b$ 一定有解.

证 因为秩$(A'A)=$秩 A'，

$$\text{秩}(A'A)\leqslant\text{秩}(A'A,A'b)=\text{秩}\,A'(A,b)\leqslant\text{秩}\,A',$$

所以秩$(A'A,A'b)=$秩$(A'A)$，从而所给线性方程组有解.

349. 设平面上有 n 条直线

$$a_ix+b_iy+c_i=0,i=1,2,\cdots,n. \tag{1}$$

试给出它们有唯一公共交点的充要条件，并证明之.

解 令

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{bmatrix},$$

$$\overline{A}=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & -c_1 \\ a_2 & b_2 & -c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & b_n & -c_n \end{bmatrix}.$$

它们有唯一公共交点的充要条件是：

方程组(1)有唯一解$\Longleftrightarrow$秩 $A=$秩 $\overline{A}=2=$未知量个数.

350. 已知平面上三条不同直线

$$l_1:\ \alpha x+\beta y+\gamma=0,$$
$$l_2:\ \beta x+\gamma y+\alpha=0,$$
$$l_3:\ \gamma x+\alpha y+\beta=0.$$

求证：它们相交于一点的充要条件是 $\alpha+\beta+\gamma=0$.

证 设线性方程组

$$\begin{cases} \alpha x+\beta y+\gamma z=0, \\ \beta x+\gamma y+\alpha z=0, \\ \gamma x+\alpha y+\beta z=0, \end{cases} \tag{1}$$

则 l_1,l_2,l_3 相交于点 $(x_0,y_0)\Longleftrightarrow$(1)有非零解 $(x_0,y_0,1)\Longleftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix}=0\Longleftrightarrow f(1)f(\varepsilon)f(\varepsilon^2)=0,$$

其中 $f(x)=\alpha+\beta x+\gamma x^2$，$1,\varepsilon,\varepsilon^2$ 为 x^3-1 的三个根.

如果 $f(1)=0$，则结论成立.

若 $f(\varepsilon)=0$，即 $\alpha+\beta\varepsilon+\gamma\varepsilon^2=0$，用 $\varepsilon,\varepsilon^2$ 分别乘它得

$$\gamma+\alpha\varepsilon+\beta\varepsilon^2=0 \quad 和\ \beta+\gamma\varepsilon+\alpha\varepsilon^2=0,$$

三式相加得

$$(\alpha+\beta+\gamma)(1+\varepsilon+\varepsilon^2)=0,$$

$\because\quad 1+\varepsilon+\varepsilon^2\neq0,\qquad \therefore\alpha+\beta+\gamma=0.$

若 $f(\varepsilon^2)=0$，也可证明 $\alpha+\beta+\gamma=0.$

所以 l_1,l_2,l_3 相交于一点 $\Longleftrightarrow\alpha+\beta+\gamma=0.$

351. 空间四个平面

$$\alpha_ix+\beta_iy+\gamma_iz+\lambda_i=0, i=1,2,3,4,$$

相交于一点，求证

$$\Delta=\begin{vmatrix}\alpha_1&\beta_1&\gamma_1&\lambda_1\\\alpha_2&\beta_2&\gamma_2&\lambda_2\\\alpha_3&\beta_3&\gamma_3&\lambda_3\\\alpha_4&\beta_4&\gamma_4&\lambda_4\end{vmatrix}=0$$

并问它的逆是否成立？

证 设四平面相交于点 (x_0,y_0,z_0)，则齐次线性方程组

$$\alpha_ix+\beta_iy+\gamma_iz+\lambda_iu=0, i=1,2,3,4,$$

有一组非零解

$$x=x_0, y=y_0, z=z_0, u=1.$$

从而必有系数行列式 $\Delta=0.$

但逆命题不成立，比如有两平面重合时，也有 $\Delta=0.$

七、 矩阵方程介绍

352. 矩阵方程 $AX=B$ 有解的充要条件是什么？其中 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $m\times s$ 矩阵.

答 设 X 为 $n\times s$ 矩阵，令

$$X=(x_1,\cdots,x_s),\quad B=(\beta_1,\cdots,\beta_s),$$

其中 $x_1,\cdots,x_s$ 为 X 的列向量，$\beta_1,\cdots\beta_s$ 为 B 的列向量，则 $AX=B$ $\Longleftrightarrow Ax_i=\beta_i(i=1,2,\cdots,s)$，于是

$$AX=B \text{ 有解} \Longleftrightarrow Ax_i=\beta_i \text{ 都有解 } (i=1,2,\cdots,s)$$
$$\Longleftrightarrow \text{秩}(A,\beta_i)=\text{秩 } A \ (i=1,2,\cdots,s)$$
$$\Longleftrightarrow \text{秩}(A,\beta_1,\cdots,\beta_s)=\text{秩 } A$$
$$\Longleftrightarrow \text{秩}(A,B)=\text{秩 } A.$$

353. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，X 为 $n\times s$ 矩阵，则 $AX=0$ 的所有解的全体 W 构成线性空间，且 $\dim W=(n-r)^2$.

证 1) $W\subseteq P^{n\times s}$，因为 $O_{n\times s}\in W$，故 W 非空. $\forall X_1,X_2\in W$，不难证明：$kX_1+lX_2\in W$，其中 $k,l\in P$. 故 W 是线性空间.

2) 设 y 是 $n\times 1$ 矩阵，秩 $A=r$，设 $Ay=0$ 的基础解系为 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{n-r}$，那么

$$\begin{cases} \eta_{11}=(\varepsilon_1,0,\cdots,0),\cdots, & \eta_{1,n-r}=(\varepsilon_{n-r},0,\cdots,0), \\ \eta_{21}=(0,\varepsilon_1,\cdots,0),\cdots, & \eta_{2,n-r}=(0,\varepsilon_{n-r},\cdots,0), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \eta_{n-r,1}=(0,0,\cdots,\varepsilon_1),\cdots, & \eta_{n-r,n-r}=(0,\cdots,0,\varepsilon_{n-r}) \end{cases} \qquad (1)$$

为 W 的一组基，所以 $\dim W=(n-r)^2$.

注 求齐次矩阵方程 $AX=0$ 的基础解系只要求出齐次线性方程 $Ay=0$ 的基础解系，然后代入(1)式就可构造出矩阵方程 $AX=0$ 的基础解系来.

354. 设

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix},$$

$$X=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \\ x_5 & x_6 \end{bmatrix}.$$

求 $AX=0$ 的基础解系.

解 设 $Ay=0$，其中 $y'=(y_1,y_2,y_3)$，那么它与下面方程组同解：

$$y_1-y_2+2y_3=0.$$

令 $y_2=1,y_3=0$,得 $y_1=1$,$\therefore \varepsilon_1=(1,1,0)$;

令 $y_2=0,y_3=-1$,得 $y_1=2$,$\therefore \varepsilon_2=(2,0,-1)$.

代入第 **353** 条(1)式得

$$\eta_1=\begin{bmatrix}1&0\\1&0\\0&0\end{bmatrix},\eta_2=\begin{bmatrix}2&0\\0&0\\-1&0\end{bmatrix},$$

$$\eta_3=\begin{bmatrix}0&1\\0&1\\0&0\end{bmatrix},\eta_4=\begin{bmatrix}0&2\\0&0\\0&-1\end{bmatrix}.$$

即为 $AX=0$ 的解空间的一组基.

355. 设 A,B 分别为 $m\times n$ 与 $m\times s$ 矩阵,X_0 为 $AX=B$ 的特解,如果秩$(A,B)=$秩 A,那么矩阵方程 $AX=B$ 的任意一个解可表为 X_0+Y_0 形状,其中 Y_0 为 $AX=0$ 的任意一个解.

证 设 H 为 $AX=B$ 的解集,下证

$$H=\{X_0+Y_0\mid AX_0=B,Y_0 \text{ 为 } AX=0 \text{ 的任意一个解}\}. \quad (1)$$

令(1)式右端为 M,$\forall\ X_0+Y_0\in M$,那么

$$A(X_0+Y_0)=AX_0+AY_0=B+0=B.$$

$\therefore X_0+Y_0\in H$,此即 $M\subseteq H$.

反之,$\forall\ X_1\in H$,则 $AX_1=B$,那么 $A(X_1-X_0)=0$,即 X_1-X_0 是 $AX=0$ 的一个解,但 $X_1=X_0+(X_1-X_0)$,于是 $X_1\in M$,此即 $H\subseteq M$,所以 $H=M$.

356. 设

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&2\\2&-2&4\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2&3\\4&6\end{bmatrix}.$$

求 $AX=B$ 的全部解.

解 秩$(A,B)=$秩$\begin{bmatrix}1&-1&2&2&3\\2&-2&4&4&6\end{bmatrix}=1=$秩 A.

由 **352** 条知 $AX=B$ 有解.

作齐次线性方程组 $AX=0$，由 **354** 条得基础解系为 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$.

再作 $AX=B$，得

$$\begin{cases} AX=\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}, & (2)\\ AX=\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}. & (3)\end{cases}$$

设(2)、(3)的特解分别为 x_1,x_2，其中 $x'_1=(1,1,1)$，$x'_2=(3,0,0)$. 于是 $X_0=\begin{bmatrix}1&3\\1&0\\1&0\end{bmatrix}$ 为矩阵方程 $AX=B$ 的特解，这样矩阵方程的所有解为

$$X=X_0+k_1\eta_1+k_2\eta_2+k_3\eta_3+k_3\eta_4$$
$$=\begin{bmatrix}1&3\\1&0\\1&0\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}1&0\\1&0\\1&0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}2&0\\0&0\\-1&0\end{bmatrix}$$
$$+k_3\begin{bmatrix}0&1\\0&1\\0&0\end{bmatrix}+k_4\begin{bmatrix}0&2\\0&0\\0&-1\end{bmatrix},$$

其中 k_1,k_2,k_3,k_4 为任意常数.

八、 线性方程组的反问题

357. 什么叫做线性方程组的反问题?

答 线性方程组 $AX=B$ 中已知 A 为 $s\times n$ 矩阵，B 为 $s\times 1$ 矩阵，求 X. 这是线性方程组的问题.

如果已知 X 为 $n\times 1$ 矩阵，已知 B 为 $s\times 1$ 矩阵，求 A，这就是线性方程组的反问题.

358. 线性方程组的反问题有解的充要条件是什么?

答　设 $AX=B$，其中 $A=(a_{ij})_{s\times n}$ 为未知矩阵，$X'=(x_1,\cdots,x_n)$ 为已知，$B'=(b_1,\cdots,b_s)$ 也已知.

$$AX=B\text{ 有解}\Longleftrightarrow EAX=B\text{ 有解}\Longleftrightarrow$$

$$(E\otimes X')\vec{A}=\vec{B}\text{有解}\Longleftrightarrow\text{秩}(E\otimes X',B)=\text{秩}(E\otimes X').$$

其中 E 为 s 级单位阵.

359.　已知 $X'=(0,\cdots,0,1)$ 为 $1\times n$ 矩阵，$B'=(b_1,\cdots,b_n)$，而 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是未知矩阵，则线性方程组 $AX=B$ 的反问题在实对称正定矩阵类中有解的充要条件是 $b_n>0$，且在有解时，其解的形状为

$$A=\begin{bmatrix}C & \alpha\\ \alpha' & b_n\end{bmatrix}.$$

其中 $C=D+\frac{1}{b_n}\alpha\alpha'$，$D$ 为任意 $n-1$ 级对称正定阵，$\alpha'=(b_1,\cdots,b_{n-1})$.

证　必要性　设 A 为 n 级实对称正定阵，且 $AX=B$，那么

$$X'AX=X'B=(0,\cdots,1)\begin{bmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}=b_n>0.$$

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为实对称正定阵，由于 $AX=B$，即

$$\begin{bmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix},$$

从而

$$\begin{bmatrix}a_{1n}\\ \vdots\\ a_{nn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix},$$

$$\therefore A=\begin{bmatrix} C & \alpha \\ \alpha' & b_n \end{bmatrix}. \tag{1}$$

其中 $\alpha'=(b_1,\cdots,b_{n-1})$. 由于 $b_n>0$,那么只要令 $C=D+\frac{1}{b_n}\alpha\cdot\alpha'$,其中 D 为任一 $n-1$ 阶实对称正定阵,即可证得 A 为实对称正定阵,且 $AX=B$.

充分性　当 $b_n>0$ 时,取 A 如(1)式,其中 $C=D+\frac{1}{b_n}\alpha\alpha'$,$D$ 为 $n-1$ 级正定阵,则 A 为 $AX=B$ 的在实对称正定阵中的反问题的解.

360.　设 $X'=(x_1,\cdots,x_n)\neq 0$ 和 $B'=(b_1,\cdots,b_n)$已知,$A=(a_{ij})_{n\times n}$为未知矩阵,则 $AX=B$ 在实对称正定阵矩阵类中的反问题有解的充要条件是 $X'B>0$.

证　必要性　设 A 为实对称正定阵,且 $AX=B$,那么 $X'AX=X'B>0$.

充分性　因为 $X\neq 0$,则存在可逆阵 P,使 $PX=(0,\cdots,0,1)'$.

令 $\tilde{A}=(P^{-1})'AP^{-1}$,$y=Px$,$\tilde{B}=(P^{-1})'B=(\tilde{b}_1,\cdots,\tilde{b}_n)'$.

那么

$$AX=B\text{ 有解}\Longleftrightarrow\tilde{A}y=\tilde{B}\text{有解}$$
$$\Longleftrightarrow\tilde{b}_n=y'\tilde{B}=(P^{-1}y)'(P'\tilde{B})=X'B>0.$$

这样 $\tilde{A}y=\tilde{B}$的反问题在对称正定矩阵类中有解 $\tilde{A}_0$,于是 $A_0=P'\tilde{A}_0P$ 是对称正交矩阵类中 $AX=B$ 的反问题的解.

第六章　行列式

一、　定义

361.　什么叫做行列式？

答　设 $A=(a_{ij})$ 为数域 P 上的 $n\times n$ 矩阵，规定

$$|A|=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},\tag{1}$$

其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 为 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，$\tau(j_1\cdots j_n)$ 为 $j_1\cdots j_n$ 的逆序数.

注　① 行列式是 $P^{n\times n}$ 到 P 的一个映射.

② 类似地可定义

$$|A|=\sum_{j_1\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn}.\tag{2}$$

③ 还可定义

$$|A|=\sum(-1)^{\tau(i_1\cdots i_n)+\tau(j_1\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n},\tag{3}$$

其中 $i_1\cdots i_n$ 和 $j_1\cdots j_n$ 都是 $1,2,\cdots,n$ 的排列.

④ 不难证明上面(1)，(2)，(3)定义是等价的.

362.　行列式还有哪些等价定义？

答　行列式定义方法很多，主要还有以下几种：

1）归纳法.　设 $A=(a_{ij})$ 为 $n\times n$ 矩阵，当 $n=1$ 时，规定 $|A|=a_{11}$，若 $n-1$ 阶行列式已经定义，再规定

$$|A|=a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+a_{13}M_{13}+\cdots+(-1)^{n+1}a_{1n}M_{1n},$$

其中 M_{1j} 为划去 A 的第 1 行和第 j 列剩下的 $(n-1)\times(n-1)$ 矩阵的行列式.

2）差连乘符号法.　设 $A=(a_{ij})$ 为 $n\times n$ 矩阵. 规定

$$|A|=\sum_{j_1\cdots j_n}\nu_n(j_1j_2\cdots j_n)a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

其中 $\nu_n(j_1j_2\cdots j_n)=\prod_{1\leqslant i<k\leqslant n}(j_k-j_i)$，且 $j_1\cdots j_n$ 为 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列.

3）主对角线定号法. 设 $A=(a_{ij})$是 $n\times n$ 矩阵，

$$|A|=\sum(-1)^t a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

其中 t 是用逐次对换两行(或列)将 $a_{1j_1},a_{2j_2},\cdots,a_{nj_n}$这 n 个元素移到主对角线上所用对换的个数.

4）线性函数法. $n\times n$ 矩阵 A 的行列式是适合下列条件的函数：

1° $|A|$是 A 的每列的线性函数；

2° 如果 A 有两列相同，那么$|A|=0$；

3° 如果 A 的主对角元为 1，其余均为 0，则$|A|=1$.

5）化对角形法. 逐次用 A 的一行(或列)的倍数加到另一行(或列)将 A 化成对角矩阵 $\mathrm{diag}(b_1,\cdots,b_n)$，规定$|A|=b_1b_2\cdots b_n$.

注 可以证明这些定义与第 **361** 条中的定义是等价的.

363. 如果排列 $x_1x_2\cdots x_n$ 的逆序数为 I，那么排列 $x_nx_{n-1}\cdots x_1$ 的逆序数是多少？

答 由于不同的 x_i、x_j 必在且仅在 $x_1x_2\cdots x_n$ 或 $x_nx_{n-1}\cdots x_1$ 中之一构成逆序，而这两个排列的逆序总数为 $C_n^2=\dfrac{n(n-1)}{2}$，故 $x_nx_{n-1}\cdots x_1$ 的逆序数等于$\dfrac{n(n-1)}{2}-I$.

364. 按定义计算：

1）$\Delta_5=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$；

2） $\Delta_n=\begin{vmatrix} 0 & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & \iddots & & \\ a_n & & & 0 \end{vmatrix}$；

3） $\Delta_n=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

解　1）设 Δ_5 的一般项为 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}$，那么 j_3,j_4,j_5 中至少要在 3,4,5 中取一数，从而任一项中至少有一个因数为 0，所以 $\Delta_5=0$.

2） $\Delta_n=(-1)^{\tau(n\,n-1\cdots 1)}a_1a_2\cdots a_n=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_1a_2\cdots a_n$.

3） $\Delta_n=(-1)^{\tau(2\,3\cdots n\,1)}n!=(-1)^{n-1}n!$.

365.　设 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

求 D 展开后的正项总项数.

解　将 D 的最后一行分别加到其余各行，化成一个下三角形行列式，主对角线元除最后一个元素为 1 外，其余均为 2. 故 $D=2^{n-1}$.

设 D 展开后正项个数为 a，负项个数为 b，则 $a+b=n!$，$a-b=2^{n-1}$. 解得 $a=2^{n-2}+\frac{1}{2}n!$.

366.　写出下行列式 $D_5=|(a_{ij})|_{5\times 5}$ 中包含 a_{13}，a_{25} 并带正号的项.

解　在 D_5 中包含 a_{13}, a_{25} 的项为 $a_{13}a_{25}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}$. 因 j_3, j_4, j_5 都可取 1,2,4 这三个数码，所以 $35j_3j_4j_5$ 能组成的 5 元排列共有 6 个，即

$$35124;\quad 35142;\quad 35214;$$
$$35241;\quad 35412;\quad 35421.$$

故包含 a_{13}, a_{25} 并带正号的所有项为

$$a_{13}a_{25}a_{31}a_{44}a_{52},\ a_{13}a_{25}a_{32}a_{41}a_{54},\ a_{13}a_{25}a_{34}a_{42}a_{51}.$$

367.　试求下列行列式中 x^4 的系数：

$$f(x)=\begin{vmatrix} -x & 3 & 1 & 3 & 0 \\ x & 3 & 2x & 11 & 4 \\ -1 & x & 0 & 4 & 3x \\ 2 & 21 & 4 & x & 5 \\ 1 & -7x & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

解　$f(x)$ 中含 x^4 的相应的项分别为

$$(-1)^{\tau(13245)}a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}a_{55}=4x^4,$$
$$(-1)^{\tau(31542)}a_{13}a_{21}a_{35}a_{44}a_{52}=21x^4,$$

故 $f(x)$ 中 x^4 的系数为 $21+4=25$.

368.　Δ 是一个 n 级复数行列式，其元素满足 $a_{ij}=\bar{a}_{ji}(i、j=1,2,\cdots,n)$，其中 $\bar{a}_{ji}$ 表示 a_{ji} 的共轭复数，则 Δ 是一个实数.

证　因 $\overline{\Delta}=\sum\limits_{j_1\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}$

$$=\sum_{j_1\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}\bar{a}_{1j_1}\cdots\bar{a}_{1j_n},$$

故

$$\overline{\Delta}=\begin{vmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \cdots & \bar{a}_{1n} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} & \cdots & \bar{a}_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \bar{a}_{n1} & \bar{a}_{n2} & \cdots & \bar{a}_{nn} \end{vmatrix}=\Delta,$$

所以 Δ 为实数.

369. 计算

$$\sum_{j_1j_2\cdots j_n}\begin{vmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} & \cdots & a_{1j_n} \\ a_{2j_1} & a_{2j_2} & \cdots & a_{2j_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{nj_1} & a_{nj_2} & \cdots & a_{nj_n} \end{vmatrix},$$

这里 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 是对所有 n 元排列求和.

解 设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

因

$$\begin{vmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} & \cdots & a_{1j_n} \\ a_{2j_1} & a_{2j_2} & \cdots & a_{2j_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{nj_1} & a_{nj_2} & \cdots & a_{nj_n} \end{vmatrix}=(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}D,$$

又所有 n 元排列中,奇偶排列各半,从而在和中 D 带正号与带负号的个数相等,故原式等于零.

370. $$\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\begin{vmatrix} a_{11}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}a_{1j}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}a_{2j}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}a_{nj}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

证 根据行列式的每一项也可按列指标排列，再据微分法得

$$\begin{aligned} \text{左边} &= \frac{d}{dt}\sum_{i_1\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1\cdots i_n)}a_{i_1,1}(t)\cdots a_{i_n,n}(t) \\ &= \sum_{i_1\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1\cdots i_n)}\frac{d}{dt}(a_{i_1,1}(t)\cdots a_{i_n,n}(t)) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i_1,\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1\cdots i_n)}a_{i_1,1}(t)\cdots\frac{d}{dt}a_{i_j,j}(t)\cdots a_{i_n,n}(t) \\ &= \text{右边}. \end{aligned}$$

371. 设 a_{ij} 是整数，$i、j=1,2,\cdots,n$，则

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\frac{1}{2} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\frac{1}{2} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\frac{1}{2} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad (1)$$

证 1 令(1)式左边为 D，且设

$$P(x)=\begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-x \end{vmatrix},$$

则 $P(x)=(-1)x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n$，其中 b_i 为整数，如果 $D=P(\frac{1}{2})=0$，则

$$(-1)^n+2b_1+2^2b_2+\cdots+2^nb_n=(-1)^n+2m=0,$$

这里 m 为整数，但这是不可能的．故 $D=P(\frac{1}{2})\neq0$.

证 2 $D=(\frac{1}{2})^n\begin{vmatrix}2a_{11}-1 & 2a_{12} & \cdots & 2a_{1n}\\ 2a_{21} & 2a_{22}-1 & \cdots & 2a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 2a_{n1} & 2a_{n2} & \cdots & 2a_{nn}-1\end{vmatrix}$,

右端的行列式除主对角线上元素都是奇数外，其余元素都是偶数，故它的展开式中，除对角线上元素之积这一项为奇数外，其余项均为偶数．于是 $D=(\frac{1}{2})^n$(奇数)$\neq0$.

二、 性质与公式

372. 行列式有哪些基本性质？

答 设 $A=(a_{ij})$ 为 $n\times n$ 矩阵，则行列式 $|A|$ 的基本性质如下：

1) 行列式与其转置行列式相等，即 $|A|=|A'|$；

2) 用一个数乘行列式某一行(或列)，等于用这个数乘此行列式；

3) $$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & \cdots & b_n+c_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ b_1 & \cdots & b_n\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ c_1 & \cdots & c_n\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix};$$

4）对换行列式两行(或列)，行列式值反号；

5）如果行列式有以下之一情况，那么行列式值为 0：

1° 两行(或列)成比例；

2° 有一行(或列)全为 0；

6）若把行列式的某一行(或列)的 k 倍加到另一行(或列)上去，则行列式值不变；

7）$|A|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$

$=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}$；

8）任取 A 的 k 行，可构成 A 的一切可能的 k 阶子式为 $t(=C_n^k)$ 个，设为 $M_1,M_2,\cdots,M_t$. 其相应的代数余子式为 $A_1,A_2,\cdots,A_t$，则　$|A|=M_1A_1+M_2A_2+\cdots+M_tA_t$.

373.　行列式有哪些常用的公式？

答　常用公式如下：

1）范德蒙行列式，即

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i)； \tag{1}$$

2）
$$\begin{vmatrix} a_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & a_n \end{vmatrix} = a_1a_2\cdots a_n； \tag{2}$$

$$\begin{vmatrix} * & & a_1 \\ & \begin{smallmatrix} & \cdot \\ \cdot & \end{smallmatrix} & \\ a_n & & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & & a_1 \\ & \begin{smallmatrix} & \cdot \\ \cdot & \end{smallmatrix} & \\ a_n & & * \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_1a_2\cdots a_n； \tag{3}$$

3）设 A,B 分别为 n 阶和 m 阶方阵，则

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ C & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & D \\ 0 & B \end{vmatrix} = |A|\cdot|B|； \tag{4}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} D & A \\ B & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n \cdot m}|A| \cdot |B|; \quad (5)$$

4) n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = (a-b)^{n-1}[a+(n-1)b]. \quad (6)$$

374. 怎样计算行列式?

答 行列式的计算应根据具体情况具体分析,但总的原则是利用行列式的性质,将原行列式或者化为第 **373** 条中的常用公式之一,或者化为某一行(或列)只剩下一个非零元素,然后按这行(或列)展开,使之降阶.

为达到上述目的,具体施行时常会用到四个计算步骤:

1) 将行列式各行(或列)分别乘一个数统统加到某一行(或列). 比如爪型行列式:设 $a_2a_3\cdots a_n \neq 0$,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_n \\ b_2 & a_2 & & & \\ b_3 & & a_3 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ b_n & & & & a_n \end{vmatrix},$$

那么将第 i 列的 $-\frac{b_i}{a_i}$ 倍($i=2,3,\cdots,n$)统统加到第 1 列得

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{vmatrix},$$

其中 $c_1 = a_1 - \left(\frac{b_2c_2}{a_2} + \cdots + \frac{b_nc_n}{a_n}\right)$, $\quad \therefore \Delta = c_1a_2\cdots a_n$.

2) 逐行(或列)相加减,比如计算

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n\\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n & n\\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & n & n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ n & n & n & \cdots & n & n & n\end{vmatrix},$$

从第 $n-1$ 行直到第一行开始每一行乘以 -1 加到下一行，得

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 & n\\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot n.$$

3）加边法 这大多适用于某一列(或行)有一个相同的字母. 比如计算

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_1+m & a_2 & \cdots & a_n\\ a_1 & a_2+m & \cdots & a_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+m\end{vmatrix}, \tag{1}$$

添加一行一列得

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 0 & a_1+m & a_2 & \cdots & a_n\\ 0 & a_1 & a_2+m & \cdots & a_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n+m\end{vmatrix}.$$

用第一行的 (-1) 倍加到其它各行得爪型行列式:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -1 & m & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & m & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & m \end{vmatrix}, \tag{2}$$

当 $m=0$ 时，由(1)式知 $\Delta=0$.

当 $m\neq 0$ 时，在(2)式右端中将第 i 列的 $\frac{1}{m}$ 倍统统加到第一列得

$$\Delta=\begin{vmatrix} c & a_1 & \cdots & a_n \\ & m & & \\ & & \ddots & \\ & & & m \end{vmatrix}=cm^n,$$

其中 $c=1+\frac{1}{m}(a_1+\cdots+a_n)$.

4) 将某一行(或列)的倍数分别加到其它行(或列). 这一步骤上面已经用过，不再举例.

5) 按某一行展开 比如计算

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 1 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 1 & x & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ 1 & x & x & 1 & \cdots & n-3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x & x & x & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

从第 2 行开始，每行乘以 -1 加到上一行得

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1-x & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x & x & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

按最后一行展开得

$$D=(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1-x & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1-x & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & 1 \end{vmatrix}.$$

再从第 2 行开始，每行乘以 -1 加到上一行得

$$D=(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} x & & & & 0 \\ 1-x & x & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & x & \\ 0 & & & 1-x & 1 \end{vmatrix}=(-1)^{n+1}x^{n-2}.$$

三、 化三角形

375. 计算下列行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & n-3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

解 从第 $n-1$ 行开始，每行乘以 -1 加到下一行得

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 \end{vmatrix},$$

然后，将第 n 列分别加到其它各列上，得

$$D_n=\begin{vmatrix} n-1 & n & n+1 & \cdots & n-1 \\ 0 & -2 & -2 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & -2 & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}.$$

376.　计算 $\Delta_n=\begin{vmatrix} x_1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ x_1 & x_2 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$.

解　从第 $n-1$ 行开始每行乘以 -1 加到下一行得

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} x_1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & x_2-a_{12} & a_{23}-a_{13} & \cdots & a_{2n}-a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n-a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

$$=x_1(x_2-a_{12})(x_3-a_{23})\cdots(x_n-a_{n-1,n}).$$

377.　计算

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

解　将各列统统加到第1列得

$$D_{n+1}=(x+\sum_{i=1}^{n}a_i)\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 1 & x & a_2 & \cdots & a_n\\ 1 & a_2 & x & \cdots & a_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & x\end{vmatrix}.$$

将第1列的$-a_1$倍加到第2列，将第1列的$-a_2$倍加到第3列，…，将第1列$-a_n$倍加到最后一列，得

$$D_{n+1}=(x+\sum_{i=1}^{n}a_i)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & x-a_1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & x-a_2 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & x-a_n\end{vmatrix}$$

$$=(x+\sum_{i=1}^{n}a_i)\prod_{i=1}^{n}(x-a_i).$$

378.　计算

$$D_n=\begin{vmatrix}a+1 & a+2 & \cdots & a+(n-1) & a+n\\ a+2 & a+3 & \cdots & a+n & a+1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a+n & a+1 & \cdots & a+(n-2) & a+(n-1)\end{vmatrix}.$$

解　将各列统统加到第1列得

$$D_n=\left[na+\frac{n(n+1)}{2}\right]\begin{vmatrix}1 & a+2 & \cdots & a+n\\ 1 & a+3 & \cdots & a+1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & a+1 & \cdots & a+(n-1)\end{vmatrix}.$$

将第1列的$-a$倍分别加到其它各列得

$$D_n=\left[na+\frac{n(n+1)}{2}\right]\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\1&3&4&\cdots&n&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&n&1&\cdots&n-3&n-2\\1&1&2&\cdots&n-2&n-1\end{vmatrix}.$$

从第 $n-1$ 行开始，将上一行的 -1 倍加到下一行，得

$$D_n=\left[na+\frac{n(n+1)}{2}\right]\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\0&1&1&\cdots&1&1-n\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&1-n&1&\cdots&1&1\end{vmatrix}$$

$$=\left[na+\frac{n(n+1)}{2}\right]\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&1-n\\1&1&\cdots&1-n&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1-n&1&\cdots&1&1\end{vmatrix}_{n-1},$$

将最后一列与前面各列两两对换，换到第 1 列，同样将倒数第 2 列，换到第 2 列，将所有各列统加到第 1 列，得

$$D_n=\left[na+\frac{n(n+1)}{2}\right](-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\begin{vmatrix}1-n&1&\cdots&1\\1&1-n&\cdots&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&1&\cdots&1-n\end{vmatrix}.$$

再由第 **373** 条的(6)式，得

$$D_n=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\left[na+\frac{n(n+1)}{2}\right]\cdot(1-n-1)^{n-2}$$

$$[(1-n)+(n-2)]$$

$$=(-1)^{\frac{(n-2)(n+1)}{2}+1}\left[na+\frac{n(n+1)}{2}\right]n^{n-2},\ (n\geqslant 3)$$

当 $n=2$ 时，$D_2=-1$；当 $n=1$ 时，$D_1=a+1$.

379.　计算

$$\Delta_{n+1}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_n \end{vmatrix}.$$

解 将第1列乘以$-b_1$、第2列乘以$-b_2$,…第n列乘以$-b_n$统统加到最后一列得

$$\Delta_{n+1}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n & -\sum_{i=1}^{n}a_ib_i \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{n+3}\sum_{i=1}^{n}a_ib_i.$$

380. 计算

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1+x_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+x_2 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+x_n \end{vmatrix},$$

其中$x_1x_2\cdots x_n\neq 0$.

解 利用加边法,得

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1+x_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & a_2+x_2 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n+x_n \end{vmatrix}.$$

第一行乘以-1加到其它各行,得爪型行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ -1 & x_1 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -1 & 0 & 0 & \cdots & x_n\end{vmatrix}, \tag{1}$$

将第 i 列($i=2,\cdots n+1$)的$\frac{1}{x_i}$倍统统加到第 1 列得

$$D_n=x_1\cdots x_n\left(1+\frac{a_1}{x_1}+\cdots+\frac{a_n}{x_n}\right). \tag{2}$$

注 当 $x_1x_2\cdots x_n=0$ 时,(1)式右端按第 1 行展开也可得

$$D_n=x_1x_2\cdots x_n+a_1x_2\cdots x_n+x_1a_2x_3\cdots x_n+\cdots+a_nx_1\cdots x_{n-1}. \tag{3}$$

当 $x_1x_2\cdots x_n\neq0$ 时,(1)式右端按第 1 行展开还是(3)式,故本题可以统一为(3)式.

381. 计算

$$D_n=\begin{vmatrix}x_1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n\\ a_1a_2 & x_2+a_2^2 & \cdots & a_2a_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_1a_n & a_2a_n & \cdots & x_n+a_n^2\end{vmatrix},$$

其中 $x_1x_2\cdots x_n\neq0$.

解 利用加边法得

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 0 & x_1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & a_1a_n & a_2a_n & \cdots & x_n+a_n^2\end{vmatrix},$$

将第 1 行的 $-a_i$ 倍加到第 $i+1$ 行($i=1,2,\cdots,n$)得爪型行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & a_1 & \cdots & a_n\\ -a_1 & x_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -a_n & & & x_n\end{vmatrix}, \tag{1}$$

再将第 i 列的 $\frac{a_{i-1}}{x_{i-1}}$ 倍 $(i=2,\cdots,n)$ 统统加到第 1 列化成三角型行列式，得 $D_n=x_1x_2\cdots x_n(1+\frac{a_1^2}{x_1}+\cdots\frac{a_n^2}{x_n})$.

注　如果 $x_1x_2\cdots x_n=0$，那么也可按(1)式右端第 1 行展开得

$D_n=x_1x_2\cdots x_n+a_1^2x_2\cdots x_n+x_1a_2^2x_3\cdots x_n+\cdots+a_n^2x_1\cdots x_{n-1}$.

382.　计算

$$D_n=\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-2} & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}.$$

解　从第 1 行开始，每一行乘以 x 加到下一行，得

$$D_n=\begin{vmatrix} a_0 & -1 & & 0 \\ a_1+a_0x & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & 0 & & -1 \\ f(x) & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix},$$

其中 $f(x)=a_0x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-2}x+a_{n-1}$，再按最后一行展开得

$$D_n=f(x)=a_0x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-2}x+a_{n-1}.$$

383. 证明：

$$D_n=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ c_1 & b_1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & b_{n-2} & \\ & & & c_{n-1} & b_{n-1} \end{vmatrix}=mb_1b_2\cdots b_{n-1},$$

其中 $b_1b_2\cdots b_{n-1}\neq0$，且

$$m=a_0-a_1\frac{c_1}{b_1}+a_2\frac{c_1c_2}{b_1b_2}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{a_{n-1}c_1c_2\cdots c_{n-1}}{b_1b_2\cdots b_{n-1}}.$$

证　以 D_n 第 n 列的 $-\frac{c_{n-1}}{b_{n-1}}$ 倍加到第 $n-1$ 列，再在新行列式中以第 $n-1$ 列的 $-\frac{c_{n-2}}{b_{n-2}}$ 倍加到第 $n-2$ 列，…，最后在新行列式中以第 2 列的 $-\frac{c_1}{b_1}$ 倍加到第 1 列，D_n 化成三角形行列式，得

$$D_n=b_1b_2\cdots b_{n-1}\left(a_0-\frac{a_1c_1}{b_1}+\frac{a_2c_1c_2}{b_1b_2}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{a_{n-1}c_1c_2\cdots c_{n-1}}{b_1b_2\cdots b_{n-1}}\right).$$

四、　范德蒙行列式

384.　计算下面行列式：

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}.$$

解　将 Δ_3 的第 1 行加到第 3 行上，得

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{vmatrix}=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b).$$

385.　设 $a>b>c>0$，则

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ b & b^2 & ac \\ c & c^2 & ab \end{vmatrix}<0.$$

解　将 Δ_3 的第 1 列乘以 $a+b+c$ 加到第 3 列，得

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} a & a^2 & a^2+ab+bc+ca \\ b & b^2 & b^2+ab+bc+ca \\ c & c^2 & c^2+ab+bc+ca \end{vmatrix},$$

将第 2 列乘以 -1 加到第 3 列，提取公因式 $ab+bc+ca$ 得

$$\Delta_3=(ab+bc+ca)\begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(ab+bc+ca)(b-a)(c-a)(c-b)<0.$$

386. 计算：

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}.$$

解 添加一行一列，作行列式

$$f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d & x \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & x^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 & x^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 & x^4 \end{vmatrix}. \tag{1}$$

按最后一列展开，得

$$f(x)=A_{55}x^4+A_{45}x^3+A_{35}x^2+A_{25}x+A_{15},$$

其中 A_{ij} 为行列式 $f(x)$ 中第 i 行第 j 列元素的代数余子式，特别地 $D=-A_{45}$.

由范德蒙行列式，知

$$A_{55}=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c).$$

由(1)式知

$$f(a)=f(b)=f(c)=f(d)=0,$$

故 a,b,c,d 是 $f(x)$ 的四个根.

1) 当 a,b,c,d 互异时，$A_{55}\neq 0$，由韦达定理得

$$a+b+c+d=-\frac{A_{45}}{A_{55}}=\frac{D}{A_{55}}.$$

故

$$D=(a+b+c+d)(b-a)(c-a)(d-a)(d-b)(d-c).$$

2) 当 a,b,c,d 有两个相等时,$D=0$.

387. 计算

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-2} & x_3^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-2} & x_{n-1}^n \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^n \end{vmatrix}.$$

解 1 在 D_n 中加上一行和一列,配成范德蒙行列式

$$D_{n+1}(y)=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} & x_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} & x_n^n \\ 1 & y & y^2 & \cdots & y^{n-2} & y^{n-1} & y^n \end{vmatrix}.$$

它是以 $x_1,x_2,\cdots,x_n,y$ 为元素的 $n+1$ 阶范德蒙行列式,y 可视为变数,则

$$D_{n+1}(y)=\prod_{i=1}^{n}(y-x_i)\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j). \qquad (1)$$

由于 D_n 是 $D_{n+1}(y)$ 中 y^{n-1} 的系数的相反数,故由(1)式知 y^{n-1} 的系数为 $(-\sum_{i=1}^{n}x_i)\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)$. 所以

$$D_n=(\sum_{i=1}^{n}x_i)\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j).$$

解 2 假定以 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为根的 n 次方程是

$$x^n-k_1x^{n-1}+k_2x^{n-2}+\cdots+(-1)^{n-1}k_{n-1}x+(-1)^nk_n=0,$$

即

$$k_1x^{n-1}=x^n+k_2x^{n-2}-k_3x^{n-3}+\cdots+(-1)^{n-1}k_{n-1}x+(-1)^nk_n.$$

在 D_n 中用 $(-1)^nk_n$ 乘第 1 列，用 $(-1)^{n-1}k_{n-1}$ 乘第 2 列，…，用 $(-k_3)$ 乘第 $n-2$ 列，用 k_2 乘第 $n-1$ 列，都加到第 n 列，于是第 n 列就变成 $(k_1x_1^{n-1},k_1x_2^{n-1},\cdots,k_1x_n^{n-1})'$. 提取公因子 k_1 便得到以 $1,x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n$ 为(行)元素的 n 阶范德蒙行列式，又因 $k_1=\sum_{i=1}^n x_i$，故

$$D_n=(\sum_{i=1}^n x_i)\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j).$$

解 3　作线性方程组

$$\begin{cases}z_1+x_1z_2+x_1^2z_3+\cdots+x_1^{n-1}z_n=x_1^n,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ z_1+x_nz_2+x_n^2z_3+\cdots+x_n^{n-1}z_n=x_n^n.\end{cases}$$

当 $x_i\neq x_j$ 时，即当系数行列式 $D\neq0$ 时，$z_n=\frac{D_n}{D}$；另一方面，以上方程组也可看成有 n 个根 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的方程

$$t^n-z_nt^{n-1}-\cdots-z_3t^2-z_2t-z_1=0.$$

根据根与系数的关系，得 $z_n=\sum_{i=1}^n x_i$，因而

$$D_n=z_nD=(\sum_{i=1}^n x_i)\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j).$$

当 $x_i=x_j(i\neq j)$ 时，上述结论也成立.

388.　计算：

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1+\sin\varphi_1&1+\sin\varphi_2&1+\sin\varphi_3&1+\sin\varphi_4\\\sin\varphi_1+\sin^2\varphi_1&\sin\varphi_2+\sin^2\varphi_2&\sin\varphi_3+\sin^2\varphi_3&\sin\varphi_4+\sin^2\varphi_4\\\sin^2\varphi_1+\sin^3\varphi_1&\sin^2\varphi_2+\sin^3\varphi_2&\sin^2\varphi_3+\sin^3\varphi_3&\sin^2\varphi_4+\sin^3\varphi_4\end{vmatrix}.$$

解　将第 1 行的 -1 倍加到第 2 行；将新行列式的第 2 行的 -1 倍加到第 3 行；再将新行列式的第 3 行的 -1 倍加到第 4 行，

得

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \sin\psi_1 & \sin\psi_2 & \sin\psi_3 & \sin\psi_4 \\ \sin^2\psi_1 & \sin^2\psi_2 & \sin^2\psi_3 & \sin^2\psi_4 \\ \sin^3\psi_1 & \sin^3\psi_2 & \sin^3\psi_3 & \sin^3\psi_4 \end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant 4}(\sin\psi_i-\sin\psi_j).$$

389. 计算：

$$\Delta_{n-1}=\begin{vmatrix} (2n-1)^n & (2n-2)^n & \cdots & n^n & (2n)^n \\ (2n-1)^{n-1} & (2n-2)^{n-1} & \cdots & n^{n-1} & (2n)^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2n-1 & 2n-2 & \cdots & n & 2n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

解 将Δ_{n+1}的第$n+1$行依次与上一行交换到第1行，第n行依次交换到第2行，…，第2行与第1行交换，于是共经过$n+(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n+1)}{2}$次行的交换，得

$$\Delta_{n+1}=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2n-1 & 2n-2 & \cdots & n & 2n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (2n-1)^{n-1} & (2n-2)^{n-1} & \cdots & n^{n-1} & (2n)^{n-1} \\ (2n-1)^n & (2n-2)^n & \cdots & n^n & (2n)^n \end{vmatrix}.$$

再将第n列逐次对换放到第1列，第$n-1$列逐次对换放到第2列，…，共经过

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\frac{n(n-1)}{2}$$

次对换，得

$$\Delta_{n+1}=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ n & n+1 & \cdots & 2n-1 & 2n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n^n & (n+1)^n & \cdots & (2n-1)^n & (2n)^n \end{vmatrix}.$$

$$=(-1)^{n^2}1!\ 2!\ \cdots n!\ =(-1)^n1!\ 2!\ \cdots n!.$$

390. 计算 $n+1$ 阶行列式：

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & \cdots & a_1b_1^{n-1} & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & \cdots & a_2b_2^{n-1} & b_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & \cdots & a_{n+1}b_{n+1}^{n-1} & b_{n+1}^n \end{vmatrix},$$

其中 $a_1\cdots a_n\neq 0$.

解 从第 i 行提取公因式 a_i^n $(i=1,2,\cdots,n+1)$，就可得到 $n+1$ 阶范德蒙行列式，因此

$$D_{n+1}=\prod_{i=1}^{n+1}a_i^n\cdot\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n+1}\left(\frac{b_i}{a_i}-\frac{b_j}{a_j}\right)=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n+1}(b_ia_j-a_ib_j).$$

391. 计算：

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

解 令

$$A=\begin{pmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix},\ S_{n+1}=\begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \iddots & & \\ 1 & & & \end{pmatrix},$$

那么 $|A|=D_{n+1}$，$|S_{n+1}|$ 等于 1 或 -1，而

$$S_{n+1}AS_{n+1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a-n & a-(n-1) & \cdots & a-1 & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (a-n)^n & [a-(n-1)]^n & \cdots & (a-1)^n & a^n \end{pmatrix}.$$

两边取行列式得

$$D_{n+1}=n!\,(n-1)!\cdots 2!.$$

392. 计算行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix}1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n\\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n\end{vmatrix}.$$

解 添加一行一列，得

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n\\ 1 & 1+x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1 & -1 & \cdots & -1\\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}2 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n\end{vmatrix}. \qquad (1)$$

分别求(1)式右端两个行列式的值：

$$\begin{vmatrix}2 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n\end{vmatrix}=2x_1\cdots x_n\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i). \qquad (2)$$

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n\end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}(x_i-1)\cdot\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i). \qquad (3)$$

将(2)、(3)式代入(1)，得

$$D_n=[2x_1\cdots x_n-\prod_{i=1}^{n}(x_i-1)]\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i).$$

393. 设 $P_i(x)=a_{i0}x^i+a_{i1}x^{i-1}+\cdots+a_{i,i-1}x+a_{ii}$，其中 $a_{i0}\neq0$，$(i=0,1,\cdots,n-1)$，则

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} P_0(x_1) & P_0(x_2) & \cdots & P_0(x_n) \\ P_1(x_1) & P_1(x_2) & \cdots & P_1(x_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P_{n-1}(x_1) & P_{n-1}(x_2) & \cdots & P_{n-1}(x_n) \end{vmatrix}$$

$$=a_{00}a_{10}\cdots a_{n-1,0}\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j).$$

证 由假设知，

$$P_0(x)=a_{00},$$

$$P_1(x)=a_{10}x+a_{11},$$

$$P_2(x)=a_{20}x^2+a_{21}x+a_{22},$$

$$\cdots\cdots$$

$$P_{n-1}(x)=a_{n-1,0}x^{n-1}+a_{n-1,1}x^{n-2}+\cdots+a_{n-1,n-1}.$$

$P_i(x)$中的 x 依次换为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，然后代入原行列式，得

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} a_{00} & a_{00} & \cdots & a_{00} \\ a_{10}x_1+a_{11} & a_{10}x_2+a_{11} & \cdots & a_{10}x_n+a_{11} \\ a_{20}x_1^2+a_{21}x_1+a_{22} & a_{20}x_2^2+a_{21}x_2+a_{22} & \cdots & a_{20}x_n^2+a_{21}x_n+a_{22} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{j=0}^{n-1}a_{n-1,j}x_1^{n-1-j} & \sum_{j=0}^{n-1}a_{n-1,j}x_2^{n-1-j} & \cdots & \sum_{j=0}^{n-1}a_{n-1,j}x_n^{n-1-j} \end{vmatrix}.$$

将上行列式的第 i 行减去第 1 行的$\frac{a_{i-1,i-1}}{a_{00}}$倍$(i=2,3,\cdots,n)$，于是消掉各行中与第 1 行成比例的所有分行，在新行列式中，同法消掉与第 2 行成比例的所有分行，$\cdots$，如此继续，最后得

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} a_{00} & a_{00} & \cdots & a_{00} \\ a_{10}x_1 & a_{10}x_2 & \cdots & a_{10}x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,0}x_1^{n-1} & a_{n-1,0}x_2^{n-1} & \cdots & a_{n-1,0}x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$=a_{00}a_{10}\cdots a_{n-1,0}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$=a_{00}a_{10}\cdots a_{n-1,0}\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j).$$

五、 降阶法

394. 证明：

$$\begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & d \\ y & 0 & x & 0 \\ 0 & w & 0 & z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b \\ y & x \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} c & d \\ w & z \end{vmatrix}.$$

证　按行列式的第 1,3 两行展开，得

$$\begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & d \\ y & 0 & x & 0 \\ 0 & w & 0 & z \end{vmatrix}=(-1)^{1+3+1+3}\begin{vmatrix} a & b \\ y & x \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} c & d \\ w & z \end{vmatrix},$$

得证.

395. 证明：

$$\begin{vmatrix} x & y & z & w \\ a & b & c & d \\ d & c & b & a \\ w & z & y & x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x+w & y+z \\ a+d & b+c \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} x-w & y-z \\ a-d & b-c \end{vmatrix}.$$

证 令左端行列式为 D_4，将 D_4 的第 4 列加到第 1 列，第 3 列加到第 2 列，得

$$D_4=\begin{vmatrix} x+w & y+z & z & w \\ a+d & b+c & c & d \\ d+a & c+b & b & a \\ x+w & z+y & y & x \end{vmatrix},$$

再将第 1 行、第 2 行各乘以 -1 分别加到第 4 行、第 3 行，得

$$D_4=\begin{vmatrix} x+w & y+z & z & w \\ a+d & b+c & c & d \\ 0 & 0 & b-c & a-d \\ 0 & 0 & y-z & x-w \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x+w & y+z \\ a+d & b+c \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b-c & a-d \\ y-z & x-w \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x+w & y+z \\ a+d & b+c \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} x-w & y-z \\ a-d & b-c \end{vmatrix}.$$

396. 计算：

$$\Delta_5=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & w & 0 & 0 & w^2 & 0 \\ a_1 & b_1 & 1 & 1 & c_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 & w^2 & c_2 & w \\ a_3 & b_3 & 1 & w & c_3 & w^2 \\ 1 & w^2 & 0 & 0 & w & 0 \end{vmatrix},$$

其中 w 为 1 的虚立方根，即 $w^3=1$.

解 由拉普拉斯定理，在 Δ_5 中按第 1、2、6 三行展开，

$$\Delta_5=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 \\ 1 & w^2 & w \end{vmatrix}\cdot(-1)^{1+2+6+1+2+6}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w^2 & w \\ 1 & w & w^2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&w&w^2\\1&w^2&w\end{vmatrix}^2=\begin{vmatrix}3&1&1\\0&w&w^2\\0&w^2&w\end{vmatrix}^2$$

$$=9w^2(w-1)^2=9(w+w^2-2)=9(1+w+w^2-3)$$

$$=-27.$$

397.　已知 $k=4n+1$，n 为任意正整数，计算：

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&&&&&&&3\\&5&&&&&7&\\&&\ddots&&&\cdot^{\cdot^{\cdot}}&&\\&&&k&k+2&&&\\&&&k+1&k+3&&&\\&&\cdot^{\cdot^{\cdot}}&&&\ddots&&\\&6&&&&&8&\\2&&&&&&&4\end{vmatrix}.$$

解　从 Δ 的结构可知，Δ 的行数与列数之和为 $k+3$，又 Δ 的行数和列数相等，故 Δ 的阶数为 $\frac{(k+3)}{2}$. 因由第 1 行和最后一行的元素构成的 2 阶子式中不为零的子式只有一个，故可按这两行展开，得

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&3\\2&4\end{vmatrix}(-1)^{1+\frac{k+3}{2}+1+\frac{k+3}{2}}\cdot\begin{vmatrix}5&&&&&&&7\\&9&&&&&11&\\&&\ddots&&&\cdot^{\cdot^{\cdot}}&&\\&&&k&k+2&&&\\&&&k+1&k+3&&&\\&&\cdot^{\cdot^{\cdot}}&&&\ddots&&\\&10&&&&&12&\\6&&&&&&&8\end{vmatrix},$$

将上面最后行列式按其第 1 行(列)和最后一行(列)这两行(列)展开，每展开一次，Δ 的阶数降低 2，而 Δ 的阶数为 $\frac{k+3}{2}=2(n+1)$，

如此继续下去，共展开 $n+1$ 次，最后得

$$\Delta=(-2)(-2)\cdots[k(k+3)-(k+1)(k+2)]$$
$$=(-2)^{n+1}=(-2)^{\frac{k-1}{4}+1}=(-2)^{\frac{k+3}{4}}.$$

398. 设 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$，$A_{ij}$ 为 a_{ij} 在 $|A|$ 中的代数余子式，A 中第 i 列元素全换为 1 所成矩阵为 B_i，则

$$|B_i|=\sum_{j=1}^{n}A_{ji},(i=1,2,\cdots,n.)$$

证 由于 $|B_i|$ 与 $|A|$ 除 i 列元素不同外，其余元素都相同，从而 $|B_i|$ 与 $|A|$ 的第 i 列的代数余子式是相同的. 于是将 $|B_i|$ 按第 i 列展开得

$$|B_i|=A_{1i}+A_{2i}+\cdots+A_{ni}.$$

399. 证明：

1)
$$\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + x\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij},$$

其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式；

2)
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11}-a_{12} & a_{12}-a_{13} & \cdots & a_{1,n-1}-a_{1,n} & 1 \\ a_{21}-a_{22} & a_{22}-a_{23} & \cdots & a_{2,n-1}-a_{2,n} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}-a_{n2} & a_{n2}-a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1}-a_{n,n} & 1 \end{vmatrix}.$$

证 1) 将左端行列式添加一行、一列，则

$$原式=\begin{vmatrix}1 & x & x & \cdots & x\\ 0 & a_{11}+x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x\\ 0 & a_{21}+x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & a_{n1}+x & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1 & x & x & \cdots & x\\ -1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ -1 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -1 & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix},$$

按第 1 行展开，并由第 **398** 条，

$$原式=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}+x\sum_{j=1}^{n}A_{1j}+x\sum_{j=1}^{n}A_{2j}+\cdots+x\sum_{j=1}^{n}A_{nj}$$

$$=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}+x\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}.$$

2) 令 1)中的 $x=1$，则

$$\begin{vmatrix}a_{11}+1 & a_{12}+1 & \cdots & a_{1n}+1\\ a_{21}+1 & a_{22}+1 & \cdots & a_{2n}+1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1}+1 & a_{n2}+1 & \cdots & a_{nn}+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij},$$

故

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}=\begin{vmatrix}a_{11}+1 & a_{12}+1 & \cdots & a_{1n}+1\\ a_{21}+1 & a_{22}+1 & \cdots & a_{2n}+1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1}+1 & a_{n2}+1 & \cdots & a_{nn}+1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}.$$

在上式右端的第一个式子中,从第 2 列开始,每列乘以 -1 加到前一列,得

$$\begin{vmatrix} a_{11}+1 & a_{12}+1 & \cdots & a_{1n}+1 \\ a_{21}+1 & a_{22}+1 & \cdots & a_{2n}+1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}+1 & a_{n2}+1 & \cdots & a_{nn}+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}-a_{12} & a_{12}-a_{13} & \cdots & a_{1,n-1}-a_{1n} & a_{1n}+1 \\ a_{21}-a_{22} & a_{22}-a_{23} & \cdots & a_{2,n-1}-a_{2n} & a_{2n}+1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}-a_{n2} & a_{n2}-a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1}-a_{nn} & a_{nn}+1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}-a_{12} & a_{12}-a_{13} & \cdots & a_{1,n-1}-a_{1n} & a_{1n} \\ a_{21}-a_{22} & a_{22}-a_{23} & \cdots & a_{2,n-1}-a_{2n} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}-a_{n2} & a_{n2}-a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1}-a_{nn} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11}-a_{12} & a_{12}-a_{13} & \cdots & a_{1,n-1}-a_{1n} & 1 \\ a_{21}-a_{22} & a_{22}-a_{23} & \cdots & a_{2,n-1}-a_{2n} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}-a_{n2} & a_{n2}-a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1}-a_{nn} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}-a_{12} & a_{12}-a_{13} & \cdots & a_{1,n-1}-a_{1n} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}-a_{n2} & a_{n2}-a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1}-a_{nn} & 1 \end{vmatrix},$$

故

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11}-a_{12} & a_{12}-a_{13} & \cdots & a_{1,n-1}-a_{1n} & 1 \\ a_{21}-a_{22} & a_{22}-a_{23} & \cdots & a_{2,n-1}-a_{2n} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}-a_{n2} & a_{n2}-a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1}-a_{nn} & 1 \end{vmatrix}.$$

400. 如果将行列式的所有元素都加上同一个数,那么行列式的所有元素的代数余子式的和不变.

证 设

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \Delta_b = \begin{vmatrix} a_{11}+b & a_{12}+b & \cdots & a_{1n}+b \\ a_{21}+b & a_{22}+b & \cdots & a_{2n}+b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}+b & a_{n2}+b & \cdots & a_{nn}+b \end{vmatrix},$$

A_{ij}为 Δ 中 a_{ij}的代数余子式,B_{ij}为 Δ_b 中 $a_{ij}+b$ 的代数余子式,由第 **399** 条可得

$$\sum_{i,j=1}^{n} B_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11}+b-a_{12}-b & \cdots & a_{1,n-1}+b-a_{1n}-b & 1 \\ a_{21}+b-a_{22}-b & \cdots & a_{2,n-1}+b-a_{2n}-b & 1 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1}+b-a_{n2}-b & \cdots & a_{n,n-1}+b-a_{nn}-b & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11}-a_{12} & \cdots & a_{1,n-1}-a_{1n} & 1 \\ a_{21}-a_{22} & \cdots & a_{2,n-1}-a_{2n} & 1 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1}-a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1}-a_{nn} & 1 \end{vmatrix}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}.$$

401.

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_{21}-a_{11} & a_{22}-a_{12} & \cdots & a_{2n}-a_{1n} \\ a_{31}-a_{21} & a_{32}-a_{22} & \cdots & a_{3n}-a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1}-a_{n-1,1} & a_{n2}-a_{n-1,2} & \cdots & a_{nn}-a_{n-1,n} \end{vmatrix}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij},$$

其中 A_{ij}为 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$中元素 a_{ij}的代数余子式.

证 将 Δ 的第 1,2,…,$n-1$ 行都加到第 n 行上去,再将第 1,2,…,$n-2$ 行都加到第 $n-1$ 行上,…,最后将第 1 行加到第 2 行,得

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11}+(1-a_{11}) & \cdots & a_{1n}+(1-a_{1n}) \\ a_{21}+(1-a_{11}) & \cdots & a_{2n}+(1-a_{1n}) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1}+(1-a_{11}) & \cdots & a_{nn}+(1-a_{1n}) \end{vmatrix}.$$

将它们拆成 2^n 个行列式,但其中只有 $n+1$ 个不为 0,其余均为 0. 所以

$$\Delta=D+\sum_{j=1}^{n}(1-a_{1j})\sum_{i=1}^{n}A_{ij}=D+\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{ij}$$

$$=D+\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}-D=\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}.$$

402. 证明：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & -x_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & -x_n \\ y_1 & \cdots & y_n & 0 \end{vmatrix} = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}x_iy_j,$$

其中 A_{ij}是 a_{ij}在 $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 中的代数余子式.

证　设第一个行列式中$-x_i$的余子式为 M_i，M_{ij}为 a_{ij}在第二个行列式中的余子式，则

$$M_i = \sum_{j=1}^{n} y_i(-1)^{n+i}M_{ij} = \sum_{j=1}^{n} y_i(-1)^{n-j}A_{ij}.$$

将第一个行列式按最后一列展开，得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & -x_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & -x_n \\ y_1 & \cdots & y_n & 0 \end{vmatrix} = -x_1(-1)^{1+n+1}M_1 + (-x_2)(-1)^{2+n+1}M_2$$

$$+\cdots+(-x_n)(-1)^{2n+1}M_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{n+i}x_iM_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{n+i}x_i\left[\sum_{j=1}^{n} y_j(-1)^{n-j}A_{ij}\right]$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}x_iy_j.$$

403. 柯西—皮内(Cauchy—Binet)公式　设 A 和 B 分别是 $n\times m$ 和 $m\times n$ 矩阵，则

$$|AB| = \begin{cases} \displaystyle\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_n\leqslant m} \left|A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}\right| \cdot \left|B\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}\right|, & \text{当 } n\leqslant m \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } n>m \text{ 时}. \end{cases}$$

(1)

证 当 $n>m$ 时,令

$$A_1=(A,0)_{n\times n},\quad B_1=\begin{pmatrix}B\\0\end{pmatrix}_{n\times n},$$

则

$$|AB|=|A_1B_1|=|A_1||B_1|=0.$$

当 $n\leqslant m$ 时,因为

$$\begin{pmatrix}A & 0\\ -E_m & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_m & B\\ 0 & E_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & AB\\ -E_m & 0\end{pmatrix},$$

这里 E_m,E_n 分别为 m 阶、n 阶单位矩阵,所以两边取行列式得

$$\begin{vmatrix}A & 0\\ -E_m & B\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A & AB\\ -E_m & 0\end{vmatrix}. \tag{2}$$

(2)式右端的行列式按后 n 列展开,它等于 $(-1)^{m+s_1}\cdot|AB|$,其中 $s_1=(1+2+\cdots+n)+[(m+1)+\cdots+(m+n)]=2(1+\cdots+n)+nm$. 所以,(2)式右端的行列式等于 $(-1)^{(n+1)m}\cdot|AB|$.

另一方面,将(2)式左端的行列式按前 n 行展开,在 A 中取第 $j_1,\cdots,j_n$ 列所得子式 $\left|A\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n\end{pmatrix}\right|$ 的代数余子式是

$$(-1)^{s_2}|(-E(m-j_1\,j_2\cdots\,j_n),B)|, \tag{3}$$

这里 $E(m-j_1\,j_2\cdots\,j_n)$ 表示由 E_m 中划去第 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 列后所成的矩阵. 于是将(3)中行列式按前 $m-n$ 列展开得

$$(-1)^{s_2}\cdot(-1)^{m-n}\cdot(-1)^{s_3}\left|B\begin{pmatrix}j_1 & j_2 & \cdots & j_n\\ 1 & 2 & \cdots & n\end{pmatrix}\right|, \tag{4}$$

这里

$$s_2=(1+2+\cdots+n)+(j_1+j_2+\cdots+j_n),$$
$$s_3=(j_1+\cdots+j_n)+[(m-n+1)+\cdots+(m-n+n)]$$
$$=(1+\cdots+n)+(j_1+\cdots+j_n)+n(m-n).$$

故

$s_2+(m-n)+s_3=2(1+\cdots+n)+2(j_1+\cdots+j_n)+(n+1)(m-n)$.

于是(4)为

$$(-1)^{(n+1)(m-n)}\left|B\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}\right|.$$

在(2)式的两端各乘以$(-1)^{(n+1)m}$,则(2)式的左端展开式的符号是$(-1)^{-(n+1)n}=1$. 因此(1)式得证.

404.　拉格朗日(Lagrange)公式　设 $a_i,b_i(i=1,2,\cdots,n)$都是复数,则

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2\right)-\left|\sum_{i=1}^{n}a_i\bar{b}_i\right|^2=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left|det\begin{bmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{bmatrix}\right|^2. \quad (1)$$

证

$$(1)式左端=\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n}|a_i|^2 & \sum_{i=1}^{n}a_i\bar{b}_i \\ \overline{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\bar{b}_i\right)} & \sum_{i=1}^{n}|b_i|^2 \end{vmatrix}=\left|\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ b_1 & \cdots & b_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{a}_1 & \bar{b}_1 \\ & \cdots & \\ \bar{a}_n & \bar{b}_n \end{bmatrix}\right|.$$

由第 **403** 条,则

$$(1)式左端=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} \bar{a}_i & \bar{b}_i \\ \bar{a}_j & \bar{b}_j \end{vmatrix}=(1)式右端.$$

405.　设 $n\geqslant 2,a_1a_2\cdots a_n\neq 0$,计算:

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & a_1+a_2 & \cdots & a_1+a_n \\ a_2+a_1 & 0 & \cdots & a_2+a_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_n+a_1 & a_n+a_2 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

解 1　添加一行一列,得

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 0 & 0 & a_1+a_2 & \cdots & a_1+a_n\\ 0 & a_2+a_1 & 0 & \cdots & a_2+a_n\\ & \cdots & & \cdots & \\ 0 & a_n+a_1 & a_n+a_2 & \cdots & 0\end{vmatrix}_{(n+1)}$$

$$=\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ -1 & -a_1 & a_1 & \cdots & a_1\\ -1 & a_2 & -a_2 & \cdots & a_2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -1 & a_n & a_n & \cdots & a_n\end{vmatrix}.$$

在上面第二个行列式中再添加一行一列，得

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ a_1 & -1 & -a_1 & a_1 & \cdots & a_1\\ a_2 & -1 & a_2 & -a_2 & \cdots & a_2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_n & -1 & a_n & a_n & \cdots & -a_n\end{vmatrix}_{(n+2)}$$

$$=\begin{vmatrix}1 & 0 & -1 & -1 & \cdots & -1\\ 0 & 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ a_1 & -1 & -2a_1 & 0 & \cdots & 0\\ a_2 & -1 & 0 & -2a_2 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_n & -1 & 0 & 0 & \cdots & -2a_n\end{vmatrix}_{(n+2)}$$

$$=\begin{vmatrix} 1-\frac{n}{2} & \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i & 1-\frac{n}{2} & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & -2a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -2a_n \end{vmatrix}_{(n+2)}$$

$$=(-2)^n a_1 a_2 \cdots a_n \begin{vmatrix} 1-\frac{n}{2} & \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} \\ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i & 1-\frac{n}{2} \end{vmatrix}$$

$$=(-2)^{n-2}a_1a_2\cdots a_n\left[(n-2)^2-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j}{a_i}\right].$$

解 2 设 $A=\begin{bmatrix} -2a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & -2a_n \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{bmatrix},$

$B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$,则

$$D_n=|A+CEB|, \tag{1}$$

其中 E 为二阶单位矩阵.由第 **444** 条得

$$D_n=|A||E+BA^{-1}C|, \tag{2}$$

但

$$|A|=(-2)^n a_1 a_2 \cdots a_n,$$

$$|E+BA^{-1}C|=\begin{vmatrix} 1-\frac{n}{2} & -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} \\ -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i & 1-\frac{n}{2} \end{vmatrix}$$

$$=(-2)^{-2}\left[(n-2)^2-\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_j}{a_i}\right],$$

所以

$$D_n=(-1)^{n-2}\cdot a_1a_2\cdots a_n\left[(n-2)^2-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j}{a_i}\right].$$

406. 计算 n 阶行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix} \lambda & a & a & a & \cdots & a \\ b & \alpha & \beta & \beta & \cdots & \beta \\ b & \beta & \alpha & \beta & \cdots & \beta \\ \multicolumn{6}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ b & \beta & \beta & \beta & \cdots & \alpha \end{vmatrix}.$$

解 将最后一行乘-1分别加到第 i 行 $(i=2,3,\cdots,n-1)$得

$$D_n=\begin{vmatrix} \lambda & a & a & a & \cdots & a & a \\ 0 & \alpha-\beta & 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta-\alpha \\ 0 & 0 & \alpha-\beta & 0 & \cdots & 0 & \beta-\alpha \\ \multicolumn{7}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha-\beta & \beta-\alpha \\ b & \beta & \beta & \beta & \cdots & \beta & \alpha \end{vmatrix},$$

将第 i 列 $(i=2,3,\cdots,n-1)$统统加到第 n 列，得

$$D_n=\begin{vmatrix} \lambda & a & \cdots & a & (n-1)a \\ 0 & \alpha-\beta & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & \alpha-\beta & 0 \\ b & \beta & \cdots & \beta & \alpha+(n-2)\beta \end{vmatrix}.$$

再按第 1 列展开，得

$$\begin{aligned} D_n &=\lambda(\alpha-\beta)^{n-2}[\alpha+(n-2)\beta] \\ &\qquad +(-1)^{n+1}b(-1)^{n}(n-1)a(\alpha-\beta)^{n-2} \\ &=(\alpha-\beta)^{n-2}[\lambda\alpha+(n-2)\lambda\beta-(n-1)ab]. \end{aligned}$$

407. 若 n 阶方阵 A 与 B 只有第 j 列不同，则 $2^{1-n}|A+B|=|A|+|B|$.

证 设 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$,

将 $A+B$ 按第 j 列展开

$$|A+B|=(a_{1j}+b_{1j})2^{n-1}A_{1j}+\cdots+(a_{nj}+b_{nj})2^{n-1}A_{nj}, \qquad (1)$$

其中 A_{ij} 为 a_{ij} 在 $|A|$ 中的代数余子式.

$$\begin{aligned} |A|+|B| &= (a_{1j}A_{1j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}+(b_{1j}+A_{1j}+\cdots+b_{nj}A_{nj}) \\ &= (a_{1j}+b_{1j})A_{1j}+\cdots+(a_{nj}+b_{nj})A_{nj}, \end{aligned} \qquad (2)$$

由(1)、(2)可得

$$2^{1-n}|A+B|=|A|+|B|.$$

六、 拆成行列式之积(或和)

408. 证明：

$$\begin{vmatrix} \sin 2\alpha & \sin(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\gamma) \\ \sin(\beta+\alpha) & \sin 2\beta & \sin(\beta+\gamma) \\ \sin(\gamma+\alpha) & \sin(\gamma+\beta) & \sin 2\gamma \end{vmatrix}=0.$$

证 左边 $=\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \sin\alpha & \sin\beta & \sin\gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0.$

409. 求

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & \cos(\alpha_1-\alpha_2) & \cdots & \cos(\alpha_1-\alpha_n) \\ \cos(\alpha_1-\alpha_2) & 1 & \cdots & \cos(\alpha_2-\alpha_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cos(\alpha_1-\alpha_n) & \cos(\alpha_2-\alpha_n) & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

解 当 $n\geqslant 3$ 时，

$$D_n=\begin{vmatrix}\cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 & 0 & \cdots & 0\\ \cos\alpha_2 & \sin\alpha_2 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cos\alpha_n & \sin\alpha_n & 0 & \cdots & 0\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cdots & \cos\alpha_n\\ \sin\alpha_1 & \sin\alpha_2 & \cdots & \sin\alpha_n\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{vmatrix}=0,$$

而当 $n=1$ 时，$D_1=1$；当 $n=2$ 时，$D_2=\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)$.

410. 设 $s_k=\lambda_1^k+\lambda_2^k+\cdots+\lambda_n^k(k=0,1,2,\cdots)$，则

$$\begin{vmatrix}s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1}\\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-2}\end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(\lambda_i-\lambda_j)^2.$$

证 设 n 阶方阵为

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n\\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1}\end{bmatrix}$$

则

$$|A|=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(\lambda_i-\lambda_j),$$

故原式左边为 $|AA'|=|A||A'|=|A|^2=\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}(\lambda_i-\lambda_j)^2$.

411. 计算行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix}\dfrac{1-\alpha_1^n\beta_1^n}{1-\alpha_1\beta_1} & \dfrac{1-\alpha_1^n\beta_2^n}{1-\alpha_1\beta_2} & \cdots & \dfrac{1-\alpha_1^n\beta_n^n}{1-\alpha_1\beta_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \dfrac{1-\alpha_n^n\beta_1^n}{1-\alpha_n\beta_1} & \dfrac{1-\alpha_n^n\beta_2^n}{1-\alpha_n\beta_2} & \cdots & \dfrac{1-\alpha_n^n\beta_n^n}{1-\alpha_n\beta_n}\end{vmatrix}.$$

解 令行列式 D_n 所对应的矩阵为 A，显然 A 可改写为

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{n-1}\alpha_1^k\beta_1^k & \sum_{k=0}^{n-1}\alpha_1^k\beta_2^k & \cdots & \sum_{k=0}^{n}\alpha_1^k\beta_n^k \\ \sum_{k=0}^{n-1}\alpha_2^k\beta_1^k & \sum_{k=0}^{n-1}\alpha_2^k\beta_2^k & \cdots & \sum_{k=0}^{n-1}\alpha_2^k\beta_n^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{k=0}^{n-1}\alpha_n^k\beta_1^k & \sum_{k=0}^{n-1}\alpha_n^k\beta_2^k & \cdots & \sum_{k=0}^{n-1}\alpha_n^k\beta_n^k \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \\ \beta_1^2 & \beta_2^2 & \cdots & \beta_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_1^{n-1} & \beta_2^{n-1} & \cdots & \beta_n^{n-1} \end{bmatrix},$$

故　$D_n=|A|=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(\alpha_i-\alpha_j)(\beta_i-\beta_j)$.

412.　设多项式 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n(a_0\neq 0)$的 n 个根为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，称

$$D(f)=a_0^{2n-2}\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(\alpha_i-\alpha_j)^2 \tag{1}$$

为 $f(x)$的判别式，则 $f(x)$有重根的充要条件是

$$N=\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{n-1} & s_n & \cdots & s_{2n-2} \end{vmatrix}=0,$$

其中 $s_k=\alpha_1^k+\alpha_2^k+\cdots+\alpha_n^k, k=0,1,2,\cdots$

证　由第 410 条知 $N=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(\alpha_i-\alpha_j)^2$. 从而可证 $f(x)$有重根的充要条件是 $N=0$.

413.　计算

$$D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix}.$$

解 令 $D=|A|$，由于 $D=|A'|$，若令 $s=a^2+b^2+c^2+d^2$，则

$$DD'=D^2=\begin{vmatrix} s & & & \\ & s & & \\ & & s & \\ & & & s \end{vmatrix}$$

$$=(a^2+b^2+c^2+d^2)^4,$$

由于 a^4 在 D 的展开式中取正号，得

$$D=(a^2+b^2+c^2+d^2)^2.$$

414. 证明：

$$|A+uv'|=|A|+v'A^*u, \tag{1}$$

其中 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶方阵，$u'=(x_1,x_2,\cdots x_n)$，$v'=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，A^* 为 A 的伴随矩阵.

证 $$|A+uv'|=\begin{vmatrix} a_{11}+x_1y_1 & a_{12}+x_1y_2 & \cdots & a_{1n}+x_1y_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1}+x_ny_1 & a_{n2}+x_ny_2 & \cdots & a_{nn}+x_ny_n \end{vmatrix}, \tag{2}$$

将(2)式右端拆成 2^n 个 n 阶行列式之和，除那些为零的外，得

$$|A+uv'|=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_1y_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_ny_1 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11} & x_1y_2 & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & x_ny_2 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & x_1y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & x_ny_n \end{vmatrix}$$

$$=|A|+y_1\sum_{i=1}^{n}x_iA_{i1}+y_2\sum_{i=1}^{n}x_iA_{i2}+\cdots+y_n\sum_{i=1}^{n}x_iA_{in}.$$

$$= |A| + (y_1 y_2 \cdots y_n)\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= A + v' A^* u.$$

415. 计算：

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ x & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ x & x & 1 & \cdots & n-2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

解 从 D_n 的第 2 行开始，每行乘以 -1 加到上一行，然后在右下角令 $1 = x + (1-x)$，将行列式拆成两个行列式之和，那么有

$$D_n = \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 1-x & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & 0 \\ x & x & x & \cdots & x & 1-x \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1-x & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & 1 \\ x & x & x & \cdots & x & x \end{vmatrix},$$

把上式右端第 1 个行列式按最后一列展开，将后一个行列式的最后一列乘以 -1 加到其它各列，即得 $D_n = (1-x)^n + (-1)^{n-1} x^n$.

416. 计算 $n(\geqslant 2)$ 阶行列式：

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1x_1 & 2+a_2x_1 & \cdots & n+a_nx_1 \\ 1+a_1x_2 & 2+a_2x_2 & \cdots & n+a_nx_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1+a_1x_n & 2+a_2x_n & \cdots & n+a_nx_n \end{vmatrix}.$$

解 当 $n \geqslant 3$ 时，将原行列式拆成 2^n 个行列式之和，每个行列

式一定有两列成比例,所以 $D_n=0$.

当 $n=2$ 时,

$$D_2=\begin{vmatrix}1+a_1x_1 & 2+a_2x_1\\ 1+a_1x_2 & 2+a_2x_2\end{vmatrix}=(x_1-x_2)(2a_1-a_2).$$

417. 求

$$D_3=\begin{vmatrix}x & y & z\\ z & x & y\\ y & z & x\end{vmatrix}.$$

解 设 $w=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ 为 3 次单位根,则

$$\begin{vmatrix}x & y & z\\ z & x & y\\ y & z & x\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & w & w^2\\ 1 & w^2 & w\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}x+y+z & x+wy+w^2z & x+w^2y+wz\\ x+y+z & z+wx+w^2y & z+w^2x+wy\\ x+y+z & y+wz+w^2x & y+w^2z+wx\end{vmatrix}$$

$$=(x+y+z)(x+wy+w^2z)(x+w^2y+wz)\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & w & w^2\\ 1 & w^2 & w\end{vmatrix},$$

两边消去 $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & w & w^2\\ 1 & w^2 & w\end{vmatrix}$ 得

$$D_3=(x+y+z)(x+wy+w^2z)(x+w^2y+wz).$$

418. 已知 3 阶实矩阵 $A=(a_{ij})_{3\times3}$ 满足条件:

1) $a_{ij}=A_{ij}(i,j=1,2,3)$,其中 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式;

2) $a_{33}=-1$.

试求 A 的行列式的值.

解 因 $a_{ij}=A_{ij}$,有 $A^*=A'$,因此

$$AA^*=AA',\ |A|^3=|AA^*|=|AA'|=|A|^2.$$

故$|A|=0$或$|A|=1$. 但因A为实矩阵,由

$$|A|=\sum_{i=1}^{3}a_{3i}A_{3i}=\sum_{i=1}^{3}a_{3i}^2=a_{31}^2+a_{32}^2+1,\ (a_{33}=-1)$$

可知 $|A|\neq 0$,因而 $|A|=1$.

419. 设$A=(a_{ij})$是n阶可逆矩阵,A_{ij}是a_{ij}的代数余子式,则

$$\begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2n} \\ A_{32} & A_{33} & \cdots & A_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n2} & A_{n3} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}|A|^{n-2}.$$

证 因为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 1 & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & |A| & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & |A| \end{vmatrix}=a_{11}|A|^{n-1}.$$

消去$|A|$即证.

七、 作辅助行列式

420. 设n为一正整数,$a_1,a_2,\cdots,a_n$为n个实数,$f_1(x),\cdots,f_n(x)$为n个次数不大于$n-2$的实系数多项式,则

$$\begin{vmatrix} f_1(a_1) & \cdots & f_1(a_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n(a_1) & \cdots & f_n(a_n) \end{vmatrix}=0. \qquad (1)$$

证 令(1)式左边行列式为D_n,当$a_1,a_2,\cdots,a_n$有两个相等

时，则 $D_n=0$.

今设 $a_1,a_2,\cdots a_n$ 互不相等，作辅助行列式

$$D_n(x)=\begin{vmatrix} f_1(x) & f_1(a_2) & \cdots & f_1(a_n) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ f_n(x) & f_n(a_2) & \cdots & f_n(a_n) \end{vmatrix}.$$

用反证法，若 $D_n(x)\neq 0$，则 $\partial D_n(x)\leqslant n-2$，但它有 $n-1$ 个不同根为 $a_2,\cdots,a_n$，矛盾. 从而 $D_n(x)=0$. 这样就有

$$D_n(a_1)=\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_2(a_2) & \cdots & f_1(a_n) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ f_n(a_1) & f_n(a_2) & \cdots & f_n(a_n) \end{vmatrix}=0.$$

421. 计算：

$$f(x)=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_0 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ a_0 & a_1 & x & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & x \end{vmatrix},$$

其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 互不相同.

解 显然 $f(x)$ 为首项系数是 a_0 的 n 次多项式，且 $f(a_1)=0$，即 a_1 是 $f(x)$ 的一个根，因而 $(x-a_1)$ 是 $f(x)$ 的一个因式. 同理，$(x-a_2),(x-a_3),\cdots,(x-a_n)$ 也都是 $f(x)$ 的因式. 因为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 互不相等，所以 $f(x)$ 能被积 $(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$ 整除，从而有

$$f(x)=\lambda(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n).$$

比较首项系数，得 $\lambda=a_0$. 于是

$$f(x)=a_0(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n).$$

八、 递推法

422.　设数列$\{x_n\}$满足 $x_n=ax_{n-1}+b$，则

$$x_n=a^{n-1}x_1+(a^{n-2}+a^{n-3}+\cdots+a+1)b$$
$$=\begin{cases} x_1+(n-1)b, & \text{当 } a=1 \text{ 时}; \\ a^{n-1}x_1+\dfrac{a^{n-1}-1}{a-1}b, & \text{当 } a\neq1 \text{ 时}. \end{cases}$$

证　易证.

423.　设数列$\{x_n\}$满足

$$x_n+px_{n-1}+qx_{n-2}=0; \tag{1}$$

令特征方程 $x^2+px+q=0$ 的判别式为 Δ，它的两个根为 β_1,β_2，则

1）当 $\Delta=0$ 时，

$$x_n=(A+Bn)\beta_1^{n-1}, \tag{2}$$

其中 A,B 为待定常数，可由 x_1,x_2 求出；

2）当 $\Delta\neq0$ 时，

$$x_n=A\beta_1^{n-1}+B\beta_2^{n-1}, \tag{3}$$

其中 A,B 为待定常数，可由 x_1,x_2 求出.

证　可直接将(2)、(3)代入(1)式验证.

424.　计算 n 阶行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1 & \alpha & \alpha & \cdots & \alpha \\ \beta & x_2 & \alpha & \cdots & \alpha \\ \beta & \beta & x_3 & \cdots & \alpha \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta & \beta & \beta & \cdots & x_n \end{vmatrix}.$$

解

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1 & \alpha & \alpha & \cdots & \alpha & 0 \\ \beta & x_2 & \alpha & \cdots & \alpha & 0 \\ \beta & \beta & x_3 & \cdots & \alpha & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta & \beta & \beta & \cdots & \beta & x_n-\alpha \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_1 & \alpha & \alpha & \cdots & \alpha \\ \beta & x_2 & \alpha & \cdots & \alpha \\ \beta & \beta & x_3 & \cdots & \alpha \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta & \beta & \beta & \cdots & \alpha \end{vmatrix}$$

$$=(x_n-\alpha)D_{n-1}+\begin{vmatrix} x_1-\beta & \alpha-x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2-\beta & \alpha-x_3 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x_3-\beta & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta & \beta & \beta & \cdots & \alpha \end{vmatrix}$$

$$=(x_n-\alpha)D_{n-1}+\alpha\prod_{j=1}^{n-1}(x_j-\beta). \quad (1)$$

由 α,β 的对称性,类似可得

$$D_n=(x_n-\beta)D_{n-1}+\beta\prod_{j=1}^{n-1}(x_j-\alpha). \quad (2)$$

当 $\alpha\neq\beta$ 时,$(x_n-\beta)\times(1)-(x_n-\alpha)\times(2)$,得

$$D_n=\frac{\alpha\prod\limits_{j=1}^{n}(x_j-\beta)-\beta\prod\limits_{j=1}^{n}(x_j-\alpha)}{\alpha-\beta}. \quad (3)$$

当 $\alpha=\beta$ 时,由(1)式,

$$\begin{aligned} D_n&=(x_n-\alpha)D_{n-1}+\alpha\prod_{j=1}^{n-1}(x_j-\alpha) \\ &=(x_n-\alpha)\left[(x_{n-1}-\alpha)D_{n-2}+\alpha\prod_{j=1}^{n-2}(x_j-\alpha)\right]+\alpha\prod_{j=1}^{n-1}(x_j-\alpha) \\ &=\cdots=\prod_{j=1}^{n}(x_j-\alpha)+\alpha\sum_{j=1}^{n}\left[\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}(x_i-\alpha)\right]. \quad (4) \end{aligned}$$

425.　计算 n 阶行列式:

1) $D_n=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ -a & x & a & \cdots & a & a \\ -a & -a & x & \cdots & a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a & -a & -a & \cdots & -a & x \end{vmatrix}$;

2) $D_n=\begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y & y \\ z & x & y & \cdots & y & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z & z & z & \cdots & z & x \end{vmatrix}$.

解 1) 当 $a=0$ 时，$D_n=x^n$.

当 $a\neq0$ 时，由第 **424** 条(3)式，得

$$D_n=\frac{1}{2}[(x+a)^n+(x-a)^n].$$

2) 当 $y=z$ 时，由第 **373** 条，得

$$D_n=(x-y)^{n-1}[x+(n-1)y].$$

当 $y\neq z$ 时，由第 **424** 条(3)式，得

$$D_n=\frac{y(x-z)^n-z(x-y)^n}{y-z}.$$

426 计算 n 阶行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & x_2 & a_2b_3 & \cdots & a_2b_n \\ a_3b_1 & a_3b_2 & x_3 & \cdots & a_3b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & a_nb_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix}.$$

解 $D_n=\begin{vmatrix} x_1-a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots & a_1b_n \\ 0 & x_2 & a_2b_3 & \cdots & a_2b_n \\ 0 & a_3b_2 & x_3 & \cdots & a_3b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_nb_2 & a_nb_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$

$$+a_1b_1\begin{vmatrix} 1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ a_2 & x_2 & a_2b_3 & \cdots & a_2b_n \\ a_3 & a_3b_2 & x_3 & \cdots & a_3b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & a_nb_2 & a_nb_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

$$=(x_1-a_1b_1)D_{n-1}$$

$$+a_1b_1\begin{vmatrix} 1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ 0 & x_2-a_2b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x_3-a_3b_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n-a_nb_n \end{vmatrix}$$

$$=(x_1-a_1b_1)D_{n-1}$$
$$+a_1b_1(x_2-a_2b_2)(x_3-a_3b_3)\cdots(x_n-a_nb_n),$$

$$D_{n-1}=(x_2-a_2b_2)D_{n-2}+a_2b_2(x_3-a_3b_3)\cdots(x_n-a_nb_n).$$

$$D_n=a_1b_1(x_2-a_2b_2)(x_3-a_3b_3)\cdots(x_n-a_nb_n)$$
$$+a_2b_2(x_1-a_1b_1)(x_3-a_3b_3)\cdots(x_n-a_nb_n)$$
$$+(x_1-a_1b_1)(x_2-a_2b_2)D_{n-2}$$
$$=a_1b_1(x_2-a_2b_2)\cdots(x_n-a_nb_n)$$
$$+a_2b_2(x_1-a_1b_1)(x_3-a_3b_3)\cdots(x_n-a_nb_n)$$
$$+a_{n-2}b_{n-2}(x_1-a_1b_1)\cdots(x_{n-3}-a_{n-3}b_{n-3})$$
$$\cdot(x_{n-1}-a_{n-1}b_{n-1})(x_n-a_nb_n)$$
$$+(x_1-a_1b_1)\cdots(x_{n-2}-a_{n-2}b_{n-2})D_2,$$

其中 $D_2=x_{n-1}x_n-a_{n-1}b_{n-1}a_nb_n$.

427.　计算 n 阶行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix} 1-a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_n \end{vmatrix}.$$

解　将最后一列的元素看成是两项的和：

$$D_n=\begin{vmatrix}1-a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ -1 & 1-a_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1-a_3 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a_{n-1} & a_n\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & -a_n\end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix}1-a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ -1 & 1-a_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1-a_3 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a_{n-1} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1\end{vmatrix}. \tag{1}$$

(1)式右端第一个行列式从最后一行开始，将它的第 i 行加到第 $i-1$ 行($i=2,3,\cdots,n$)；第二个行列式按最后一列展开得

$$D_n=(-1)^n a_1a_2\cdots a_n+D_{n-1}. \tag{2}$$

由(2)式有

$$D_{n-1}=(-1)^{n-1}a_1a_2\cdots a_{n-1}+D_{n-2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$D_2=1-a_1+a_1a_2.$$

所以

$$D_n=1-a_1+a_1a_2+\cdots+(-1)^n a_1a_2\cdots a_n.$$

428. 计算：

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix}a & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ ax & a & -1 & 0 & \cdots & 0\\ ax^2 & ax & a & -1 & \cdots & 0\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ ax^n & a^nx^{n-1} & ax^{n-2} & ax^{n-3} & \cdots & a\end{vmatrix}.$$

解 1　按第 1 行展开得

$$D_{n+1}=aD_n+(-1)^{1+2}(-1)xD_n=(x+a)D_n=(x+a)^2D_{n-1}$$
$$=\cdots=(x+a)^{n-1}D_2=a(x+a)^n.$$

解 2 提出第 1 列的公因子 a，再将第 1 列加到第 2 列，得

$$D_{n+1}=a\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ x & a+x & -1 & \cdots & 0\\ x^2 & x(a+2) & a & \cdots & 0\\ x^n & x^{n-1}(a+x) & ax^{n-2} & \cdots & a\end{vmatrix}$$

$$=a(x+a)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ x & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0\\ x^2 & x & a & -1 & \cdots & 0\\ x^n & x^{n-1} & ax^{n-2} & ax^{n-3} & \cdots & a\end{vmatrix}$$

$$=\cdots=a(x+a)^n\begin{vmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ x & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x^n & x^{n-1} & \cdots & 1\end{vmatrix}$$

$$=a(x+a)^n.$$

429. 计算：

$$D_n=\begin{vmatrix}1+x & y & & \\ z & 1+x & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & y\\ & & z & 1+x\end{vmatrix},$$

其中 $x=yz$.

解 按第 1 行展开得

$$D_n=(1+x)D_{n-1}-yzD_{n-2}=(1+yz)D_{n-1}-yzD_{n-2},$$

$$D_n-D_{n-1}=yz(D_{n-1}-D_{n-2})=\cdots$$
$$=(yz)^{n-2}(D_2-D_1)=(yz)^n.$$

所以

$$D_{n-1}-D_{n-2}=(yz)^{n-1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$D_2 - D_1 = (yz)^2.$$

将这些式子统统加起来，得

$$D_n - D_1 = (yz)^2 + (yz)^3 + \cdots + (yz)^n,$$

所以

$$D_n = D_1 + (yz)^2 + \cdots + (yz)^n = 1 + yz + \cdots + (yz)^n$$
$$= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n.$$

430. 计算行列式：

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} x-y_1 & y_2 & & & \\ -x & x-y_2 & y_3 & & \\ & -x & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & y_n \\ & & & -x & x-y_n \end{vmatrix}.$$

解 将 Δ_n 按第 n 行展开，得

$$\Delta_n = (x - y_n)\Delta_{n-1} + xy_n\Delta_{n-2}.$$

$$\begin{aligned}\Delta_n - x\Delta_{n-1} &= (-y_n)(\Delta_{n-1} - x\Delta_{n-2}) \\ &= (-y_n)(-y_{n-1})(\Delta_{n-2} - x\Delta_{n-3}) \\ &= \cdots = (-y_n)(-y_{n-1})\cdots(-y_3)(\Delta_2 - x\Delta_1) \\ &= (-1)^n y_1y_2\cdots y_n,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_n &= (-1)^n y_1y_2\cdots y_n + x\Delta_{n-1} \\ &= (-1)^n y_1y_2\cdots y_n + (-1)^{n-1}xy_1y_2\cdots y_{n-1} + x^2\Delta_{n-2} \\ &= \cdots = (-1)^n y_1y_2\cdots y_n + (-1)^{n-1}y_1y_2\cdots y_{n-1}x \\ &\quad + (-1)^{n-2}y_1y_2\cdots y_{n-2}x + \cdots + (-1)y_1x^{n-1} + x^n.\end{aligned}$$

431. 证明柯西 (Cauchy)公式：

$$D_n=\begin{vmatrix}\frac{1}{x_1+y_1} & \frac{1}{x_1+y_2} & \cdots & \frac{1}{x_1+y_n}\\ \frac{1}{x_2+y_1} & \frac{1}{x_2+y_2} & \cdots & \frac{1}{x_2+y_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{1}{x_n+y_1} & \frac{1}{x_n+y_2} & \cdots & \frac{1}{x_n+y_n}\end{vmatrix}=\frac{\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)(y_i-y_j)}{\prod\limits_{i=1}^{n}\prod\limits_{j=1}^{n}(x_i+y_j)} \tag{1}$$

证　将 D_n 的每一行分别减去第 n 行，并提取每一列公因子及前 $n-1$ 行的公因子，得

$$D_n=\prod_{i=1}^{n-1}(x_n-x_i)\cdot\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{x_n+y_j}\begin{vmatrix}\frac{1}{x_1+y_1} & \frac{1}{x_1+y_2} & \cdots & \frac{1}{x_1+y_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{1}{x_{n-1}+y_1} & \frac{1}{x_{n-1}+y_2} & \cdots & \frac{1}{x_{n-1}+y_n}\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{vmatrix}$$

将第 n 列乘以 -1 分别加到各列，再按第 n 行展开，得

$$D_n=\frac{\prod\limits_{i=1}^{n-1}(x_n-x_i)(y_n-y_i)}{\prod\limits_{i=1}^{n}(x_n+y_i)\prod\limits_{j=1}^{n-1}(x_j+y_n)}\cdot D_{n-1}.$$

再由归纳法即可证(1)式.

432.　计算 n 阶行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix}\alpha+\beta & \alpha\beta & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \alpha\beta\\ & & 1 & \alpha+\beta\end{vmatrix},\qquad(\alpha\neq0).$$

解 按第1列展开，得

$$D_n=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2}.$$

作特征方程 $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$，解得 $x_1=\alpha,x_2=\beta$.

1）当 $\alpha=\beta$ 时，由第**423**条，得

$$D_n=(A+Bn)\alpha^{n-1}. \tag{1}$$

当 $n=1$ 时，$D_1=\alpha+\beta=2\alpha=A+B.$ (2)

当 $n=2$ 时，$D_2=\begin{vmatrix}\alpha+\beta & \alpha\beta\\ 1 & \alpha+\beta\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2\alpha & \alpha^2\\ 1 & 2\alpha\end{vmatrix}$

$$=3\alpha^2=(A+2B)\alpha.$$

所以

$$3\alpha=A+2B. \tag{3}$$

由(2)、(3)解得 $A=B=\alpha$，所以 $D_n=(n+1)\alpha^n$.

2）当 $\alpha\neq\beta$ 时，由第**423**条，得

$$D_n=A\alpha^{n-1}+B\beta^{n-1}. \tag{4}$$

当 $n=1$ 时，

$$\alpha+\beta=A+B. \tag{5}$$

当 $n=2$ 时，

$$D_2=\begin{vmatrix}\alpha+\beta & \alpha\beta\\ 1 & \alpha+\beta\end{vmatrix}=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta=\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta=A\alpha+B\beta. \tag{6}$$

由(5)、(6)解得

$$A=\frac{\alpha^2}{\alpha-\beta},\quad B=\frac{-\beta^2}{\alpha-\beta}.$$

代入(4)得

$$D_n=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}.$$

433. 计算：

$$D_n=\begin{vmatrix}0&1&&&\\1&0&1&&\\&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&0&1\\&&&1&0\end{vmatrix}.$$

解 令 $\alpha\beta=1,\alpha+\beta=0$，则 α,β 为方程 $x^2+1=0$ 的两根，故 $\alpha=i,\beta=-i(i=\sqrt{-1})$. 由第 **423** 条，得

$$D_n=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}=\frac{(i)^{n+1}-(-i)^{n+1}}{2i}$$

$$=\frac{i^n[1+(-1)^n]}{2}=\begin{cases}0, & n\text{ 为奇数；}\\(-1)^{\frac{n}{2}}, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$$

434. 计算：

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&&&\\1&1&1&&\\&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&\ddots&1\\&&&1&1\end{vmatrix}.$$

解 令 $\alpha+\beta=1,\alpha\beta=1$，则 α,β 为方程 $x^2-x+1=0$ 的两个根，求之得 $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2},\beta=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$.

为化简结果，设 $x^2+x+1=0$ 的两根为 x_1,x_2，则

$$x_1=-\frac{(1-\sqrt{3}i)}{2}=-\beta,\ x_2=-\frac{(1+\sqrt{3}i)}{2}=-\alpha.$$

由 $x_1{}^3=1,x_2{}^3=1$ 推出 $\alpha^3=\beta^3=-1$, $\beta^{3k}=\alpha^{3k}=(-1)^k$，故

$$D_n=\begin{cases}\dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}=\dfrac{(-1)^k-(-1)^k}{\alpha-\beta}=0, & \text{当 } n=3k-1\text{ 时；}\\[2ex]\dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}=\dfrac{(-1)^k(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta}=(-1)^k, & \text{当 } n=3k\text{ 时；}\\[2ex]\dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}=\dfrac{(-1)^k(\alpha^2-\beta^2)}{\alpha-\beta}=(-1)^k, & \text{当 } n=3k+1\text{ 时}.\end{cases}$$

进一步化简,有

$$D_n=\begin{cases}0, & 当 n=6t+2 或 n=6t+5 时;\\ -1, & 当 n=6t+3 或 n=6t+4 时;\\ 1, & 当 n=6t+1 或 n=6t 时.\end{cases}$$

435.　证明:n 阶行列式

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ c & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & c & a & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c & a & b\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c & a\end{vmatrix}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{(a+\sqrt{a^2-4bc})^{n+1}-(a-\sqrt{a^2-4bc})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{a^2-4bc}}, & 当 a^2\neq 4bc 时;\\ (n+1)\left(\dfrac{a}{2}\right)^n, & 当 a^2=4bc 时.\end{cases}$$

证　1) 当 $bc=0$ 时,显然 $\Delta_n=a^n$.

2) 当 $bc\neq 0$ 时,则 $c\neq 0$. 各列提取公因式 c,得

$$\Delta_n=c^n\begin{vmatrix}\frac{a}{c} & \frac{b}{c} & & \\ 1 & \frac{a}{c} & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \frac{b}{c}\\ & & 1 & \frac{a}{c}\end{vmatrix}.$$

令 $\alpha+\beta=\dfrac{a}{c}$,$\alpha\beta=\dfrac{b}{c}$,解方程 $x^2-\dfrac{a}{c}x+\dfrac{b}{c}=0$,求出两根 α,β 为　$\alpha=\dfrac{a+\sqrt{a^2-4bc}}{2c}$,　$\beta=\dfrac{a-\sqrt{a^2-4bc}}{2c}$.

由第 432 条便知等式成立.

436. 计算行列式：

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 1 & C_1^1 & 0 & \cdots & 0 & x\\ 1 & C_2^1 & C_2^2 & \cdots & 0 & x^2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & C_n^1 & C_n^2 & \cdots & C_n^{n-1} & x^n\end{vmatrix}.$$

解 从第 $n-1$ 行开始，每行乘以 -1 加到下一行，并注意到等式 $C_n^k=C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1}$，则

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & x-1\\ 0 & 1 & C_1^1 & \cdots & 0 & x^2-x\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 1 & C_{n-1}^1 & \cdots & C_{n-1}^{n-2} & x^n-x^{n-1}\end{vmatrix}$$

$$=(x-1)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 1 & C_1^1 & 0 & \cdots & 0 & x\\ 1 & C_2^1 & C_2^2 & \cdots & 0 & x^2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & C_{n-1}^1 & C_{n-1}^2 & \cdots & C_{n-1}^{n-2} & x^{n-1}\end{vmatrix}$$

$$=(x-1)D_n=(x-1)^2D_{n-1}=\cdots$$

$$=(x-1)^{n-1}D_2=(x-1)^n.$$

437. 计算行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & C_2^1 & C_2^2 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & C_n^1 & C_n^2 & C_n^3 & \cdots & C_n^{n-1}\end{vmatrix}.$$

解 从第 $n-1$ 行开始，每行乘以 -1 加到下一行，并利用恒等式 $C_n^k=C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1}$，得

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & C_2^1 & C_2^2 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 1 & C_{n-1}^1 & C_{n-1}^2 & \cdots & C_{n-1}^{n-2}\end{vmatrix}=D_{n-1}.$$

继续递推下去，得

$$D_n=D_{n-1}=\cdots=D_2=1.$$

438. 计算

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & C_2^1 & C_3^1 & \cdots & C_n^1\\ 1 & C_3^2 & C_4^2 & \cdots & C_{n+1}^2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & C_{n-1}^{n-2} & C_n^{n-2} & \cdots & C_{2n-3}^{n-2}\\ 1 & C_n^{n-1} & C_{n+1}^{n-1} & \cdots & C_{2n-2}^{n-1}\end{vmatrix}.$$

解 从第 $n-1$ 行开始每行乘(-1)加到下一行并利用 $C_{i+1}^k-C_i^{k-1}=C_i^k$，得

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & C_1^1 & C_2^1 & \cdots & C_{n-1}^1\\ 0 & C_2^2 & C_3^2 & \cdots & C_n^2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & C_{n-2}^{n-2} & C_{n-1}^{n-2} & \cdots & C_{2n-4}^{n-2}\\ 0 & C_{n-1}^{n-1} & C_n^{n-1} & \cdots & C_{2n-3}^{n-1}\end{vmatrix}=D_{n-1},$$

继续递推下去，即得 $D_n=1$.

439. 计算：

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} n!a_0 & (n-1)!a_1 & (n-2)!a_2 & \cdots & a_n \\ -n & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -(n-1) & x & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

解 按第 1 列展开，得

$$D_{n+1}=n!a_0x^n+n\begin{vmatrix} (n-1)!a_1 & (n-2)!a_2 & \cdots & a_n \\ -(n-1) & x & \cdots & 0 \\ 0 & -(n-2) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$=n!a_0x^n+nD_n$$

$$=n!a_0x^n+n[(n-1)!a_1x^{n-1}+(n-1)D_{n-2}]$$

$$=n!(a_0x^n+a_1x^{n-1})+n(n-1)D_{n-2}$$

$$=\cdots=n!(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n).$$

注 按第 1 行展开即可得结论.

九、 数学归纳法

440.

$$D_n=\begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & & \\ 1 & 2\cos\theta & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}=\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}. \qquad (1)$$

证 对阶数 n 用数学归纳法.

当 $n=1$ 时，(1)式显然成立. 今归纳假定对阶数小于 n 的行列式(1)式成立，下证对于阶数等于 n 的行列式(1)式也成立. 事实上，按第一行展开得

$$\Delta_n=2\cos\theta\Delta_{n-1}-\Delta_{n-2}$$

$$=2\cos\theta\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}-\frac{\sin(n-1)\theta}{\sin\theta}$$

$$=\frac{1}{\sin\theta}[2\cos\theta\sin n\theta-\sin(n-1)\theta]$$

$$=\frac{1}{\sin\theta}[\sin(n+1)\theta+\sin(n-1)\theta-\sin(n-1)\theta]$$

$$=\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}.$$

441. 证明：

$$D_n=\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & & \\ 1 & 2\cos\alpha & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}=\cos n\alpha. \tag{1}$$

证 对阶数 n 用数学归纳法.

当 $n=1$ 时结论显然成立.令归纳假设结论对小于 n 的行列式(1)式成立,那么可以证明对于阶数等于 n 的行列式(1)式也成立.事实上,

按最后一行展开,得

$$\begin{aligned}D_n&=2\cos\alpha D_{n-1}-D_{n-2}=2\cos\alpha\cos(n-1)\alpha-\cos(n-2)\alpha\\&=[\cos n\alpha+\cos(n-2)\alpha]-\cos(n-2)\alpha=\cos n\alpha.\end{aligned}$$

十、 主对角严格占优

442. 设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶实方阵,则

1) 当 $|a_{ii}|>\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|\ (i=1,2,\cdots,n)$ 时,$|A|\neq 0$;

2) 当 $a_{ii}>\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|\ (i=1,2,\cdots,n)$ 时,$|A|>0$.

证 1) 令 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 为 A 的列向量.用反证法,若 $|A|=0$,则 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 线性相关,即存在不全为零的 $k_1,\cdots,k_n$,使

$$k_1\beta_1+\cdots+k_n\beta_n=0. \tag{1}$$

令 $k=\max\{|k_1|,\cdots,|k_n|\}>0$. 不妨设 $k=|k_i|$.

那么由(1)式,

$$\beta_i=\sum_{j\neq i}-(\frac{k_j}{k_i})\beta_j, \tag{2}$$

从而有

$$a_{ii}=\sum_{j\neq i}(-\frac{k_j}{k_i}a_{ij}).$$

所以
$$|a_{ii}|\leqslant\sum_{j\neq i}|\frac{k_j}{k_i}||a_{ij}|\leqslant\sum_{j\neq i}|a_{ij}|.$$

这与假设矛盾. $\therefore |A|\neq 0$.

2) 设 $0\leqslant t\leqslant 1$,作新行列式

$$D(t)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}t & \cdots & a_{1n}t \\ a_{21}t & a_{22} & \cdots & a_{2n}t \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}t & a_{n2}t & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

显然当 $t\in[0,1]$时,$D(t)$仍是主对角线严格占优,从而 $D(t)\neq 0$.

其次将 $D(t)$展开以后,它是 t 的连续函数. 而 $D(0)=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}>0$.

用反证法. 若$|A|<0$,则 $D(1)<0$. 从而存在 $t_1\in(0,1)$,使 $D(t_1)=0$,这与 $D(t)\neq 0$ 矛盾.

十一、 降阶定理

443. 第一降阶定理(Schur):设 A 和 D 分别为 n 阶和 m 阶方阵,则

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=\begin{cases} |A||D-CA^{-1}B|, & \text{当 } A \text{ 可逆时;} \\ |D||A-BD^{-1}C|, & \text{当 } D \text{ 可逆时.} \end{cases}$$

证 当 A 可逆时,

$$\begin{bmatrix} E & 0 \\ -CA^{-1} & E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{bmatrix},$$

两边取行列式,得

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{vmatrix} = |A|\,|D-CA^{-1}B|, \qquad (2)$$

类似地,当 D 可逆时,

$$\begin{bmatrix} E & -BD^{-1} \\ 0 & E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A-BD^{-1}C & 0 \\ C & D \end{bmatrix},$$

故

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A-BD^{-1}C & 0 \\ C & D \end{vmatrix} = |D|\,|A-BD^{-1}C|. \qquad (3)$$

444. 第二降阶定理 设 A 是 n 阶可逆矩阵,D 是 m 阶可逆矩阵,B 和 C 分别为 $n\times m$ 和 $m\times n$ 矩阵,则

$$|D-CA^{-1}B| = \frac{|D|}{|A|}|A-BD^{-1}C|. \qquad (4)$$

证 由第 443 条立即可获证.

445. 第三降阶定理 设 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$的某一个 k 阶顺序主子式 $\Delta_k\neq0$,则

$$|A| = \frac{|S|}{\Delta_k^{n-k-1}}, \qquad (5)$$

其中

$$S = \begin{bmatrix} s_{k+1,k+1} & \cdots & s_{k+1,n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ s_{n,k+1} & \cdots & s_{nn} \end{bmatrix},$$

$$s_{ij} = \left| A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k_i \\ 1 & 2 & \cdots & k_j \end{pmatrix} \right|, i、j=k+1,\cdots,n. \qquad (6)$$

证 将 A 分块为

$$A = \begin{bmatrix} A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k \\ 1 & 2 & \cdots & k \end{pmatrix} & B \\ C & A\begin{pmatrix} k+1, & \cdots & n \\ k+1, & \cdots & n \end{pmatrix} \end{bmatrix},$$ 则由第 443 条得

$$|A|=\Delta_k\left|A\begin{pmatrix}k+1, & \cdots & n\\ k+1, & \cdots & n\end{pmatrix}-CA\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & k\\ 1 & 2 & \cdots & k\end{pmatrix}^{-1}B\right|. \quad (7)$$

令

$$\begin{bmatrix}d_{k+1,k+1} & \cdots & d_{k+1,n}\\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\\ d_{n,k+1} & \cdots & d_{nn}\end{bmatrix}=A\begin{pmatrix}k+1, & \cdots & n\\ k+1, & \cdots & n\end{pmatrix}-CA\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & k\\ 1 & 2 & \cdots & k\end{pmatrix}^{-1}B, \quad (8)$$

$C=\begin{bmatrix}\alpha_{k+1}\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}$, $B=(\beta_{k+1},\cdots,\beta_n)$,则由第 **443** 条得

$$\begin{aligned}d_{k+1,k+1}&=a_{k+1,k+1}-\alpha_{k+1}A\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & k\\ 1 & 2 & \cdots & k\end{pmatrix}^{-1}\beta_{k+1}\\ &=\frac{1}{\Delta_k}\begin{vmatrix}A\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & k\\ 1 & 2 & \cdots & k\end{pmatrix} & \beta_{k+1}\\ \alpha_{k+1} & a_{k+1,k+1}\end{vmatrix}\\ &=\frac{1}{\Delta_k}\left|A\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & k+1\\ 1 & 2 & \cdots & k+1\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{\Delta_k}s_{k+1,k+1}.\end{aligned}$$

类似可证得

$$d_{ij}=\frac{1}{\Delta_k}s_{ij},\quad i,j=k+1,\cdots,n. \quad (9)$$

由(7)、(8)、(9)式得 $\qquad |A|=\dfrac{|S|}{\Delta_k^{\,n-k-1}}.$

446. 第四降阶定理 设 A,B,C,D 均为 n 阶方阵,且 $AC=CA$,则

$$\begin{vmatrix}A & B\\ C & D\end{vmatrix}=|AD-CB|.$$

证 若 $|A|\neq 0$,则 A 可逆. 因为

$$\begin{bmatrix}E & 0\\ -CA^{-1} & E\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E & -A^{-1}B\\ 0 & E\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & -CA^{-1}B+D\end{bmatrix},$$

所以两边取行列式得

$$\begin{vmatrix} E & 0 \\ -CA^{-1} & E \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E & -A^{-1}B \\ 0 & E \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & -CA^{-1}B+D \end{vmatrix}$$

$$= |A||-CA^{-1}B+D| = |-ACA^{-1}B+AD|$$

由此即得

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD-CB|.$$

若$|A|=0$,令x为未知量,则$|A+xE|$为x的非零多项式,且$A+xE$与C可换.于是由上面所证结论得

$$f(x)=\begin{vmatrix} A+xE & B \\ C & D \end{vmatrix} = |(A+xE)D-CB|.$$

所以

$$f(x)=|AD+xD-CB|. \tag{1}$$

由于有无穷多个x使(1)式成立,从而(1)式为恒等式,特别有

$$f(0)=\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD-CB|.$$

第七章　多项式的运算与因式分解

一、 多项式的概念和运算

447. 什么叫数域 P 上的一元多项式？

答 形式表达式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$

叫做数域 P 上文字 x 的一元多项式，其中 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 都是数域 P 中的数，n 是非负整数.

448. 什么叫多项式的次数？零次多项式与零多项式有何区别？

答 设

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_nx+a_0 \tag{1}$$

是数域 P 上的多项式. 当 $a_n\neq0$ 时，称多项式 $f(x)$ 的次数为 n，记为 $\partial(f(x))=n$，或 $\deg(f(x))=n$，并称 a_n 为 $f(x)$ 的首项系数.

当 $a_n=\cdots=a_1=0,a_0\neq0$ 时，称多项式 $f(x)$ 为零次多项式，即 $\partial(f(x))=0$.

当 $a_n=\cdots=a_1=a_0=0$ 时，则称 $f(x)$ 为零多项式，零多项式是唯一不定义次数的多项式.

由此可见，零次多项式是非零常数，零多项式是零(也是常数)，前者有次数 0，后者不定义次数.

注 ① 数域 P 上一切多项式的全体记为 $P[x]$，数域 P 上一切次数小于 n 的多项式，再添加零多项式的全体，记为 $P[x]_n$.

② 复数域上多项式的全体记为 $C[x]$，实数域上多项式的全体记为 $R[x]$，有理数域上多项式的全体记为 $Q[x]$.

③ 在(1)式中，a_i 称为 i 次项的系数.

449. 什么叫多项式相等？

答 设 $f(x),g(x)$形式上写成

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$
$$g(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0.$$

当 $a_i=b_i(i=0,1,\cdots,n)$时，称多项式 $f(x)$与 $g(x)$相等，并记为 $f(x)=g(x)$.

注 ① 两个多项式相等就是完全一样.

② $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0\Longleftrightarrow a_i=0,\ i=0,\cdots,n.$

450. 怎样定义多项式加法、减法和数乘多项式？它们有哪些主要性质？

答 $f(x),g(x)\in P[x]$,形式上有

$$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0,g(x)=b_nx^n+\cdots+b_1x+b_0.$$

1）规定加法：

$$f(x)+g(x)=(a_n+b_n)x^n+\cdots+(a_1+b_1)x+(a_0+b_0).$$

数乘：

$$kf(x)=(ka_n)x^n+\cdots+(ka_1)x+(ka_0),k\in P.$$

规定记号：$(-1)f(x)=-f(x)$.

减法：

$$f(x)-g(x)=f(x)+(-g(x))$$
$$=(a_n-b_n)x^n+\cdots+(a_1-b_1)x+(a_0-b_0).$$

2）$P[x]$关于加法构成加群，即$\forall\ f(x),g(x),h(x)\in P[x]$，有

1° 封闭性：$\forall\ f(x),g(x)\in P[x]$，都有 $f(x)+g(x)\in P[x]$；

2° 交换律：$f(x)+g(x)=g(x)+f(x)$；

3° 结合律：$(f(x))+g(x))+h(x)=f(x)+(g(x)+h(x))$；

4° 存在零元：$0+f(x)=f(x)$；

5° 存在负元：$(-f(x))+f(x)=0$.

3）$P[x]$关于加法和数乘两种运算，构成 P 上线性空间，即

$\forall f(x),g(x)\in P[x],\forall k,m\in P$，有

1° $P[x]$关于加法是加群；

2° 两种分配律成立：

$$k[f(x)+g(x)]=kf(x)+kg(x),$$
$$(k+m)f(x)=kf(x)+mf(x);$$

3° 结合律成立：$k(mf(x))=(km)f(x)$；

4° $1\cdot f(x)=f(x)$.

4）关于次数有

$$\partial(f(x)\pm g(x))\leqslant\max(f(x),g(x)),$$
$$\partial(kf(x))=\partial f(x)\text{，其中 }k\neq 0.$$

注　关于 $P[x]_n$ 也有类似的结论．

451.　怎样定义多项式的乘法？它们有哪些主要性质？

答　$\forall f(x),g(x)\in P[x]$，设

$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0,g(x)=b_mx^m+\cdots+b_1x+b_0$.

1）规定：

$$f(x)g(x)=c_{n+m}x^{n+m}+\cdots+c_1x+c_0,$$

其中 $c_i=a_ib_0+a_{i-1}b_1+\cdots+a_0b_i,i=0,1,\cdots,n+m$.

2）$P[x]$关于加法和乘法构成整环，即$\forall f(x),g(x),h(x)\in P[x]$，有

1° $P[x]$关于加法是加群；

2° 封闭性：$\forall f(x),g(x)\in P[x]$，都有 $f(x)g(x)\in P[x]$；

3° 乘法结合律：$(f(x)g(x))h(x)=f(x)(g(x)h(x))$；

4° 乘法交换律：$f(x)g(x)=g(x)f(x)$；

5° 分配律：$f(x)(g(x)+h(x))=f(x)g(x)+f(x)h(x)$；

6° 有单位元：$1\cdot f(x)=f(x)$；

7° 无零因子：若 $f(x)g(x)=0$，则 $f(x)=0$，或 $g(x)=0$.

3）关于次数：

$$\partial(f(x)g(x))=\partial(f(x))+\partial(g(x))\text{，其中 }f(x)\neq 0,g(x)\neq 0.$$

注　① 由于 $P[x]$是环,因此又称 $P[x]$是一元多项式环.

② $P[x]_n$ 关于多项式加法和乘法不构成环,因为乘法不满足封闭性.

③ 左消去律成立:若 $f(x)g(x)=f(x)h(x)$,$f(x)\neq 0$,都有 $g(x)=h(x)$.

右消去律也成立:若 $g(x)f(x)=h(x)f(x)$,$f(x)\neq 0$,都有 $g(x)=h(x)$.

452.　$f(x)=x^2-3x-2$,$g(x)=2x^3-x^2-4x+1$. 求 $f(x)+g(x)$,$f(x)-g(x)$,$f(x)g(x)$,$5f(x)$,$f^2(x)$.

解　$f(x)+g(x)=2x^3-7x-1$.

$f(x)-g(x)=-2x^3+2x^2+x-3$.

$f(x)g(x)=2x^5-7x^4-5x^3+15x^2+5x-2$.

$5f(x)=5x^2-15x-10$.

下面介绍用竖式来计算 $f^2(x)$,即

$$\begin{array}{r}
x^2-3x-2\\
\times)\ x^2-3x-2\\
\hline
x^4-3x^3-2x^2\\
-3x^3+9x^2+6x\\
-2x^2+6x+4\\
\hline
x^4-6x^3+5x^2+12x+4
\end{array}$$

$\therefore f^2(x)=x^4-6x^3+5x^2+12x+4$.

注　多项式的加法、减法、乘法、数乘都可用竖式来计算.

453.　设多项式 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+ax+1$ 是 $g(x)=x^2+cx+d$ 的平方,试证:$a^2=4b\pm 8$.

证　$g^2(x)=x^4+2cx^3+(c^2+2d)x^2+2cdx+d^2=f(x)$,比较两边系数得:$a=2c$,$b=c^2+2d$,$a=2cd$,$d^2=1$.

当 $d=1$ 时，$a=2c$，$b=c^2+2$，故 $a^2=4b-8$.

当 $d=-1$ 时，$a=2c$，$b=c^2-2$，$a=-2c$，于是 $a=c=0$，$b=-2$，则 $a^2=4b+8$.

454. 求 k,l,m，使

$$(2x^2+kx-1)(x^2-lx+1)=2x^4+5x^3+mx^2-x-1. \quad (1)$$

解 将(1)的左边展开，得

$$2x^4+(-2l+k)x^3+(1-kl)x^2+(k+l)x-1,$$

故等式(1)成立当且仅当

$$k-2l=5, 1-kl=m, k+l=-1.$$

即 $k=1, l=-2, m=3$.

455. 设 $f(x),g(x),h(x)$ 是实数域上的多项式.

1) 证明：若 $f^2(x)=xg^2(x)+xh^2(x)$，则 $f(x)=g(x)=h(x)=0$.

2) 在复数域上，上述命题是否成立？

证 1) 当 $g(x)=h(x)=0$ 时，有 $f^2(x)=0$，所以 $f(x)=0$，命题成立.

如果 $g(x),h(x)$ 不全为零，不妨设 $g(x)\neq 0$.

当 $h(x)=0$ 时，$\partial(xg^2(x)+xh^2(x))=1+2\partial(g(x))$ 为奇数；

当 $h(x)\neq 0$ 时，因为 $g(x),h(x)$ 都是实系数多项式，所以 $xg^2(x)$ 与 $xh^2(x)$ 都是首项系数为正实数的奇次多项式，于是也有 $\partial(xg^2(x)+xh^2(x))$ 为奇数. 而这时均有 $f^2(x)\neq 0$，且 $\partial(f^2(x))=2\partial(f(x))$ 为偶数，矛盾. 因此有 $g(x)=h(x)=0$，从而 $f(x)=0$.

2) 在复数域上，上述命题不成立. 比如：设 $f(x)=0$，$g(x)=x^n$，$h(x)=ix^n$，其中 n 为自然数，有 $f^2(x)=xg^2(x)+xh^2(x)$，但 $g(x)\neq 0$，$h(x)\neq 0$.

456. $f(x)=(5x-4)^{1993}(4x^2-2x-1)^{1994}(8x^3-11x+2)^{1995}$，求 $f(x)$ 的展开式中各项系数的和.

解　我们知道 $f(x)$ 的各项系数的和等于 $f(1)$，即

$$f(1)=(5-4)^{1993}(4-2-1)^{1994}(8-11+2)^{1995}=-1.$$

457.　设多项式，$g_1(x)=1, g_{k+1}(x)=1-xg_k(x), k=1,2,\cdots$，求 $F(x)=1+g_1(x)+g_2(x)+\cdots+g_{1994}(x)$ 的系数和．

解　设 $g_k(x)$ 的系数和为 a_k，用数学归纳法易证：

$$a_k=\begin{cases}1, & \text{当 } k \text{ 为奇数时；}\\ 0, & \text{当 } k \text{ 为偶数时．}\end{cases}$$

$$\begin{aligned}F(1)&=1+g_1(1)+g_2(1)+\cdots+g_{1994}(1)\\&=1+a_1+\cdots+a_{1994}\\&=998.\end{aligned}$$

458.　证明：

$$1-x+\frac{x(x-1)}{2!}+\cdots+(-1)^n\frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}=(-1)^n\frac{(x-1)\cdots(x-n)}{n!}.$$

证　用数学归纳法．　当 $n=1$ 时，等式显然成立．

归纳假定 $n=k$ 时等式成立，则当 $n=k+1$ 时，有

$$\begin{aligned}&1-x+\frac{x(x-1)}{2!}+\cdots+(-1)^k\frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}\\&+(-1)^{k+1}\frac{x(x-1)\cdots(x-k)}{(k+1)!}\\&=(-1)^k\frac{(x-1)\cdots(x-k)}{k!}+(-1)^{k+1}\frac{x(x-1)\cdots(x-k)}{(k+1)!}\\&=(-1)^{k+1}\frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-k)[x-(k+1)]}{(k+1)!}.\end{aligned}$$

即 $n=k+1$ 时，等式也成立．故对任意自然数 n，等式都成立．

459.　证明：多项式

$$f(x)=(x^{50}-x^{49}+x^{48}-\cdots+x^2-x+1)(x^{50}+x^{49}+\cdots+1)$$

的展开式中无奇数次项．

证　$x^{51}+1=(x+1)(x^{50}-x^{49}+x^{48}-\cdots+x^2-x+1)$，

$$x^{51}-1=(x-1)(x^{50}+x^{49}+x^{48}+\cdots+x^2+x+1).$$

两等式相乘，得

$$x^{102}-1=(x^2-1)f(x).$$

由于 $x^{102}-1$ 与 x^2-1 中都不含奇数次项，故 $f(x)$ 的展开式中必不含奇数次项．

460. 试求出所有适合下式的非零复系数多项式 $f(x)$：$f(f(x))=[f(x)]^n$，n 是正整数．

解 (1) 当 $\partial(f(x))=0$ 时，设 $f(x)=c$，c 为非零常数．则由 $f(f(x))=[f(x)]^n$ 有：$c=c^n$，于是 $c^{n-1}=1$．

① 当 $n=1$ 时，c 可为任意非零复数；

② 当 $n>1$ 时，$c=\cos\dfrac{2k}{n-1}\pi+i\sin\dfrac{2k}{n-1}\pi$，$k=0,1,\cdots,n-1$．

(2) 当 $\partial(f(x))>0$ 时，设 $\partial(f(x))=m$，则比较题设等式两端多项式的次数，得 $m^2=mn$，故 $m=n$，即 $f(x)$ 为 n 次多项式．设

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0.$$

并把 $f(x)$ 代入题设等式两边，整理得

$$(a_n-1)[f(x)]^n+a_{n-1}[f(x)]^{n-1}+\cdots+a_1f(x)+a_0=0. \quad (1)$$

(1)式左端可看成是文字 $f(x)$ 的 n 次多项式，于是有 $(a_n-1)=a_{n-1}=\cdots=a_1=a_0=0$，$\therefore a_n=1$．$f(x)=x^n$ 即为所求．

461. 整系数多项式 $f(x)=g(x)\Longleftrightarrow f(t)=g(t)$，其中 t 是大于 $f(x)$，$g(x)$ 的所有系数之绝对值的 2 倍的某一整数．

证 必要性 显然．

充分性 不妨设

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$

$$g(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0.$$

若 $f(t)=g(t)$，则

$$a_nt^n+a_{n-1}t^{n-1}+\cdots+a_1t+a_0$$
$$=b_nt^n+b_{n-1}t^{n-1}+\cdots+b_1t+b_0,$$

所以

$$a_0-b_0=(b_n-a_n)t^n+(b_{n-1}-a_{n-1})t^{n-1}+\cdots+(b_1-a_1)t,$$

故 $t\mid(a_0-b_0)$. 但是，$|a_0-b_0|\leqslant|a_0|+|b_0|<\frac{t}{2}+\frac{t}{2}=t$，因此 $a_0-b_0=0$，即 $a_0=b_0$. 于是

$$a_nt^{n-1}+a_{n-1}t^{n-2}+\cdots+a_2t+a_1$$
$$=b_nt^{n-1}+b_{n-1}t^{n-2}+\cdots+b_2t+b_1.$$

类似地，有：$a_k=b_k$，$k=1,2,\cdots,n$. 于是 $f(x)=g(x)$.

注 对非整系数多项式，这一命题不成立．比如，对于 $f(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$，$g(x)=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$，有 $f(5)=g(5)$，但 $f(x)\neq g(x)$.

462. 设 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$，如果存在两两不等的 $c_1,\cdots,c_{n+1}\in P$，有 $f(c_i)=0$，则 $f(x)=0$.

证 $a_nc_i^n+a_{n-1}c_i^{n-1}+\cdots+a_1c_i+a_0=0,\ i=1,2,\cdots,n+1.$ (1)

把 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 看成未知量，其系数行列式

$$\triangle=\prod_{j>i}(c_j-c_i)\neq 0.$$

故方程组(1)有唯一零解 $a_0=a_1=\cdots=a_n=0$. 此即 $f(x)=0$.

463. 设有多项式序列：

$$p_1(x)=1,p_2(x)=1+x,\cdots,p_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}x^k,\cdots$$

求使等式 $p_k(x)p_m(x^2)p_n(x^4)=p_{100}(x)$ 成立的正整数组 (k,m,n).

解 $p_n(x)=(1-x^n)/(1-x)$ 所以

$$p_k(x)p_m(x^2)p_n(x^4)=p_{100}(x)\Longleftrightarrow$$

$$(1-x^k)(1-x^{2m})(1-x^{4n})=(1-x^2)(1-x^4)(1-x^{100}) \quad (1)$$

设 $(1-x^p)(1-x^q)(1-x^l)=(1-x^s)(1-x^t)(1-x^r) \quad (2)$

其中 $p\leqslant q\leqslant l$，$s\leqslant t\leqslant r$，且 p,q,l,s,t,r 均为正整数，可以证明：

$$p=s,q=t,l=r \quad (3)$$

否则若(3)式不成立，比如 $l\neq r$，设 $l<r$. 用 r 次单位元根 $\varepsilon=e^{i\frac{2\pi}{r}}$ 代

入(2)式.(2)式右边为 0,但(2)式左边不为 0,矛盾. 故 $l=r$. 在(2)式中消去$(1-x^r)$,得

$$(1-x^p)(1-x^q)=(1-x^s)(1-x^t)$$

类似可证 $q=t,p=s$,即证(3)式.

再讨论(1)式.

(1)当 $k\leqslant 2m\leqslant 4n$ 时,得 $k=2,2m=4,4n=100$,故$(k,m,n)=(2,2,25)$

(2)当 $k\leqslant 4n\leqslant 2m$ 时,得 $k=2,4n=4,2m=100$,故$(k,m,n)=(2,50,1)$

(3)当 $2m\leqslant k\leqslant 4n$ 时,得 $2m=2,k=4,4n=100$,故$(k,m,n)=(4,1,25)$

(4)当 $2m\leqslant 4n\leqslant k$ 时,得$(k,m,n)=(100,1,1)$.

二　整除及带余除法

464.　设 $g(x),f(x)\in P[x]$,什么叫做 $g(x)$整除 $f(x)$?

答　如果存在 $h(x)\in P[x]$,使 $f(x)=g(x)h(x)$,就称 $g(x)$整除 $f(x)$,记作 $g(x)\mid f(x)$. 而用 $g(x)\nmid f(x)$表示 $g(x)$不能整除 $f(x)$,就是不存在 $h(x)$,使 $f(x)=g(x)h(x)$成立.

465.　设 $f(x),g(x)\in P[x]$,且 $g(x)\neq 0$,则 $P[x]$中存在唯一的多项式 $q(x)$和 $r(x)$,使 $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$. (1)

注　① 称(1)式中的 $g(x)$为商式,$r(x)$为余式.

② 已知 $f(x),g(x)$,求(1)式中的 $q(x)$和 $r(x)$,称为带余除法.

466.　什么叫因式和倍式?

答　如果 $g(x)\mid f(x)$,则称多项式 $g(x)$是 $f(x)$的一个因式,而称 $f(x)$是 $g(x)$的一个倍式.

467.　对于 $P[x]$中的任意两个多项式 $f(x)$, $g(x)$, 若其中 $g(x)\neq 0$,则 $g(x)\mid f(x)$的充要条件是 $g(x)$除 $f(x)$的余式为零.

468.　零多项式只能整除零多项式；任一多项式一定能整除它自身；任一多项式都可整除零多项式；零次多项式(非零常数)能整除任一多项式．

469.　多项式的整除性有如下几个常用的性质：

1）如果 $f(x)\mid g(x)$，则 $kf(x)\mid lg(x)$，其中 k 为非零常数，l 为常数．

2）若 $f(x)\mid g(x)$，$g(x)\mid f(x)$，则 $f(x)=cg(x)$．
其中 c 为非零常数．

3）若 $f(x)\mid g(x)$，$g(x)\mid h(x)$，则 $f(x)\mid h(x)$．

4）若 $f(x)\mid g_i(x)$，$i=1,2,\cdots,r$，则

$$f(x)\mid(u_1(x)g_1(x)+u_2(x)g_2(x)+\cdots+u_r(x)g_r(x)).$$

其中 $u_i(x)$是数域 P 上的任意多项式，$i=1,2,\cdots,r$.

470.　多项式 $f(x)$与 $cf(x)$ $(c\neq0)$有相同的因式和倍式．

471.　两个多项式之间的整除关系不因系数域的扩大而改变．

472.　用 $g(x)$除 $f(x)$，求商式 $q(x)$与余式 $r(x)$，其中 $f(x)=x^3-3x^2-x-1$，$g(x)=3x^2-2x+1$.

解 1　用普通除法．

$$\begin{array}{r|l|l}
3x^2-2x+1 & x^3-3x^2-x-1 & \frac{1}{3}x-\frac{7}{9} \\
 & x^3-\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x & \\
\cline{2-2}
 & -\frac{7}{3}x^2-\frac{4}{3}x-1 & \\
 & -\frac{7}{3}x^2+\frac{14}{9}x-\frac{7}{9} & \\
\cline{2-2}
 & \qquad -\frac{26}{9}x-\frac{2}{9} &
\end{array}$$

所以，$q(x)=\frac{1}{3}x-\frac{7}{9}$，$r(x)=-\frac{26}{9}x-\frac{2}{9}$.

解 2　用待定系数法．根据题中条件可设

$$q(x)=\frac{1}{3}x+a, r(x)=bx+c.$$

因为　$f(x)=q(x)g(x)+r(x)$，故

$$x^3-3x^2-x-1=(\frac{1}{3}x+a)(3x^2-2x+1)+bx+c.$$

将右端展开后合并同类项，并比较两端的系数，得

$$3a-\frac{2}{3}=-3, b-2a+\frac{1}{3}=-1, a+c=-1.$$

解得 $a=-\frac{7}{9}, b=-\frac{26}{9}, c=-\frac{2}{9}$.

所以，$q(x)=\frac{1}{3}x-\frac{7}{9}, r(x)=-\frac{26}{9}x-\frac{2}{9}$.

473.　用综合除法求 $g(x)=x+3$ 除 $f(x)=2x^5-5x^3-8x$ 的商式 $q(x)$ 与余式 $r(x)$.

解

-3	2	0	-5	0	-8	0
		-6	18	-39	117	-327
	2	-6	13	-39	109	-327

所以，$q(x)=2x^4-6x^3+13x^2-39x+109, r(x)=-327$.

474.　证明：每个多项式 $f(x)$ 都可以唯一地表为 $x-x_0$ 的多项式．

证　设 $\partial(f(x))=n$，用 $x-x_0$ 除 $f(x)$，再用 $x-x_0$ 逐次除所得的商，分别为：

$$f(x)=q_1(x)(x-x_0)+r_0, \tag{1}$$

$$q_1(x)=q_2(x)(x-x_0)+r_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$q_{n-2}(x)=q_{n-1}(x)(x-x_0)+r_{n-2},$$

$$q_{n-1}(x)=r_n(x-x_0)+r_{n-1}.$$

将 $q_1(x), q_2(x), \cdots, q_{n-1}(x)$ 逐次代入(1)，即得

$$f(x)=r_n(x-x_0)^n+r_{n-1}(x-x_0)^{n-1}+\cdots+r_1(x-x_0)+r_0. \tag{2}$$

再证唯一性，另设

$$f(x)=a_n(x-x_0)^n+a_{n-1}(x-x_0)^{n-1}+\cdots+a_1(x-x_0)+a_0,\ (3)$$

将(2)、(3)两式右端$(x-x_0)$看成一个文字，那么

$$r_i=a_i, i=0,1,2,\cdots,n.$$

故 $f(x)$表为$(x-x_0)$的多项式是唯一的．

475.　用综合除法把 $f(x)=x^4-2x^2+3$ 表成 $x+2$ 的方幂和．

解　由第474条，采用分离系数作综合除法，得

-2	1	0	-2	0	3
		-2	4	-4	8
	1	-2	2	-4	$11=r_0$
		-2	8	-20	
	1	-4	10	$-24=r_1$	
		-2	12		
	1	-6	$22=r_2$		
	1	-2			
	$r_4=1$	$-8=r_3$			

所以

$$f(x)=(x+2)^4-8(x+2)^3+22(x+2)^2-24(x+2)+11.$$

476.　求用$(x-1)^2$ 除 $nx^{n+1}-(n+1)x^n+1$ 的商式．

解　连续用两次综合除法，即可求得商式：

1	n	$-(n+1)$	0	0	$\cdots$	0	0	1
		n	-1	-1	$\cdots$	-1	-1	-1
	n	-1	-1	-1	$\cdots$	-1	-1	0
		n	$n-1$	$n-2$	$\cdots$	2	1	
	n	$n-1$	$n-2$	$n-3$	$\cdots$	1	0	

所以商式为

$$nx^{n-1}+(n-1)x^{n-2}+(n-2)x^{n-3}+\cdots+2x+1.$$

477. 假设 $g(x)=x^2-4x+a$，如果存在唯一的多项式 $f(x)=x^3+bx^2+cx+d$，使得 $g(x)|f(x)$，且 $f(x)|g^2(x)$，试求 $f(x)$ 的表示式．

解　因为 $g(x)|f(x)$，所以 $f(x)=g(x)(x-\alpha)$．又因为 $f(x)|g^2(x)$，从而 $g^2(x)=f(x)(x-\beta)=g(x)(x-\alpha)(x-\beta)$，而 $g(x)\neq 0$，故 $g(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$．

当 $\alpha\neq\beta$ 时，则有两个多项式

$$f_1(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta),f_2(x)=(x-\alpha)(x-\beta)^2,$$

都满足所给条件，这与 $f(x)$ 的唯一性矛盾．因此 $\alpha=\beta$．于是

$$g(x)=x^2-4x+a=(x-\alpha)^2,$$

显然 $\alpha=2$，由此可知：

$$f(x)=(x-2)^3=x^3-6x^2+12x-8.$$

478.　m,p,q 适合什么条件时，有

1) $(x^2+mx-1)|(x^3+px+q)$；

2) $(x^2+mx+1)|(x^4+px^2+q)$；

3) $(x^2+mx+1)|(x^4+px+q)$．

解　1) 用 x^2+mx-1 除 x^3+px+q．

$$\begin{array}{r|l|l} x-m & x^3+px+q & x^2+mx-1 \\ & \underline{x^3+mx^2-x} & \\ & -mx^2+(p+1)x+q & \\ & -mx^2-m^2x\qquad +m & \\ \hline & (m^2+p+1)x+(q-m) & \end{array}$$

得余式：

$$r(x)=(m^2+p+1)x+q-m$$

故 $x^2+mx-1|x^3+px+q$ 的条件为

$$\begin{cases} m^2+p+1=0, \\ q-m=0. \end{cases}$$

2）类似所求条件为

$$\begin{cases}m(2-p-m^2)=0,\\q-m^2+1-p=0.\end{cases}$$

3）所求条件为

$$\begin{cases}p+2m-m^3=0,\\q-m^2+1=0.\end{cases}$$

479. m 取何值时，$f(x)=(x+1)^m-x^m-1$ 能被 x^2+x+1 整除.

解 $x^2+x+1=(x-\omega)(x-\omega^2)$，其中 $\omega=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$ 为 1 的三次单位根，因此有 $\omega^3=1, 1+\omega+\omega^2=0$，则

$$x^2+x+1\,|\,f(x)\Longleftrightarrow f(\omega)=0 \text{ 且 } f(\omega^2)=0.$$

当 $m=6k$ 时，$f(\omega)=(\omega+1)^{6k}-\omega^{6k}-1=(-\omega^2)^{6k}-1-1\neq0$，故 x^2+x+1 不能整除 $f(x)$.

当 $m=6k+1$ 时，

$$f(\omega)=(-\omega^2)^{6k+1}-\omega^{6k+1}-1=-\omega^2-\omega-1=0,$$

$$\begin{aligned}f(\omega^2)&=(\omega^2+1)^{6k+1}-(\omega^2)^{6k+1}-1=(-\omega)^{6k+1}-\omega^2-1\\&=-\omega-\omega^2-1=0,\end{aligned}$$

故 x^2+x+1 可以整除 $f(x)$.

类似可证当 m 为 $6k+2, 6k+3, 6k+4$ 时，x^2+x+1 都不能整除 $f(x)$；当 $m=6k+5$（或 $m=6k-1$）时，x^2+x+1 可以整除 $f(x)$.

综上所述，当 $m=6k\pm1$ 时，$f(x)$ 可被 x^2+x+1 整除.

480. 证明：$x^d-\beta^d$ 能整除 $x^n-\beta^n\Longleftrightarrow d\,|\,n$，其中 d,n 为自然数.

证 充分性 设 $n=dm$，其中 m 为自然数则

$$x^n-\beta^n=(x^d-\beta^d)[x^{(m-1)d}+\beta^d x^{(m-2)d}+\cdots+(\beta^d)^{m-2}x^d+(\beta^d)^{m-1}],$$

所以 $(x^d-\beta^d)\,|\,(x^n-\beta^n)$.

必要性 用反证法. 设 d 不能整除 n，则

$$n=dq+r，其中\ 0<r<d，于是\ d\mid(n-r).$$

由上面充分性的证明知，$(x^d-\beta^d)\mid(x^{n-r}-\beta^{n-r})$，但

$$x^n-\beta^n=x^r\cdot x^{n-r}-x^r\cdot\beta^{n-r}+x^r\beta^{n-r}-\beta^n$$
$$=x^r(x^{n-r}-\beta^{n-r})+\beta^{n-r}(x^r-\beta^r).$$

所以$(x^d-\beta^d)\mid(x^r-\beta^r)$. 因 $0<r<d$，这是不可能的，故 $d\mid n$.

481.　证明：$(x-a)\mid(x^n-a^n)$.

证　由第 **480** 条可得(其中 $d=1$).

482.　证明：x^d-1 整除 $x^n-1\Longleftrightarrow d\mid n$.

证　由第 **480** 条可得(其中 $\beta=1$).

483.　证明 x 不能整除所有 $f_i(x)$，$(i=1,2,\cdots,n)\Longleftrightarrow x$ 不能整除它们的积 $f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)$.

证　必要性　设 $f_i(x)=xq_i(x)+r_i$，其中 $r_i\neq0,i=1,\cdots,n$，则 $\prod\limits_{i=1}^{n}f_i(x)=xh(x)+r_1r_2\cdots r_n$，其中 $r_1r_2\cdots r_n\neq0$. 也就是说 x 不能整除 $\prod\limits_{i=1}^{n}f_i(x)$.

充分性　用反证法．若存在 k，使 $x\mid f_k(x)$，则 $x\mid\prod\limits_{i=1}^{n}f_i(x)$，矛盾．

注　$x\mid f_1(x)\cdots f_n(x)\Longleftrightarrow x$ 至少可整除某个 $f_i(x)$.

484.　证明：$x\mid[f(x)]^k\Longleftrightarrow x\mid f(x)$.

证　由第 **483** 条可证．

485.　设 $g(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_k)$，其中 $a_1,\cdots,a_k$ 互不相同．若 $f(a_i)=0,i=1,2,\cdots,k$，则 $g(x)\mid f(x)$.

证　设 $f(x)=h(x)g(x)+r(x)$，其中 $\partial r(x)<\partial g(x)=k$，或 $r(x)=0$. 由 $g(a_i)=f(a_i)=0$，$i=1,2,\cdots,k$，则 $r(a_i)=0,i=1,2,\cdots,k$. 由于 $a_1,\cdots,a_k$ 互不相同，所以 $r(x)=0$，即 $g(x)\mid f(x)$.

486.　若 $g(x)h(x)\mid f(x)$，则 $g(x)\mid f(x)$ 且 $h(x)\mid f(x)$.

证　由定义即得．

487. 若 $g(x)h(x)\mid g(x)f(x)$，且 $g(x)\neq 0$，则 $h(x)\mid f(x)$.

证 由假设，存在 $m(x)$，使 $g(x)f(x)=g(x)m(x)h(x)$，因 $g(x)\neq 0$，消去 $g(x)$ 得 $f(x)=m(x)h(x)$，即 $h(x)\mid f(x)$.

488. 设 $g(x)=x^2+x+1$，$f(x)=x^3-1$.

1) $f(x)$ 有三个根为 $1,\omega,\omega^2$. 其中

$$\omega=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i;$$

2) $g(x)\mid f(x)$;

3) $g(x)=(x-\omega)(x-\omega^2)$，即 $g(x)$ 有两个不同复根 ω,ω^2 其中 $\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

证 1) 因为 $\omega=e^{i\frac{2}{3}\pi}$，$\omega^3=e^{i2\pi}=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$，$(\omega^2)^3=(\omega^3)^2=1$，所以 $f(\omega)=f(\omega^2)=f(1)=0$，显然有 $\omega\neq\omega^2$.

2) 因为 $(x-1)(x^2+x+1)=x^3-1$，所以 $x^2+x+1\mid x^3-1$.

3) 容易验证 $1+\omega+\omega^2=0$，所以 $g(\omega)=g(\omega^2)=0$.

489. 如果 $x^2+x+1\mid f(x^3)+xg(x^3)$，那么

$$x-1\mid f(x),\ x-1\mid g(x).$$

证 设 $f(x)=(x-1)q_1(x)+r_1$，$g(x)=(x-1)q_2(x)+r_2$，则

$$f(x^3)=(x^3-1)q_1(x^3)+r_1,\ g(x^3)=(x^3-1)q_2(x^3)+r_2.$$

所以

$$\begin{aligned}f(x^3)+xg(x^3)&=(x^3-1)q_1(x^3)+r_1+x(x^3-1)q_2(x^3)+r_2x\\&=(x^2+x+1)[(x-1)q_1(x^3)+(x^2-x)q_2(x^3)]+r_2x+r_1.\end{aligned}$$

而 $x^2+x+1\mid f(x^3)+xg(x^3)$，故必 $r_2x+r_1=0$.

所以 $r_1=r_2=0$，即得 $x-1\mid f(x)$，$x-1\mid g(x)$.

证 2 如果 ω 是 x^2+x+1 的根，那么 ω 必是 x^3-1 的根，则 $\omega^3=1$. 由题设还可知 ω 也是 $f(x^3)+xg(x^3)$ 的根，即有

$$f(\omega^3)+\omega g(\omega^3)=0,$$

$$\therefore\quad f(1)+\omega g(1)=0. \tag{1}$$

又知 ω^2 也是 x^2+x+1 的根，故同样可得

$$f(1)+\omega^2 g(1)=0, \tag{2}$$

由(1)、(2)解得 $f(1)=g(1)=0$，即

$$x-1\mid f(x), x-1\mid g(x).$$

490. 证明：如果 $h(x)\mid f(x)$，$h(x)\nmid g(x)$，那么 $h(x)\nmid(f(x)+g(x))$.

证 如果 $h(x)\mid(f(x)+g(x))$，又已知 $h(x)\mid f(x)$，故 $h(x)\mid[(f(x)+g(x)-f(x)]$，即 $h(x)\mid g(x)$. 与已知条件矛盾，故 $h(x)\nmid(f(x)+g(x))$.

注 如果 $h(x)\nmid f(x)$，$h(x)\nmid g(x)$，但 $h(x)$ 可能整除 $f(x)+g(x)$. 比如：取 $h(x)=x$，$f(x)=x+1$，$g(x)=x-1$ 时，显然 $h(x)\nmid f(x)$，$h(x)\nmid g(x)$，但却有 $h(x)\mid(f(x)+g(x))$.

491. 设 a,b 是两个不相等的常数，试证：多项式 $f(x)$ 除以 $(x-a)(x-b)$ 所得余式为

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}x+\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}.$$

证 依题意可设

$$f(x)=(x-a)(x-b)q(x)+cx+d, \text{则}$$

$$\begin{cases} f(a)=ca+d \\ f(b)=cb+d \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} c=(f(a)-f(b))/(a-b) \\ d=(af(b)-bf(a))/(a-b). \end{cases}$$

故所得余式为

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}x+\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}.$$

492. 设 $f_1(x),f_2(x),g_1(x),g_2(x)\in F[x]$，其中 $f_1(x)\neq 0$，且 $g_1(x)g_2(x)\mid f_1(x)f_2(x)$，$f_1(x)\mid g_1(x)$，证明：$g_2(x)\mid f_2(x)$.

证 $f_1(x)\mid g_1(x)$，即 $g_1(x)=f_1(x)q(x)$. 由假设条件知 $g_1(x)g_2(x)\mid f_1(x)f_2(x)$，故

$$f_1(x)f_2(x)=g_1(x)g_2(x)h(x)=f_1(x)q(x)g_2(x)h(x).$$

而 $f_1(x)\neq 0$，所以 $f_2(x)=q(x)g_2(x)h(x)$，即 $g_2(x)\mid f_2(x)$.

493. 考虑有理数域上的多项式

$$f(x)=(x+1)^{k+n}+(2x)(x+1)^{k+n-1}+\cdots+(2x)^k(x+1)^n,$$

这里 k 和 n 都是非负整数，证明：

$$x^{k+1}\mid(x-1)f(x)+(x+1)^{k+n+1}.$$

证　$(x-1)f(x)+(x+1)^{k+n+1}$

$$=[2x-(x+1)]f(x)+(x+1)^{k+n+1}=(2x)^{k+1}(x+1)^n.$$

$\therefore x^{k+1}\mid(x-1)f(x)+(x+1)^{k+n+1}$.

494. 设 $f(x)=x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$，$g(x)=x^2+x+1$，其中 m,n,p 都是非负整数，证明：$g(x)\mid f(x)$.

证　ω 是 $g(x)$ 的根，即 $\omega^2+\omega+1=0$，于是 $\omega^3=1$. 因此，

$$f(\omega)=\omega^{3m}+\omega^{3n+1}+\omega^{3p+2}=1+\omega+\omega^2=0.$$

即 ω 也是 $f(x)$ 的根.

又　$$f(\omega^2)=1+\omega^2+\omega=0,$$

即 ω^2 也是 $f(x)$ 的根，$g(x)=(x-\omega)(x-\omega^2)$，所以

$$g(x)\mid f(x).$$

495. $f(x)=x^{3m}-x^{3n+1}+x^{3p+2}$，$g(x)=x^2-x+1$，其中 m,n,p 都是非负整数. 证明：$g(x)\mid f(x)$ 当且仅当 m,n,p 有相同的奇偶性.

证　设 α 是 $g(x)$ 的任一根，则 $\alpha^2-\alpha+1=0$，$\alpha^3=-1$，因此，

$$f(\alpha)=\alpha^{3m}-\alpha^{3n+1}+\alpha^{3p+2}=(-1)^m-(-1)^n\alpha+(-1)^p\alpha^2,$$

因而 $f(\alpha)=0$ 当且仅当 $(-1)^m=(-1)^n=(-1)^p$，这样 $g(x)$ 的根都是 $f(x)$ 的根，而 $g(x)$ 无重根，由第 **485** 条，即知 $g(x)\mid f(x)$ 当且仅当 m,n,p 有相同的奇偶性.

496. 证明对任意非负整数 n，都有

$$x^2+x+1\mid x^{n+2}+(x+1)^{2n+1}.$$

证 1　对 n 用数学归纳法. 当 $n=0$ 时，结论显然成立. 假设当 $n=k$ 时，结论成立，当 $n=k+1$ 时，

$$x^{k+3}+(x+1)^{2k+3}=$$
$$x[x^{k+2}+(x+1)^{2k+1}]+(x^2+x+1)(x+1)^{2k+1},\qquad(1)$$

故据归纳假设和(1)式得

$$x^2+x+1\mid[x^{(k+1)+2}+(x+1)^{2(k+1)+1}].$$

因此，对任意非负整数 n，结论成立．

证 2　设 α 是 x^2+x+1 的任一根，即

$$\alpha^2+\alpha+1=0,\ -\alpha^2=\alpha+1,\ \alpha^3=1.$$

由此得

$$\alpha^{n+2}+(\alpha+1)^{2n+1}=\alpha^{n+2}+(-\alpha^2)^{2n+1}=\alpha^{n+2}(1-\alpha^{3n})=0;$$

即 α 也是 $x^{n+2}+(x+1)^{2n+1}$ 的根．又因为 x^2+x+1 无重根，因此 $x^2+x+1\mid x^{n+2}+(x+1)^{2n+1}$.

497.　证明：多项式 $g(x)=1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n}$ 整除 $f(x)=1+x^4+x^8+\cdots+x^{4n}\Longleftrightarrow$ 是 n 为偶数．

证　必要性　设 $g(x)\mid f(x)$．用反证法．若 $n=2k+1$，则 $g(i)=0$，其中 $i^2=-1$，但 $f(i)\neq0$，矛盾．

充分性　因为 $(x^2-1)g(x)=x^{2n+2}-1$，

$$(x^4-1)f(x)=x^{4n+4}-1=(x^{2n+2}+1)(x^{2n+2}-1),$$

所以

$$(x^2-1)g(x)\mid(x^4-1)f(x),\text{从而 } g(x)\mid(x^2+1)f(x).$$

因 $n=2k$，而 $g(i)\neq0$，$g(-i)\neq0$，这样 $(g(x),x^2+1)=1$，所以 $g(x)\mid f(x)$.

498.　设多项式 $f(x)$ 除以多项式 $g(x)$ 所得的商式和余式分别为 $q(x)$ 和 $r(x)$，$h(x)$ 是任一非零多项式，证明：$f(x)h(x)$ 除以 $g(x)$ 所得的商为 $q(x)h(x)\Longleftrightarrow$

$$r(x)=0\text{ 或 }\partial(r(x))+\partial(h(x))<\partial(g(x)).\qquad(1)$$

证　由 $f(x)=g(x)q(x)+r(x)$ 可得

$$f(x)h(x)=g(x)q(x)h(x)+r(x)h(x).\qquad(2)$$

必要性　若 $f(x)h(x)$ 除以 $g(x)$ 所得的商为 $q(x)h(x)$，则由

(2)知 $r(x)h(x)$ 即为余式，从而

$$r(x)h(x)=0 \text{ 或 } \partial(r(x)h(x))<\partial(g(x)),$$

但 $h(x)\neq 0$，

故 $r(x)=0$ 或 $\partial(r(x))+\partial(h(x))<\partial(g(x))$.

充分性　若条件(1)成立，则(2)式表明 $f(x)h(x)$ 除以 $g(x)$ 所得的商为 $q(x)h(x)$.

499.　设 $f(x),g(x)$ 及 $h(x)(h(x)\neq 0)$ 为三个多项式，证明：$h(x)\mid(f(x)-g(x))$ 当且仅当 $f(x)$ 与 $g(x)$ 除以 $h(x)$ 所得的余式相同.

证　设 $f(x)=h(x)q_1(x)+r_1(x)$，$g(x)=h(x)q_2(x)+r_2(x)$，其中 $r_i(x)=0$ 或 $\partial(r_i(x))<\partial(h(x))$ $(i=1,2)$.

$$f(x)-g(x)=h(x)[q_1(x)-q_2(x)]+(r_1(x)-r_2(x)).$$

如果 $r_1(x)-r_2(x)=0$，那么 $h(x)\mid[f(x)-g(x)]$.

否则 $r_1(x)-r_2(x)\neq 0$，由 $\partial(r_1(x)-r_2(x))\leqslant\max(\partial r_1(x),\partial r_2(x))<\partial(h(x))$，知 $h(x)\nmid[f(x)-g(x)]$.

500.　设 $f(x)=1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}$，证明：$f(x)$ 整除多项式 $g(x)=(f(x)+x^n)^2-x^n$.

证　因为 $x^n-1=(x-1)f(x)$，所以 $f(x)$ 的 $n-1$ 个根 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_{n-1}$ 都是互不相等的 n 次单位根，从而

$g(\varepsilon_i)=(f(\varepsilon_i)+\varepsilon_i^n)^2-\varepsilon_i^n=0$，$(i=1,\cdots,n-1)$. 即 $f(x)$ 的根都是 $g(x)$ 的根，故 $f(x)\mid g(x)$.

501.　证明：对任一多项式 $f(x)$，必存在多项式 $g(x)$，使得：

$$2f(x)-2(x^2-1)g(x)+[f(-1)-f(1)]x-f(1)-f(-1)=0. \qquad (1)$$

证　用 x^2-1 除 $f(x)$，由带余除法，有

$$f(x)=(x^2-1)q(x)+ax+b, \qquad (2)$$

则 $f(1)=a+b$，$f(-1)=-a+b$.

于是

$$a=[f(1)-f(-1)]/2, b=[f(1)+f(-1)]/2. \quad (3)$$

将(3)代入(2)，并取 $g(x)=q(x)$ 便得到(1)式．

502. 设 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$ 是整系数多项式，$g(x)$ 整除 $f(x)$，那么

1) 当 $g(x)=x-m$，m 为整数时，则存在整系数多项式 $h(x)$，使 $f(x)=g(x)h(x)$；

2) 当 $g(x)=(x-m_1)(x-m_2)\cdots(x-m_r)$，其中 $m_1,\cdots,m_r$ 都是整数时，则存在整系数多项式 $h(x)$，使 $f(x)=g(x)h(x)$.

证 1) 由综合除法的计算过程

$$\begin{array}{c|cccc} m & a_n & a_{n-1}\cdots\cdots a_1 & a_0 \\ & & ma_n\cdots\cdots mb_2 & \\ \hline & a_n & b_{n-1}\cdots\cdots b_1 & 0 \end{array}$$

知，$h(x)=a_nx^{n-1}+b_{n-1}x^{n-2}+\cdots+b_1$，$f(x)=(x-m)h(x)$，其中 $b_i=a_i+ma_{i+1}$，$i=1,2,\cdots,n-1$，所以，$h(x)$ 是整系数多项式．

2) 由 1)知存在整系数多项式 $h_1(x)$，使得

$$f(x)=(x_1-m_1)h_1(x).$$

仍由 1)存在整系数多项式 $h_2(x)$，使得 $h_1(x)=(x-m_2)h_2(x)$，这样继续下去，存在整系数多项式 $h_r(x)$，使得
$h_{r-1}(x)=(x-m_r)h_r(x)$，从而有：

$$f(x)=(x-m_1)(x-m_2)\cdots(x-m_r)h_r(x).$$

503. 设 $f(x)$ 是整系数多项式，且 $f(1)=f(2)=f(3)=p$（p 为素数），则不存在整数 m，使 $f(m)=2p$.

证 用反证法． 设有整数 m，使 $f(m)=2p$，令 $F(x)=f(x)-p$，则由题设知 $F(1)=F(2)=F(3)=0$. 由第 **502** 条可知，存在 $q(x)\in Z[x]$，使 $F(x)=(x-1)(x-2)(x-3)q(x)$，因此，$p=f(m)-p=F(m)=(m-1)(m-2)(m-3)q(m)$. 这与 p 为素数相矛盾．

504. 求 $f(x)=x^8+x^{30}+x^{1993}$除以 $g(x)=x^4+x^3-x-1$ 所得的余式 $r(x)$.

解 设

$$f(x)=g(x)q(x)+ax^3+bx^2+cx+d, \tag{1}$$

则由 $g(x)=(x+1)(x-1)(x-\omega)(x-\omega^2)$，其中 ω,ω^2 是多项式 x^2+x+1 的两个根．分别令 $x=1,x=-1,x=\omega,x=\omega^2$ 代入(1)式，并注意到 $\omega^3=1$，得

$$\begin{cases}3=a+b+c+d,\\1=-a+b-c+d,\\0=a+b\omega^2+c\omega+d,\\0=a+b\omega+c\omega^2+d\end{cases} \tag{2}$$

解(2)得：

$a=0,b=c=d=1$. $\therefore r(x)=x^2+x+1$.

505. 设 $f(x),g(x),h(x)$是实系数多项式，它们满足下列条件：

$$(x^2-2)h(x)+(x-1)f(x)+(x-2)g(x)=0, \tag{1}$$

$$(x^2-2)h(x)+(x+1)f(x)+(x+2)g(x)=0, \tag{2}$$

证明：$f(x),g(x)$能被 x^2-2 整除．

证 1 (2)－(1)得：

$$2f(x)+4g(x)=0,$$

$\therefore f(x)=-2g(x),g(x)\mid f(x)$.

(2)＋(1)得

$$2(x^2-2)h(x)+2x[f(x)+g(x)]=0,$$

$\therefore (x^2-2)h(x)=-x[f(x)+g(x)]=xg(x)$，即

$(x^2-2)\mid xg(x)$，而$(x^2-2,x)=1$，故$(x^2-2)\mid g(x)$.

又 $g(x)\mid f(x)$，所以$(x^2-2)\mid f(x)$.

证 2 将 $x=\sqrt{2}$代入(1)、(2)，得

$$\begin{cases}(\sqrt{2}-1)f(\sqrt{2})+(\sqrt{2}-2)g(\sqrt{2})=0,\\(\sqrt{2}+1)f(\sqrt{2})+(\sqrt{2}+2)g(\sqrt{2})=0.\end{cases}$$

解得：$f(\sqrt{2})=g(\sqrt{2})=0$，类似地有 $f(-\sqrt{2})=g(-\sqrt{2})=0$. 故 $(x^2-2)\mid f(x)$，$(x^2-2)\mid g(x)$.

三、　最大公因式

506.　什么叫做公因式？

答　如果多项式 $p(x)\mid f_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,s)$，那么称 $p(x)$ 是 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x)$ 的一个公因式（$s\geqslant 2$）.

507.　什么叫做最大公因式？

答　设 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x)$（$s\geqslant 2$）是 $P[x]$ 中的多项式，如果 $P[x]$ 中的多项式 $d(x)$ 满足以下条件：

1）$d(x)$ 是 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x)$ 的公因式；

2）$f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x)$ 的每一公因式全是 $d(x)$ 的因式，

那么，称 $d(x)$ 为 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x)$ 的一个最大公因式.

508.　设 $f(x),g(x)\in P[x]$，那么

1）设 $h(x)$ 是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的公因式，则 $kh(x)$（k 是 P 中任意非零常数）也是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的公因式；

2）设 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式，则 $kd(x)$（$k\neq 0$）也是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式；

3）设 $d_1(x),d_2(x)$ 都是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式，则 $d_1(x)=cd_2(x)$，其中 c 为常数；

4）若 $f(x)\mid g(x)$，则 $f(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式.

证　由定义可证.

509.　记号 $(f(x),g(x))$ 表示什么？

答　首先说明 $f(x),g(x)$ 中至少有一个是非零多项式，其次表示 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的首项系数为 1 的那个最大公因式.

注　① 设多项式 $f(x)$,$g(x)$中至少有一个不等于 0,设 M 为 $f(x)$与 $g(x)$的全部最大公因式所成的集合,则

$$M=\{k(f(x),g(x))\mid k\neq 0,k\in P\}$$

为无穷集.

② 当 $f(x)=g(x)=0$ 时,则 $M=\{0\}$为单元素集.

③ 设 $f(x)$与 $g(x)$至少有一个不等于 0,且 H 为 $f(x)$,$g(x)$所有公因式所成的集合,则$\forall\ \varphi(x)\in H$,都有

$$\partial\varphi(x)\leqslant\partial(f(x),g(x)).$$

由此,最大公因式也可称为最高公因式.

510.　$f(x),g(x)\in P[x]$,$g(x)\neq 0$,在 $P[x]$中,若有 $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$,则$(f(x),g(x))=(g(x),r(x))$.

证　$f(x)$与 $g(x)$的所有公因式的集合记为 M_1;$g(x)$与 $r(x)$的所有公因式的集合记为 M_2. 易证 $M_1=M_2$. 因此有

$$(f(x),g(x))=(g(x),r(x)).$$

注　① 用辗转相除法求$(f(x),g(x))$的根据就是第 **510** 条.

② 由此还可知,求最大公因式不会因数域扩大而改变.

511.　设 $f(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-1$,$g(x)=x^3+x^2-x-1$,求$(f(x),g(x))$.

解　利用辗转相除法.

$-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$	x^3+x^2-x-1	$x^4+x^3-3x^2-4x-1$	x
	$x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x$	$x^4+x^3-x^2-x$	
	$-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-1$	$-2x^2-3x-1$	$\frac{8}{3}x+\frac{4}{3}$
	$-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$	$-2x^2-2x$	
	$-\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}$	$-x-1$	
		$-x-1$	
		0	

故 $-\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}$ 是 $f(x),g(x)$ 的一个最大公因式.

所以 $(f(x),g(x))=x+1$.

512. 对第 **511** 条的 $f(x)$ 和 $g(x)$,在求 $(f(x),g(x))$ 过程中,除式或被除式是否允许乘非零常数?为什么?

答 可以.这不会改变所求结果.比如用分离系数法来计算 $(f(x),g(x))$ 如下:

	1	1	−1	−1	1	1	−3	−4	−1	
乘2⟶	2	2	−2	−2	1	1	−1	−1		
	2	3	1				−2	−3	−1	⟵乘−1
		−1	−3	−2			2	3	1	
乘(−2)⟶		2	6	4			2	2		
		2	3	1				1	1	
			3	3				1	1	
乘$\frac{1}{3}$⟶			1	1					0	

$\therefore (f(x),g(x))=x+1$.

下面解释为什么中间过程允许乘非零常数.因为若

$$f(x)=q(x)g(x)+r(x),$$

则可证

$$(f(x),g(x))=(k_1g(x),r(x))=(g(x),k_2r(x))$$
$$=(k_3g(x),k_4r(x)),$$

其中 $k_1,k_2,k_3,k_4\neq 0$.因此允许中间任何一个除式或被除式乘以一个非零常数,而所求最大公因式不变.

513. 设 $P[x]$ 中有5个多项式满足

$$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x), \qquad (1)$$

则称 $d(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个组合,那么

1) $(f(x),g(x))$ 一定可以表成 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的组合;

2) 当(1)式成立时,能否说 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因

式？

3）若(1)式成立，再有 $d(x)|g(x)$，$d(x)|f(x)$，能否说 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式？

答 1）断言正确．

2）不能． 比如 $f(x)=x+1$，$g(x)=x-1$，$v(x)=u(x)=x$，则 $x(x+1)+x(x-1)=2x^2=d(x)$，而 $d(x)$ 不是 $f(x)$ 或 $g(x)$ 的因式．

3）可以． 由 $d(x)|f(x)$、$d(x)|g(x)$ 可知 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式；其次 $\forall\ q(x)\in P[x]$，由 $\varphi(x)|f(x)$，$\varphi(x)|g(x)$，以及(1)式可知 $q(x)|d(x)$，故 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式．

514. 设 $f(x)=x^4+2x^3-x^2-4x-2$，$g(x)=x^4+x^3-x^2-2x-2$. 求 $u(x)$，$v(x)$ 使

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x)).\tag{1}$$

解 算式：

$x+1$	$x^4+x^3-x^2-2x-2$	$x^4+2x^3-x^2-4x-2$	1
	$x^4\quad -2x^2$	$x^4+x^3-x^2-2x-2$	
	x^3+x^2-2x-2	$x^3\quad -2x$	x
	$x^3\quad -2x$	$x^3\quad -2x$	
	$x^2\quad -2$	0	

知 $f(x)=g(x)+x^3-2x$，$g(x)=(x+1)(x^3-2x)+x^2-2$，$x^3-2x=x(x^2-2)$，故

$$\begin{aligned}(f(x),g(x))&=x^2-2\\&=g(x)-(x+1)(x^3-2x)\\&=g(x)-(x+1)(f(x)-g(x))\\&=-(1+x)f(x)+(x+2)g(x).\end{aligned}$$

所以　$u(x)=-x-1, v(x)=x+2$.

注　① 在求 $u(x)$、$v(x)$ 的计算过程中，除式和被除式不要乘以非零常数．

② 满足(1)式的 $u(x), v(x)$ 不是唯一的．比如，

$$d(x)=[g(x)-(1+x)]f(x)+[x+2-f(x)]g(x).$$

515.　当 k 为何值时，$f(x)=x^2+(k+6)x+4k+2$ 和 $g(x)=x^2+(k+2)x+2k$ 的最大公因式是一次的？并求出这时的最大公因式．

解 1　由辗转相除法知：

$$f(x)=g(x)+(4x+2k+2),$$

$$g(x)=\left[\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}(k+3)\right](4x+2k+2)-\frac{1}{8}(k-1)(k-3).$$

所以当 $k=1$ 或 $k=3$ 时，$f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式是一次的．当 $k=1$ 时，$(f(x),g(x))=x+1$；当 $k=3$ 时，$(f(x),g(x))=x+2$.

解 2　$g(x)=(x+k)(x+2)$.

当 $(f(x),g(x))=x+2$ 时，$f(-2)=4-2(k+6)+4k+2=0$，则 $k=3$；

当 $(f(x),g(x))=x+k$ 时，$f(-k)=k^2-k(k+6)+4k+2=0$，则 $k=1$．这时，$(f(x),g(x))=x+1$.

516.　如果多项式 $f(x)=x^3+(1+t)x^2+2x+2u$ 与多项式 $g(x)=x^3+tx^2+u$ 的最大公因式是一个二次多项式，试求 t, u 的值．

解　因为 $f(x)=g(x)+x^2+2x+u$,

$$g(x)=(x+t-2)(x^2+2x+u)+(4-2t-u)x+3u-tu,$$

而 $f(x), g(x)$ 的最大公因式是一个二次多项式当且仅当

$$\begin{cases}4-2t-u=0,\\3u-tu=0.\end{cases}\text{解得}\begin{cases}u=0\\t=2\end{cases}\text{或}\begin{cases}u=-2,\\t=3.\end{cases}$$

517. 求最大公因式，除了用辗转相除法外，是否还有其它方法？

答 某些多项式还可以用因式分解法．比如：
$f(x)=ap_1^{\alpha_1}(x)p_2^{\alpha_2}(x)\cdots p_s^{\alpha_s}(x)$，$g(x)=bp_1^{\beta_1}(x)p_2^{\beta_2}(x)\cdots p_s^{\beta_s}(x)$，其中 $p_i(x)$是首项系数为 1 的不可约多项式，a,b 为常数，α_i,β_i 为非零整数．令 $r_i=\min\{\alpha_i,\beta_i\}$，则

$$(f(x),g(x))=p_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(x).$$

四、互素

518. 什么叫两个多项式互素？

答 $P[x]$中的两个多项式 $f(x)$与 $g(x)$，若$(f(x),g(x))=1$，则称 $f(x)$与 $g(x)$互素．

注 ① 两个多项式互素不是它们无公因式，而是只有非零常数的公因式．设 $f(x),g(x)$的公因式集为 M_1，最大公因式集为 M_2，且$(f(x),g(x))=1$，则 $M_1=M_2=P-\{0\}$.

一般来说，若$(f(x),g(x))=d(x)\neq 1$，则 M_2 是 M_1 的真子集．

② 零多项式与任一多项式都不互素．

519. 设 $f(x),g(x)\in P[x]$，则$(f(x),g(x))=1\Longleftrightarrow$存在 $u(x),v(x)\in P[x]$，使

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1. \qquad (1)$$

注 ① 由(1)式还有：

$$(f(x),v(x))=(u(x),g(x))=(u(x),v(x))=1.$$

② 设 c 为非零常数，则$(c,f(x))=1$，其中 $f(x)$是任意多项式．

520. 设 $f(x)\mid g(x)h(x)$，$(f(x),g(x))=1$，则 $f(x)\mid h(x)$.

521. 若 $f_1(x)\mid g(x)$，$f_2(x)\mid g(x)$，且$(f_1(x),f_2(x))=1$，则 $f_1(x)f_2(x)\mid g(x)$.

522.　若 $f_i(x)\mid g(x)$ $(i=1,2,\cdots,n)$，且

$$(f_1(x)\cdots f_k(x),f_{k+1}(x))=1\ (k=1,2,\cdots,n-1),$$

则 $f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)\mid g(x)$.

证　由第 **521** 条可证．

523.　设 $f(x)=(x-a_1)^{r_1}(x-a_2)^{r_2}\cdots(x-a_s)^{r_s}$,

$$g(x)=(x-b_1)^{t_1}\cdots(x-b_m)^{t_m},$$

其中 $a_1,a_2,\cdots,a_s,b_1,\cdots,b_m$ 互不相同，$r_1,r_2,\cdots,r_s,t_1,\cdots,t_m$ 为自然数，则 $(f(x),g(x))=1$.

证　由第 **517** 条可证．

524.　设 $h(x)$ 是一个首项系数为 1 的多项式，证明：
$(f(x)h(x),g(x)h(x))=(f(x),g(x))h(x)$.

证　存在 $u(x)$ 与 $v(x)$，使

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x)).$$

$\therefore$　$u(x)f(x)h(x)+v(x)g(x)h(x)=(f(x),g(x))h(x)$.

即 $(f(x),g(x))h(x)$ 是 $f(x)h(x)$ 与 $g(x)h(x)$ 的一个组合．

由 $(f(x),g(x))\mid f(x)$，得 $(f(x),g(x))h(x)\mid f(x)h(x)$.

同理，$(f(x),g(x))h(x)\mid g(x)$. 由第 **513** 条 3) 知

$$(f(x)h(x),g(x)h(x))=(f(x),g(x))h(x).$$

注　若 $h(x)$ 首项系数不等于 1，则

$$(f(x)h(x),g(x)h(x))=a(f(x),g(x))h(x).$$

其中 a 为 $h(x)$ 的首项系数的倒数．

525.　设 $f(x)=d(x)f_1(x)$，$g(x)=d(x)g_1(x)$，且 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不全为零，证明：$d(x)$ 是 $f(x)$，$g(x)$ 的一个最大公因式 $\Longleftrightarrow$ 是 $(f_1(x),g_1(x))=1$.

证　必要性　若 $d(x)$ 是 $f(x)$，$g(x)$ 的一个最大公因式，则有多项式 $u(x)$，$v(x)$ 使

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=d(x),$$

即

$$f_1(x)d(x)u(x)+g_1(x)d(x)v(x)=d(x).$$

由 $f(x),g(x)$ 不全为零知 $d(x)\neq 0$，因此有

$$f_1(x)u(x)+g_1(x)v(x)=1 \text{ 即} (f_1(x),g_1(x))=1.$$

充分性　若 $(f_1(x),g_1(x))=1$，则有多项式 $u(x),v(x)$，使

$$f_1(x)u(x)+g_1(x)v(x)=1$$

两边同乘 $d(x)$，有：

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=d(x).$$

由 $d(x)$ 是 $f(x),g(x)$ 的一个公因式知 $d(x)$ 是 $f(x),g(x)$ 的一个最大公因式．

注　特别地，当 $(f(x),g(x))=u(x)f(x)+v(x)g(x)$ 时，由上面的证明过程知

$$1=u(x)\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}+v(x)\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}.$$

526.　如果 $f(x),g(x)$ 不全为零，且有

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x)),$$

证明：$(u(x),v(x))=1$ 且 $\left(\frac{f(x)}{(f(x),g(x))},\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}\right)=1$.

证　由第 **525** 条的注可知．

527.　证明：只要 $\frac{f(x)}{(f(x),g(x))},\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}$ 的次数都大于零，就可选择适合等式

$u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x))$ 的 $u(x),v(x)$，使

$$\partial(u(x))<\partial\left(\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}\right),\partial(v(x))<\partial\left(\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}\right).$$

证　令 $f_1(x)=\frac{f(x)}{(f(x),g(x))},g_1(x)=\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}$，

由第 **526** 条知，$(f_1(x),g_1(x))=1$，从而存在 $u_1(x),v_1(x)$，使

$$u_1(x)f_1(x)+v_1(x)g_1(x)=1. \tag{1}$$

由(1)式可知 $g_1(x)$ 不能整除 $u_1(x)$，$f_1(x)$ 不能整除 $v_1(x)$．于是有：

$$u_1(x)=g_1(x)q(x)+u(x),\text{其中 }\partial(u(x))<\partial(g_1(x));\quad (2)$$

$$v_1(x)=f_1(x)h(x)+v(x),\text{其中 }\partial(v(x))<\partial(f_1(x)).\quad (3)$$

将(2)、(3)式代入(1)式,并整理得

$$u(x)f_1(x)+v(x)g_1(x)+[q(x)+h(x)]f_1(x)g_1(x)=1.\quad (4)$$

由于 $\partial(u(x)f_1(x))<\partial(f_1(x)g_1(x))$,

$$\partial(v(x)g_1(x))<\partial(f_1(x)g_1(x)),$$

则由(4)知 $q(x)+h(x)=0$. 代入(4)得

$$\begin{aligned}1&=u(x)f_1(x)+v(x)g_1(x)\\&=u(x)\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}+v(x)\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}.\end{aligned}$$

再注意到(2)、(3)式,即得欲证的结论.

528. 令 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是 $P[x]$ 的多项式,而 a,b,c,d 是 P 中的数,并且 $ad-bc\neq0$,证明:

$$(af(x)+bg(x),cf(x)+dg(x))=(f(x),g(x)).$$

证 令

$$f_1(x)=af(x)+bg(x),f_2(x)=cf(x)+dg(x)\quad (1)$$

设 $d(x)=(f(x),g(x))$,则 $d(x)|f(x),d(x)|g(x)$. 由(1)式有 $d(x)|f_1(x),d(x)|f_2(x)$. 因 $ad-bc\neq0$,故由(1)式解出

$$f(x)=\frac{d}{ad-bc}f_1(x)-\frac{b}{ad-bc}f_2(x);\quad (2)$$

$$g(x)=\frac{-c}{ad-bc}f_1(x)+\frac{a}{ad-bc}f_2(x).\quad (3)$$

故若 $h(x)$ 是 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 的任一公因式,则由(2)、(3)两式必有 $h(x)|f(x),h(x)|g(x)$. 所以 $h(x)|d(x)$. 而 $d(x)$ 是 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 的因式是明显的,故

$$(af(x)+bg(x),cf(x)+dg(x))=d(x)=(f(x),g(x)).$$

529. 设 $g(x),f(x)\in P[x]$,证明:如果 $(f(x),g(x))=1$,那么对任意 $h(x)\in P[x]$,都有:

$$(f(x)h(x),g(x))=(h(x),g(x)).$$

证 存在 $u(x),v(x)\in P[x]$，使 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$，不妨假定 $h(x)\neq 0$，则有

$$u(x)f(x)h(x)+v(x)g(x)h(x)=h(x). \tag{1}$$

设 $d(x)=(f(x)h(x),g(x))$. $d(x)\mid f(x)h(x)$，$d(x)\mid g(x)$. 故由(1)知 $d(x)\mid h(x)$.

其次，$\forall$ 的 $\varphi(x)\mid g(x)$，$\varphi(x)\mid h(x)$，有 $\varphi(x)\mid f(x)h(x)$，从而 $\varphi(x)\mid d(x)$，即得 $d(x)=(h(x),g(x))$.

当 $h(x)=0$ 时，结论显然成立．

530. 证明：$(f(x),g(x)h(x))=1\Longleftrightarrow$：$(f(x),g(x))=1$ 且 $(f(x),h(x))=1$.

证 必要性 因 $(f(x),g(x)h(x))=1$，则有

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)h(x)=1.$$

所以，$(f(x),g(x))=1$，且 $(f(x),h(x))=1$.

充分性 因 $(f(x),g(x))=1$ 与 $(f(x),h(x))=1$，所以

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1,\ u_1(x)f(x)+v_1(x)h(x)=1.$$

两式相乘得：

$$f(x)[u(x)u_1(x)f(x)+u(x)v_1(x)h(x)+u_1(x)v(x)g(x)] + (v(x)v_1(x))g(x)h(x)=1.$$

$\therefore\quad (f(x),g(x)h(x))=1.$

531. 证明：$(f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x),g_1(x)g_2(x)\cdots g_m(x))=1$ $\Longleftrightarrow (f_i(x),g_j(x))=1,i=1,2,\cdots,n、j=1,2,\cdots,m.$

证 必要性 由假设，存在 $u(x)$，$v(x)$ 使

$$\begin{aligned}1&=u(x)[f_1(x)\cdots f_n(x)]+v(x)[g_1(x)\cdots g_m(x)]\\&=f_i(x)[u(x)f_1(x)\cdots f_{i-1}(x)f_{i+1}(x)\cdots f_n(x)]\\&\quad+g_j(x)[v(x)g_1(x)\cdots g_{j-1}(x)g_{j+1}(x)\cdots g_m(x)],\end{aligned}$$

此即 $(f_i(x),g_j(x))=1$. 由 i,j 的任意性即证．

充分性 由 $(f_1(x),g_1(x))=1$，$(f_1(x),g_2(x))=1$，则由第

530 条有：$(f_1(x),g_1(x)g_2(x))=1$，但$(f_1(x),g_3(x))=1$，由第 **530** 条$(f_1(x),g_1(x)g_2(x)g_3(x))=1$. 继续下去可得：

$$(f_1(x),g_1(x)\cdots g_m(x))=1.$$

令 $g(x)=g_1(x)\cdots g_m(x)$，已证$(f_1(x),g(x))=1$. 类似地，可证$(f_2(x),g(x))=1$. 由第 **530** 条$(f_1(x)f_2(x),g(x))=1$. 继续下去，可证得$(f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x),g(x))=1$，此即

$$(f_1(x)\cdots f_n(x),g_1(x)\cdots g_m(x))=1.$$

532. $(f^n(x),g^m(x))=1\Longleftrightarrow(f(x),g(x))=1$. 其中 n,m 为自然数.

证 此即为第 **531** 条的特例.

533. $(f(x),g(x))=1$ 充要条件是$(f(x),f(x)+g(x))=1$.

证 由第 **528** 条立即可得$(f(x),g(x))=(f(x),f(x)+g(x))$.

注 也有$(g(x),f(x)+g(x))=1$.

534. 设 $f(x),g(x)\in P[x]$，证明：

$(f(x)g(x),f(x)+g(x))=1\Longleftrightarrow(f(x),g(x))=1$.

证 必要性 若$(f(x)g(x),f(x)+g(x))=1$，则由第 **530** 条有：$(f(x),f(x)+g(x))=1$，但由第 **528** 条可得$(f(x),g(x))=(f(x),f(x)+g(x))$，所以 $(f(x),g(x))=1$.

充分性 若$(f(x),g(x))=1$，则由第 **533** 条有

$$(f(x),f(x)+g(x))=1 \text{ 及 } (g(x),f(x)+g(x))=1.$$

又据第 **531** 条得 $(f(x)g(x),f(x)+g(x))=1$.

535. 证明：如$(f(x),g(x))=1$，那么对任意正整数 m，有

$$(f(x^m),g(x^m))=1.$$

证 存在 $u(x),v(x)$使

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=1. \qquad (1)$$

在(1)式中用 x^m 代入，得：$f(x^m)u(x^m)+g(x^m)v(x^m)=1$.

所以 $(f(x^m),g(x^m))=1$.

536. 证明:对于任意正整数 n,都有

$$(f(x),g(x))^n=(f^n(x),g^n(x)).$$

证 1 要符号 $(f(x),g(x))$、$(f^n(x),g^n(x))$ 都有意义,必须 $f(x),g(x)$ 不全为零. 令 $(f(x),g(x))=d(x)$,则 $d(x)\neq 0$,从而 $\left(\frac{f(x)}{d(x)},\frac{g(x)}{d(x)}\right)=1$. 故对于任意正整数 n,有

$$\left(\left(\frac{f(x)}{d(x)}\right)^n,\left(\frac{g(x)}{d(x)}\right)^n\right)=1,$$

于是有

$$u(x)\frac{f^n(x)}{d^n(x)}+v(x)\frac{g^n(x)}{d^n(x)}=1,$$

即 $u(x)f^n(x)+v(x)g^n(x)=d^n(x)$.

又由 $d(x)\mid f(x),d(x)\mid g(x)$ 有 $d^n(x)\mid f^n(x),d^n(x)\mid g^n(x)$. 因此 $d^n(x)$ 是 $f^n(x)$ 与 $g^n(x)$ 的首项系数为 1 的最大公因式,从而有

$$(f^n(x),g^n(x))=d^n(x)=(f(x),g(x))^n.$$

证 2 设 $(f(x),g(x))=d(x)$,且 $f(x)=d(x)f_1(x),g(x)=d(x)g_1(x)$,则 $(f_1(x),g_1(x))=1$.

由第 **532** 条知:$(f_1{}^n(x),g_1{}^n(x))=1$. 又

$$f^n(x)=f_1{}^n(x)d^n(x),g^n(x)=g_1{}^n(x)d^n(x),$$

于是由第 **524** 条,有

$$\begin{aligned}(f^n(x),g^n(x))&=(f_1{}^n(x)d^n(x),g_1{}^n(x)d^n(x))\\&=(f_1{}^n(x),g_1{}^n(x))d^n(x)\\&=d^n(x)=(f(x),g(x))^n.\end{aligned}$$

537. 设 $f(x),g(x)$ 为有理系数多项式,$(f(x),g(x))=1$,且

$$\varphi(x)=(x^3-1)f(x)+(x^3-x^2+x-1)g(x),$$

$$\psi(x)=(x^2-1)f(x)+(x^2-x)g(x).$$

求$(\varphi(x),\psi(x))$.

解　令$d(x)=(\varphi(x),\psi(x))$. 由题设,有

$$\varphi(x)=(x-1)[(x^2+x+1)f(x)+(x^2+1)g(x)], \quad (1)$$

$$\psi(x)=(x-1)[(x+1)f(x)+xg(x)]=(x-1)h(x), \quad (2)$$

其中

$$h(x)=(x+1)f(x)+xg(x)=x[f(x)+g(x)]+f(x). \quad (3)$$

由(1)、(2)知$d(x)=(x-1)d_1(x)$,而$d(x)\mid\psi(x)$,即$(x-1)d_1(x)\mid(x-1)h(x)$,所以$d_1(x)\mid h(x)$.

(1)$-x\times$(2) 得

$$\varphi(x)-x\psi(x)=(x-1)[f(x)+g(x)].$$

由$d(x)\mid\varphi(x)-x\psi(x)$,故$d_1(x)\mid f(x)+g(x)$. 由(3)式知

$$d_1(x)\mid f(x),从而\ d_1(x)\mid(f(x),f(x)+g(x)).$$

但$(f(x),f(x)+g(x))=(f(x),g(x))=1$,故$d_1(x)=1$. 即$(\varphi(x),\psi(x))=x-1$.

538.　设$g(x)=p^k(x)g_1(x)(k\geqslant1)$,$(p(x),g_1(x))=1$. 证明:对任意多项式$f(x)$,有

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{r(x)}{p^k(x)}+\frac{f_1(x)}{p^{k-1}(x)g_1(x)}.$$

其中$r(x)=0$或$\partial(r(x))<\partial(p(x))$,而$f_1(x)$是某一多项式.

证　1) $p(x)\mid f(x)$,记$f(x)=p(x)f_1(x)$,则

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{p^k(x)}+\frac{f_1(x)}{p^{k-1}(x)g_1(x)},$$

即等式成立.

2) $p(x)\nmid f(x)$,设$f(x)=p(x)q_1(x)+r_1(x)$,其中$\partial(r_1(x))<\partial(p(x))$.

因为$(p(x),g_1(x))=1$,即存在$u(x),v(x)$,有

$$u(x)p(x)+v(x)g_1(x)=1.$$

$r_1(x)=r_1(x)u(x)p(x)+r_1(x)v(x)g_1(x)$. 由 $p(x)\nmid r_1(x)v(x)$，令 $r_1(x)v(x)=q(x)p(x)+r(x)$，此处 $\partial(r(x))<\partial(p(x))$，那么 $f(x)=p(x)[q_1(x)+r_1(x)u(x)+q(x)g_1(x)]+r(x)g_1(x)$.

记 $f_1(x)=q_1(x)+r_1(x)u(x)+q(x)g_1(x)$，即

$$f(x)=f_1(x)p(x)+r(x)g_1(x).$$

所以 $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f(x)}{p^k(x)g_1(x)}=\dfrac{r(x)}{p^k(x)}+\dfrac{f_1(x)}{p^{k-1}(x)g_1(x)}$.

539. 设 $(f_1(x),f_2(x))=1$，$r_1(x)$，$r_2(x)$ 是适合条件 $\partial(r_1(x))<\partial(f_1(x))$，$\partial(r_2(x))<\partial(f_2(x))$ 的两个多项式，证明：存在一个多项式 $g(x)$，它除以 $f_1(x)$ 得余式 $r_1(x)$、除以 $f_2(x)$ 得余式 $r_2(x)$.

证 $(f_1(x),f_2(x))=1$，即存在 $u(x)$，$v(x)$，使

$$u(x)f_1(x)+v(x)f_2(x)=1.$$

$$\therefore r_1(x)=r_1(x)u(x)f_1(x)+r_1(x)v(x)f_2(x),$$

$$r_2(x)=r_2(x)u(x)f_1(x)+r_2(x)v(x)f_2(x).$$

设所求多项式为 $g(x)$，令

$$g(x)=f_1(x)q_1(x)+r_1(x)=f_1(x)[q_1(x)+r_1(x)u(x)]+r_1(x)v(x)f_2(x).$$

$$g(x)=f_2(x)q_2(x)+r_2(x)=f_2(x)[q_2(x)+r_2(x)v(x)]+r_2(x)u(x)f_1(x)$$

其中 $q_1(x)$，$q_2(x)$ 为待定多项式，但是

$$f_1(x)q_1(x)+r_1(x)=f_2(x)q_2(x)+r_2(x)\Longleftrightarrow$$

$$f_1(x)[q_1(x)+r_1(x)u(x)]+r_1(x)v(x)f_2(x)=f_2(x)[q_2(x)+r_2(x)v(x)]+r_2(x)u(x)f_1(x)$$

$$\Longleftrightarrow f_1(x)[r_1(x)u(x)+q_1(x)-r_2(x)u(x)]=f_2(x)[r_2(x)v(x)+q_2(x)-r_1(x)v(x)],$$

故取 $q_1(x)=r_2(x)u(x)-r_1(x)u(x)$，

$$q_2(x)=r_1(x)v(x)-r_2(x)v(x),$$

即 $f_1(x)q_1(x)+r_1(x)=f_2(x)q_2(x)+r_2(x)$. 故令

$$g(x)=f_1(x)q_1(x)+r_1(x)$$

即可.

540. 设 $f(x)\neq 0$, $h(x)$ 是任意多项式, 证明: 如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素, 那么有 $(f(x),g(x)h(x))=(f(x),h(x))$. 问: 反之是否成立?

证 设 $(f(x),h(x))=d(x)$, 则 $d(x)\mid f(x)$, $d(x)\mid h(x)$. 于是 $d(x)\mid g(x)h(x)$, 所以 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)h(x)$ 的公因式.

对于 $f(x)$ 与 $g(x)h(x)$ 的任一公因式 $\varphi(x)$, 由 $(f(x),g(x))=1$ 从而可得 $(\varphi(x),g(x))=1$, 所以 $\varphi(x)\mid h(x)$, 从而 $\varphi(x)\mid d(x)$, 故 $d(x)=(f(x),g(x)h(x))$.

反之不成立. 比如: 当 $f(x)=g(x)=h(x)=x+1$ 时, $(f(x),g(x)h(x))=x+1=(f(x),h(x))$, 而 $(f(x),g(x))=x+1\neq 1$.

541. 设 $f(x)$, $g(x)$ 是两个非零多项式, 证明: 若对任一多项式 $h(x)$, 由 $f(x)\mid g(x)h(x)$ 都可得到 $f(x)\mid h(x)$, 证明: $(f(x),g(x))=1$.

证 用反证法. 设 $(f(x),g(x))=d(x)$, 且 $\partial(d(x))>0$, 则 $f(x)=d(x)f_1(x)$, $g(x)=d(x)g_1(x)$, 其中 $\partial(f_1(x))<\partial(f(x))$. 于是 $g(x)f_1(x)=g_1(x)f(x)$, $f(x)\mid g(x)f_1(x)$. 但是 $f(x)$ 不能整除 $f_1(x)$, 与题设矛盾. 故 $(f(x),g(x))=1$.

542. 若对任一多项式 $h(x)$, 由 $f(x)\mid h(x)$, $g(x)\mid h(x)$, 都可得到 $f(x)g(x)\mid h(x)$, 则 $(f(x),g(x))=1$.

证 用反证法. 设 $(f(x),g(x))=d(x)$, 且 $\partial(d(x))>0$, 则 $f(x)=d(x)f_1(x)$, $g(x)=d(x)g_1(x)$, 其中 $\partial(f_1(x))<\partial(f(x))$, 于是 $f(x)\mid g(x)f_1(x)$. 又 $g(x)\mid g(x)f_1(x)$, 所以 $f(x)g(x)$ 整除 $g(x)f_1(x)$, 不可能.

543. 证明: $(f(x),g(x))=1\Longleftrightarrow$ 是对任一多项式 $h(x)$, 都

存在 $s(x)$ 与 $t(x)$，使 $f(x)s(x)+g(x)t(x)=h(x)$.

证 充分性 取 $h(x)=1$，由充分性题设，所以

$$(f(x),g(x))=1.$$

必要性 若 $(f(x),g(x))=1$，则有 $u(x),v(x)$，使

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=1$$

故对于任意多项式 $h(x)$，有

$$s(x)=u(x)h(x),t(x)=v(x)h(x).$$

使

$$f(x)s(x)+g(x)t(x)=h(x).$$

544. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是两个非零多项式，证明：$f(x)$ 与 $g(x)$ 不互素 $\Longleftrightarrow$ 存在两个多项式 $h(x),k(x)$ 满足：

$$f(x)h(x)+g(x)k(x)=0. \qquad (1)$$

其中 $0\leqslant\partial(h(x))<\partial(g(x)),0\leqslant\partial(k(x))<\partial(f(x))$.

证 充分性 假设(1)成立，则

$$f(x)h(x)=g(x)[-k(x)].$$

于是 $g(x)|f(x)h(x)$，若 $(f(x),g(x))=1$，那么 $g(x)|h(x)$，这与 $0\leqslant\partial(h(x))<\partial(g(x))$ 矛盾．因此 $(f(x),g(x))\neq1$.

必要性 若 $f(x),g(x)$ 不互素，则

$$(f(x),g(x))=d(x),\partial(d(x))>0.$$

令 $h(x)=-\dfrac{g(x)}{d(x)},k(x)=\dfrac{f(x)}{d(x)}$，则

$$0\leqslant\partial(h(x))<\partial(g(x)),0\leqslant\partial(k(x))<\partial(f(x)),$$

且有 $f(x)h(x)+g(x)k(x)=0$.

545. 设 $f_i(x)=x-a_i(i=1,2,\cdots,n)$，其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为互不相同的复数，求 $(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x))$.

解 因为 $(f_1(x),f_2(x))=1$，所以 $(f_1(x),\cdots,f_n(x))=1$.

546. 怎样求 $(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x))$？

答 先求 $(f_1(x),f_2(x))=d_2(x)$，再求 $(d_2(x),f_3(x))=$

$d_3(x)$，这样继续下去，求出$(d_{n-2}(x),f_{n-1}(x))=d_{n-1}(x)$，$(d_{n-1}(x),f_n(x))=d_n(x)$，则$d_n(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x))$.

547. 证明：如果$f_1(x),f_2(x),\cdots,f_{s-1}(x)$的最大公因式存在，那么$f_1(x),f_2(x),\cdots,f_{s-1}(x),f_s(x)$的最大公因式也存在，且

$$(f_1(x),\cdots,f_{s-1}(x),f_s(x))=((f_1(x),\cdots,f_{s-1}(x)),f_s(x)). \tag{1}$$

再利用上式证明，存在多项式$u_1(x),u_2(x),\cdots,u_s(x)$，使

$$u_1(x)f_1(x)+\cdots+u_s(x)f_s(x)=(f_1(x),\cdots,f_s(x)). \tag{2}$$

证 令$d_1(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_{s-1}(x))$. 由于$d_1(x)$与$f_s(x)$的最大公因式存在，因此可以令$d(x)=(d_1(x),f_s(x))$. 由于$d(x)|f_s(x)$和$d(x)|d_1(x)$，但$d_1(x)|f_i(x)$，$(i=1,\cdots,s-1)$故

$$d(x)|f_i(x),i=1,\cdots,s.$$

$\forall\ \varphi(x)|f_i(x),i=1,\cdots,s$，则，$\varphi(x)|d_1(x)$和$\varphi(x)|f_s(x)$，从而$\varphi(x)|d(x)$. 由此得证$d(x)=(f_1(x),\cdots,f_s(x))$，即(1)式成立.

用数学归纳法证明(2)式. 当$s=2$时结论显然成立. 归纳假设对$s-1$成立，即存在$v_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,s-1)$，有

$$d_1(x)=v_1(x)f_1(x)+\cdots+v_{s-1}(x)f_{s-1}(x) \tag{3}$$

再讨论s时，由$d(x)$的定义，存在$u(x),v(x)$，使

$$\begin{aligned}d(x)&=u(x)d_1(x)+v(x)f_s(x)\\&=u(x)[v_1(x)f_1(x)+\cdots+v_{s-1}(x)f_{s-1}(x)]+v(x)f_s(x)\\&=u_1(x)f_1(x)+\cdots+u_s(x)f_s(x),\end{aligned}$$

其中 $u_i(x)=u(x)v_i(x)$ $(i=1,\cdots,s-1)$，$u_s(x)=v(x)$.

注 求$(f_1(x),\cdots,f_s(x))$与顺序无关. 即$f_{i_1}(x),\cdots,f_{i_s}(x)$为$f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x)$的任一排列，则可先求$d_2(x)=(f_{i_1}(x),f_{i_2}(x))$，再求$d_3(x)=(f_{i_3}(x),d_2(x))$，…，$d_s(x)=(d_{n-1}(x),f_{i_s}(x))$. 故

$d_s(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x))=(f_{i_1}(x),f_{i_2}(x),\cdots,f_{i_s}(x))$.

548. $(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x))=1$ 表示什么？

答 $(f_1(x),\cdots,f_n(x))=1$ 首先表明 $f_1(x),\cdots,f_n(x)$ 不全为零，其次表明它们仅有非零常数的公因式．

注 由第 **547** 条知，当 $(f_1(x),\cdots,f_n(x))=1$ 时，存在 $u_1(x),\cdots,u_n(x)$，使 $u_1(x)f_1(x)+\cdots+u_n(x)f_n(x)=1$.

549. 命题"$(f_1(x),\cdots,f_n(x))=1 \Longleftrightarrow (f_i(x),f_j(x))=1,i\neq j,i、j=1,\cdots,n$"．是否成立？

答 不成立．比如：

$$f_1(x)=(x-1)(x-2),f_2(x)=(x-2)(x-3),$$
$$f_3(x)=(x-3)(x-1),$$

则

$$(f_1(x),f_2(x),f_3(x))=1,但(f_i(x),f_j(x))\neq 1,i\neq j.$$

550. 1) 若 $f_i(x),f_j(x)\in\{f_1(x),\cdots,f_n(x)\}$，有 $(f_i(x),f_j(x))=1$，则 $(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x))=1$.

2) 若 $f_{i_1}(x),\cdots,f_{i_r}(x)\in\{f_1(x),\cdots,f_n(x)\}$，有 $(f_{i_1}(x),\cdots f_{i_r}(x))=1$，则 $(f_1(x),\cdots,f_n(x))=1$.

证 1) 由第 **547** 条知，求 $(f_1(x),\cdots,f_n(x))$ 时与顺序无关．可以先从 $(f_i(x),f_j(x))$ 开始，但 $(f_i(x),f_j(x))=1$，所以由 $(1,f_k(x))=1$ 知：$(f_1(x),\cdots,f_n(x))=1$.

2) 先求 $(f_{i_1}(x),\cdots,f_{i_r}(x))=1$，再 $(1,f_k(x))=1$，$(k\neq i_1,\cdots,i_r)$，所以 $(f_1(x),\cdots,f_n(x))=1$.

注 两两互素可以得到全体互素，全体互素不一定两两互素．

551. 证明：

1) $(f_1(x),f_2(x),f_3(x),f_4(x))$

$$=((f_1(x),f_2(x)),(f_3(x),f_4(x))).$$

2) $(f_1(x),g_1(x))(f_2(x),g_2(x))$

$$=(f_1(x)f_2(x),f_1(x)g_2(x),g_1(x)f_2(x),g_1(x)g_2(x)).$$

证　1) 令 $d(x)=(f_1(x),f_2(x),f_3(x),f_4(x))$, $d_1(x)=(f_1(x),f_2(x))$, $d_2(x)=(f_3(x),f_4(x))$. 下证 $d(x)=(d_1(x),d_2(x))$.

因为 $d(x)|f_1(x)$, $d(x)|f_2(x)$, $d(x)|f_3(x)$, $d(x)|f_4(x)$, 所以 $d(x)|d_1(x)$, $d(x)|d_2(x)$.

其次，设 $\varphi(x)$是 $d_1(x)$与 $d_2(x)$的公因式，则 $\varphi(x)|f_1(x)$, $\varphi(x)|f_2(x)$, $\varphi(x)|f_3(x)$, $\varphi(x)|f_4(x)$, 从而 $\varphi(x)|d(x)$. 所以 $d(x)=(d_1(x),d_2(x))$.

2) **证 1**　记 $d_i(x)=(f_i(x),\ g_i(x))$, $(i=1,2)$, 则易知 $d_1(x)d_2(x)$是 $f_1(x)f_2(x),f_1(x)g_2(x),g_1(x)f_2(x),g_1(x)g_2(x)$ 的一个首项系数是 1 的公因式，且有 $u_1(x),u_2(x),v_1(x),v_2(x)\in P[x]$，使

$$f_1(x)u_1(x)+g_1(x)v_1(x)=d_1(x),$$

$$f_2(x)u_2(x)+g_2(x)v_2(x)=d_2(x).$$

$$\begin{aligned}&f_1(x)f_2(x)u_1(x)u_2(x)+f_1(x)g_2(x)u_1(x)v_2(x)\\&\quad+g_1(x)f_2(x)v_1(x)u_2(x)+g_1(x)g_2(x)v_1(x)v_2(x)\\&\quad=d_1(x)d_2(x).\end{aligned}$$

又设 $\varphi(x)$是 4 个多项式

$$f_1(x)f_2(x),f_1(x)g_2(x),g_1(x)f_2(x),g_1(x)g_2(x)$$

的任一公因式，则由上式知有

$$\varphi(x)|d_1(x)d_2(x).$$

则　$(f_1(x),g_1(x))(f_2(x),g_2(x))=d_1(x)d_2(x)$

$$=(f_1(x)f_2(x),f_1(x)g_2(x),g_1(x)f_2(x),g_1(x)g_2(x)).$$

2) **证 2**　设$(f_2(x),g_2(x))=h(x)$，则由 1)及第 **524** 条有：

$$(f_1(x)f_2(x),f_1(x)g_2(x),g_1(x)f_2(x),g_1(x)g_2(x))$$

$$=((f_1(x)f_2(x),f_1(x)g_2(x)),(g_1(x)f_2(x),g_1(x)g_2(x)))$$

$$=((f_2(x),g_2(x))k_1f_1(x),(f_2(x),g_2(x))k_2g_1(x))$$
$$=(f_1(x)h(x),g_1(x)h(x))=(f_1(x),g_1(x))h(x)$$
$$=(f_1(x),g_1(x))(f_2(x),g_2(x)).$$

其中 $k_1f_1(x)$，$k_2g_1(x)$是首项系数为 1 的多项式．

注　类似可证：

$$(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x))$$
$$=((f_1(x),\cdots,f_k(x)),(f_{k+1}(x),\cdots,f_n(x))).$$

此处 $1\leqslant k\leqslant n-1$.

552.　设 $f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x)$是数域 P 上的非零多项式．证明：$f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x)$两两互素$\Longleftrightarrow$存在 $u(x)$，$v(x)$，$w(x)\in P[x]$，使

$$u(x)f_1(x)f_2(x)+v(x)f_1(x)f_3(x)+w(x)f_2(x)f_3(x)=1. \tag{1}$$

证　充分性　由(1)得

$$[u(x)f_2(x)+v(x)f_3(x)]f_1(x)+[w(x)f_2(x)]f_3(x)=1,$$

即　　$(f_1(x),f_3(x))=1$. 完全类似可得

$$(f_1(x),f_2(x))=1,(f_2(x),f_3(x))=1.$$

必要性　由$(f_1(x),f_2(x))=(f_1(x),f_3(x))=1$ 得$(f_1(x),f_2(x)f_3(x))=1$，即存在 $a(x)$，$b(x)\in P[x]$，使

$$a(x)f_1(x)+b(x)f_2(x)f_3(x)=1. \tag{1}$$

又$(f_2(x),f_3(x))=1$，即存在 $r(x)$，$s(x)\in P[x]$，使

$$r(x)f_2(x)+s(x)f_3(x)=1. \tag{2}$$

因此，由(1)、(2)可得

$$a(x)r(x)f_1(x)f_2(x)+a(x)s(x)f_1(x)f_3(x)$$
$$+[r(x)f_2(x)+s(x)f_3(x)]b(x)f_2(x)f_3(x)=1.$$

取 $u(x)=a(x)r(x)$，$v(x)=a(x)s(x)$，$w(x)=[r(x)f_2(x)+s(x)f_3(x)]b(x)$，即得

$$u(x)f_1(x)f_2(x)+v(x)f_1(x)f_3(x)+w(x)f_2(x)f_3(x)=1.$$

553.　证明：$g^m(x)\mid f^m(x)\Longleftrightarrow g(x)\mid f(x)$，其中 m 为一自然数.

证　充分性　显然.

必要性　当 $g^m(x)=0$ 时，$f^m(x)=0$，由此易得 $f(x)=g(x)=0$. 若 $g^m(x)\mid f^m(x)$，从而 $g(x)\mid f(x)$.

当 $g^m(x)\neq 0$ 时，$g(x)\neq 0$. 因此，$(g(x),f(x))=d(x)\neq 0$. 令 $g(x)=g_1(x)d(x)$，$f(x)=f_1(x)d(x)$，其中 $(g_1(x),f_1(x))=1$.

依题设，$g^m(x)\mid f^m(x)$，即 $f^m(x)=g^m(x)q(x)$，所以 $f_1^m(x)\cdot d^m(x)=g_1^m(x)d^m(x)q(x)$，而 $d^m(x)\neq 0$，故 $f_1^m(x)=g_1^m(x)q(x)$，所以 $g_1(x)\mid f_1^m(x)$.

但 $(f_1(x),g_1(x))=1$，从而 $g_1(x)\mid f_1^{m-1}(x)$，如此继续下去，最后可得 $g_1(x)\mid f_1(x)$，即 $f_1(x)=g_1(x)q_1(x)$，于是

$$f(x)=f_1(x)d(x)=g_1(x)d(x)q_1(x)=g(x)q_1(x),$$

故 $g(x)\mid f(x)$.

554.　设 P,F 是两个数域，且 $P\subseteq F$. 若在 $P[x]$ 中，有 $(f(x),g(x))=1$，则在 $F[x]$ 中，也有 $(f(x),g(x))=1$.

证　由第 **510** 条的注②即知.

555.　设 $(f_i(x),g_j(x))=1$，i、$j=1,2$. 证明

$$(f_1(x)g_1(x),f_2(x)g_2(x))=(f_1(x),f_2(x))(g_1(x),g_2(x)).$$

证　设 $(f_1(x),f_2(x))=d_1(x)$，$(g_1(x),g_2(x))=d_2(x)$. 则由 $d_1(x)\mid f_i(x)$，$d_2(x)\mid g_i(x)$ 得 $d_1(x)d_2(x)\mid f_i(x)g_i(x)$，$i=1,2$，即 $d_1(x)d_2(x)$ 是 $f_1(x)g_1(x)$，$f_2(x)g_2(x)$ 的一个公因式.

由 $d_1(x)$，$d_2(x)$ 定义有

$$u_1(x)f_1(x)+v_1(x)f_2(x)=d_1(x) \tag{1}$$

$$u_2(x)g_1(x)+v_2(x)g_2(x)=d_2(x) \tag{2}$$

据题设知 $(f_1(x)f_2(x),g_1(x)g_2(x))=1$，即

$$u_3(x)f_1(x)f_2(x)+v_3(x)g_1(x)g_2(x)=1. \tag{3}$$

由(1)、(2)、(3)式可知：$d_1(x)d_2(x)$是多项式$f_1(x)g_1(x)$与$f_2(x)g_2(x)$的一个组合，故$d_1(x)d_2(x)$是$f_1(x)g_1(x)$，$f_2(x)g_2(x)$的最大公因式．再注意到$d_1(x)d_2(x)$的首项系数为1，即得欲证之等式．

556. 什么叫公倍式？什么叫最小公倍式？

答 1）如果$f_i(x)|h(x), i=1,2,\cdots,s, s\geqslant 2$，那么称$h(x)$是$f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x)$的一个公倍式．

2）若$m(x)$满足以下条件：

$1°$ $m(x)$是$f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x)$的一个公倍式；

$2°$ $m(x)$是$f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x)$的任一公倍式的因式，那么称$m(x)$是$f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x)$的一个最小公倍式．

注 ①最小公倍式不是唯一的，因为$m(x)$是最小公倍式，则$cm(x)$也是($c\neq 0$)．

② 常用记号$[f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x)]$表示这$s$个多项式的首项系数为1的那个最小公倍式．

557. 1）设$f(x)=g(x)=0$，则$f(x)$，$g(x)$的最小公倍式为0．

2）当$f(x),g(x)$不全为零时，$f(x),g(x)$的最小公倍式为$\dfrac{cf(x)g(x)}{(f(x),g(x))}$，其中$c$为常数．

证 1）由定义可证．

2）当$f(x),g(x)$不全为零时，$d(x)=(f(x),g(x))\neq 0$．设$f(x)=d(x)f_1(x), g(x)=d(x)g_1(x)$，则$(f_1(x),g_1(x))=1$．

令$m(x)=\dfrac{f(x)g(x)}{d(x)}$，则$m(x)=f_1(x)g(x)=f(x)g_1(x)$．所以$f(x)|m(x), g(x)|m(x)$．如果$h(x)$是$f(x),g(x)$的任一公倍式，那么$h(x)=f(x)f_2(x)=g(x)g_2(x)$，从而$d(x)f_1(x)f_2(x)=d(x)g_1(x)g_2(x)$，而$d(x)\neq 0$，故$f_1(x)f_2(x)=g_1(x)g_2(x)$，所

以 $f_1(x)|g_1(x)g_2(x)$. 但$(f_1(x),g_1(x))=1$,因此 $f_1(x)|g_2(x)$. 于是, $f_1(x)g(x)|g_2(x)g(x)$, 即 $m(x)|h(x)$. 所以 $m(x)$是$f(x),g(x)$的一个最小公倍式.

558. 设多项式 $f(x)=x^2+3x+2,g(x)=x^2+x-2$,求$[f(x),g(x)]$.

解 1 由辗转相除法求得 $f(x),g(x)$的一个最大公因式是$2x+4$,所以$(f(x),g(x))=x+2$. 故

$$[f(x),g(x)]=\frac{f(x)g(x)}{(f(x),g(x))}=(x+2)(x+1)(x-1).$$

解 2 因为 $f(x)=(x+2)(x+1),g(x)=(x+2)(x-1)$,所以$[f(x),g(x)]=(x+2)(x+1)(x-1)$.

注 设 $f_1(x),\cdots,f_n(x)$不全为零,且

$$f_i(x)=A_ip_1^{\alpha_{i1}}(x)p_2^{\alpha_{i2}}(x)\cdots p_t^{\alpha_{it}}(x),i=1,2,\cdots,n,$$

其中 $p_j(x)$为不可约多项式,α_{ij}为非负整数,A_i 为常数. 令 $\beta_j=\max\{\alpha_{1j},\alpha_{2j},\cdots,\alpha_{nj}\}$,则

$$[f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)]=p_1^{\beta_1}(x)p_2^{\beta_2}(x)\cdots p_n^{\beta_n}(x).$$

559. 证明:$[f^n(x),g^n(x)]=[f(x),g(x)]^n$.

证
$$[f^n(x),g^n(x)]=\frac{f^n(x)g^n(x)}{(f^n(x),g^n(x))}=\frac{f^n(x)g^n(x)}{(f(x),g(x))^n}$$
$$=\left[\frac{f(x)g(x)}{(f(x),g(x))}\right]^n=[f(x),g(x)]^n.$$

五、 不可约多项式与因式分解

560. 什么叫做数域 P 上的不可约多项式?什么叫做可约多项式?

答 数域 P 上次数$\geqslant1$ 的多项式 $f(x)$称为数域 P 上的不可约多项式,如果它不能表成数域 P 上的两个次数比 $f(x)$低的多项式的乘积. 否则,就称为可约多项式.

561. 一个多项式是否可约依赖于系数域吗?

答　x^2+1 是实数域上的不可约多项式，但不是复数域上的不可约多项式．此即表明：一个多项式是否可约依赖于系数域．

562.　不可约多项式 $p(x)$ 与任一多项式 $f(x)$ 之间只能有两种关系：或者 $p(x)|f(x)$，或者 $(p(x),f(x))=1$.

563.　如果 $p(x)$ 是不可约多项式，那么对于任意的两个多项式 $f(x),g(x)$，由 $p(x)|f(x)g(x)$ 一定能推出 $p(x)|f(x)$ 或者 $p(x)|g(x)$.

564.　如果不可约多项式 $p(x)$ 整除 $f_1(x)f_2(x)\cdots,f_s(x)$，其中 $s\geqslant 2$，那么 $p(x)$ 至少可以整除这些多项式中的一个．

565. 因式分解唯一性定理　数域 P 上每一个次数 $\geqslant 1$ 的多项式 $f(x)$ 都可唯一地分解成数域 P 上一些不可约多项式的乘积．

566.　什么叫做多项式的标准分解式？

答　数域 P 上的次数 $\geqslant 1$ 的多项式 $f(x)$ 的分解式：

$$f(x)=ap_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(x)$$

叫做 $f(x)$ 在数域 P 上的标准分解式，其中 a 是 $f(x)$ 的首项系数，$p_i(x)$ 为首项系数是 1 的不可约多项式，而 $r_1,r_2,\cdots,r_s$ 都是正整数.

567.　什么叫做多项式 $f(x)$ 的 k 重因式？

答　如果不可约多项式 $p(x)$ 满足下列条件：

$$p^k(x)|f(x)，但\ p^{k+1}(x)\nmid f(x).$$

那么称 $p(x)$ 为 $f(x)$ 的 k 重因式．

568.　什么叫做多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 的微商和高阶微商？

答　$f'(x)=a_nnx^{n-1}+a_{n-1}(n-1)x^{n-2}+\cdots+a_1$ 称为多项式 $f(x)$ 的微商或 1 阶微商；$f'(x)$ 的微商 $f''(x)$ 称为 $f(x)$ 的 2 阶微商；$f''(x)$ 的微商 $f^{(3)}(x)$ 称为 $f(x)$ 的 3 阶微商；等等，$f(x)$ 的 k 阶微商记作 $f^{(k)}(x)$.

注　一个 n 次多项式的微商是一个 $n-1$ 次多项式；它的 n 阶微商是一个常数；它的 $n+1$ 阶微商等于零．

569.　关于多项式的微商有下列基本公式：

$$(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x);$$

$$(cf(x))'=cf'(x);$$

$$(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x);$$

$$(f^m(x))'=mf^{m-1}(x)f'(x).$$

570.　如果不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式 $(k\geqslant 1)$，则它是微商 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重因式．

571.　如果不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式 $(k\geqslant 1)$，那么 $p(x)$ 是 $f(x),f'(x),\cdots,f^{(k-1)}(x)$ 的因式，但不是 $f^{(k)}(x)$ 的因式．

572.　不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的重因式的充要条件是 $p(x)$ 是 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的公因式，即 $p(x)\mid(f(x),f'(x))$.

注　由此可见 $f(x)$ 的重因式，可以在 $(f(x),f'(x))$ 的因式中去找．

573.　多项式 $f(x)$ 没有重因式的充要条件是 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 互素．

574.　如果 $f(x)$ 是一个次数大于或等于 1 的多项式，那么多项式 $\dfrac{f(x)}{(f(x),f'(x))}$ 是一个没有重因式的多项式，但它与 $f(x)$ 有完全相同的不可约因式．

575.　如果 $h_1(x)=f(x)+g(x),h_2(x)=f(x)g(x)$，那么

$$h_1(a)=f(a)+g(a),h_2(a)=f(a)g(a).$$

576.　用一次多项式 $x-a$ 去除多项式 $f(x)$，所得的余式是常数 $f(a)$.

577.　**代数基本定理**　每个次数 $\geqslant 1$ 的复系数多项式在复数域中有一根．

这个定理还可以等价地叙述为：

每个次数≥1 的复系数多项式，在复数域上一定有一个一次因式．

578.　每个次数≥1 的复系数多项式 $f(x)$在复数域上都可以唯一地分解为一次因式的乘积．

579.　如果 α 是实系数多项式 $f(x)$的一个复根，那么 $\bar{\alpha}$ 也是 $f(x)$的一个根．

注　① 实系数多项式的复根成对出现．

② 奇次实系数多项式至少有一个实根．

580.　每个次数≥1 的实系数多项式在实数域上可以唯一地分解成一次因式与二次不可约因式的乘积．

581.　什么叫做本原多项式？

答　如果一个非零的整系数多项式

$$g(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0$$

的系数 $b_n,b_{n-1},\cdots,b_1,b_0$ 是互素的，那么称 $g(x)$是一个本原多项式．

582.　两个本原多项式的乘积还是一个本原多项式．

583.　如果一个非零的整系数多项式能够分解成两个次数较低的有理系数多项式的乘积，那么它一定能分解成两个次数较低的整系数多项式的乘积．

584.　设 $f(x)$，$g(x)$是整系数多项式，且 $g(x)$是本原的，如果 $f(x)=g(x)h(x)$，其中 $h(x)$是有理系数多项式，那么，$h(x)$一定是整系数多项式．

证　依题意可设 $f(x)=af_1(x)$，$h(x)=bh_1(x)$，其中 $f_1(x)$，$h_1(x)$都是本原多项式，a 是整数，b 是有理数．因为 $g(x)$是本原多项式，故据第 **582** 条 $g(x)h_1(x)$也是本原多项式，又

$$af_1(x)=bg(x)h_1(x),$$

因此，$b=\mp a$，所以 b 是整数，$h(x)=bh_1(x)$是整系数多项式．

585.　**艾森斯坦因(Eisenstein))判别法**　设

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

是一个整系数多项式，如果有素数 p 使得

1) $p\nmid a_n$，

2) $p\mid a_{n-1},a_{n-2},\cdots,a_1,a_0$，

3) $p^2\nmid a_0$.

那么，$f(x)$在有理数域上是不可约的．

586.　在实数域上，复数域上不可约多项式的次数是多少？在有理数域上呢？

答　在有理数域上，存在任意次数的不可约多项式．比如 x^n+2 在有理数域上不可约．在实数域上，一次多项式和判别式小于零的二次多项式是不可约的．在复数域上，只有一次多项式是不可约的．

587.　在有理数域上分解多项式 x^3-2x^2-2x+1 为不可约因式的乘积．

解　三次整系数多项式如果可约，则它必有有理根，显然 -1 为它的有理根，于是

$$x^3-2x^2-2x+1=(x+1)(x^2-3x+1).\qquad(1)$$

但 x^2-3x+1 无有理根，则(1)式为在有理数域上的标准分解式．

588.　分别在复数域、实数域和有理数域上分解 x^4+1 为不可约因式之积．

解　在实数域上典型分解式为：

$$x^4+1=(x^2+1)^2-2x^2=(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1);$$

在复数域上典型分解式为：

$$x^4+1=\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$
$$\cdot\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right);$$

在有理数域上 x^4+1 是不可约多项式. 否则,若 x^4+1 可约,有两种可能:

1) x^4+1 有一次因式,从而它有有理根,但这是不可能的. 因为 x^4+1 无有理根.

2) x^4+1 无一次因式,但

$x^4+1=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$,其中 a,b,c,d 为整数,于是,$a+c=0,b+d+ac=0,ad+bc=0,bd=1$. 由 $bd=1$,分两种情况:

1° $b=d=1$,又 $a=-c$,从而由 $b+d+ac=0$,得 $a^2=2$,矛盾.

2° $b=d=-1$,则 $a^2=-2$,矛盾.

即得证.

589. 设 $p(x)$是 $P[x]$中的一个次数大于零的多项式,如果 $\forall f(x),g(x)\in P[x]$,只要 $p(x)\mid f(x)g(x)$,就有 $p(x)\mid f(x)$或 $p(x)\mid g(x)$,那么 $p(x)$是不可约多项式.

证 用反证法. 如果 $p(x)$在数域 P 上可约,那么在 $P[x]$中,有

$$p(x)=p_1(x)p_2(x),\text{其中 } 0<\partial(p_i(x))<\partial(p(x)),i=1,2.$$

显然 $p(x)\mid p_1(x)p_2(x)$,但 $p(x)\nmid p_1(x)$且 $p(x)\mid p_2(x)$,与题设矛盾. 因此 $p(x)$在数域 P 上不可约.

590. 证明:数域 P 上一个次数大于零的多项式 $f(x)$是 $P[x]$中的某一不可约多项式的幂$\Longleftrightarrow$对于任意 $g(x)\in p(x)$,或者$(f(x),g(x))=1$,或者 $f(x)\mid g^m(x)$,其中 m 为自然数.

证 充分性 设 $f(x)$不是 $P[x]$中某一不可约多项式的幂,则 $f(x)$在 $P[x]$中的典型分解式为

$$f(x)=a_np_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(x),$$

其中必 $s>1$. 于是取 $g(x)=p_1(x)$,则$(f(x),g(x))=p_1(x)\neq1$,且 $f(x)\nmid g^m(x)$(不论 m 为何正整数),与题设矛盾.

必要性 设 $f(x)=p^m(x)$,$p(x)$是 $P[x]$的不可约多项式,则

$p(x)$对$\forall\ g(x)\in P[x]$，有$(p(x),g(x))=1$或$p(x)\mid g(x)$，从而$p^m(x)\mid g^m(x)$，即$f(x)\mid g^m(x)$.

591. 设$p(x)$是$f'(x)$的$k-1$重因式，能否说$p(x)$是$f(x)$的k重因式？

答 不能．比如$f(x)=x^3+1$，$f'(x)=3x^2$，则x是$f'(x)$的二重因式，但x不是$f(x)$的因式．

592. 判别$f(x)=x^4+4x^2-4x-3$有无重因式？

答 因为$(f(x),f'(x))=1$，故$f(x)$无重因式．

593. 如果a是$f^{(3)}(x)$的一个k重根，证明a是

$$g(x)=\frac{x-a}{2}[f'(x)+f'(a)]-f(x)+f(a)$$

的一个$k+3$重根．

证 因为$g''(x)=\frac{x-a}{2}f^{(3)}(x)$，由假设知$a$是$g''(x)$的$k+1$重根．

又$g(a)=0$，并设a为$g(x)$的s重根，则a是$g''(x)$的$s-2$重根，故$s-2=k+1$，$s=k+3$.

594. 证明：有理系数多项式

$$f(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$$

没有重因式．

证1 $f'(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$，从而

$$\begin{aligned}(f(x),f'(x))&=(f(x)-f'(x),f'(x))\\&=(\frac{x^n}{n},1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!})=1.\end{aligned}$$

故$f(x)$没有重因式．

证2 用反证法．设$f(x)$有重因式$p(x)$，那么$p(x)\mid f'(x)$，$p(x)$在复数域上至少有一根a，它也是$f(x)$和$f'(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=f(x)-\frac{x^n}{n!}$的根，即$f(a)=0$，$f(a)-\frac{a^n}{n!}=0$，因此

$a=0$. 但$f(0)=1\neq 0$,矛盾. 因此,$f(x)$没有重因式.

595. a,b应该满足什么条件,$f(x)=x^3+3ax+b$有重因式?

解 $f'(x)=3x^2+3a$. 对$f(x)$与$f'(x)$作辗转相除法后可知:当$2ax+b=0$,即$a=b=0$时,$f(x)$与$f'(x)$有二次的最大公因式;当$a\neq 0$且$3a+\frac{3b^2}{4a^2}=0$时,$f(x)$与$f'(x)$有一次最大公因式. 因此,综上可知,当$4a^3+b^2=0$时,$f(x)$与$f'(x)$不互素,$f(x)$有重因式.

596. 当a,b满足什么条件时,多项式

$$f(x)=x^4+4ax+b$$

有重因式?

解 仿第**595**条可知:当$27a^4-b^3=0$时,$f(x)$与$f'(x)$不互素,$f(x)$有重因式. 因此,当$27a^4-b^3\neq 0$时,$(f(x),f'(x))=1$,$f(x)$无重因式.

597. 证明:数域P上的一个n次多项式$f(x)$能被它的导数整除$\Longleftrightarrow f(x)=a(x-b)^n$. 这里$a,b$是$P$中的数.

证 充分性 因为$f(x)=a(x-b)^n$,所以

$f(x)=\frac{1}{n}(x-b)\cdot f'(x)$,从而$f'(x)\mid f(x)$.

必要性 由$f'(x)\mid f(x)$及$\partial(f(x))=\partial(f'(x))+1$得$f(x)=a_1(x-b)f'(x)$. 这里$a_1,b\in P$. 于是有$(f(x),f'(x))=a_2f'(x)$,其中$a_2$是$f'(x)$的首项系数的倒数. 因此,

$$\frac{f(x)}{(f(x),f'(x))}=\frac{a_1}{a_2}(x-b).$$

再由第**574**条可得 $f(x)=a(x-b)^n$. 此处$a\in P$且a是$f(x)$的首项系数.

598. 设c为复数,并且是$Q[x]$中的一个非零多项式的根. 令

$$J=\{f(x)\in Q[x]\mid f(c)=0\},$$

1) 证明：在 J 中存在唯一的最高次项的系数是 1 的多项式 $p(x)$，使得 J 中的每一多项式 $f(x)$，都可写成 $p(x)q(x)$ 的形式，其中 $q(x)\in Q[x]$；

2) 证明：上述 $p(x)$ 在 $Q[x]$ 中不可约；

3) 如果 $c=\sqrt{2}+\sqrt{3}$，求上述的 $p(x)$.

证　1) 由题设知 J 不是空集．又多项式的次数是非负整数，故知在 J 中必存在一个次数最低的首项系数为 1 的多项式 $p(x)$，使 $p(c)=0$.

任取 $f(x)\in J$，则在 $Q[x]$ 中，$f(x)=p(x)q(x)+r(x)$，其中 $r(x)=0$ 或 $\partial(r(x))<\partial(p(x))$. 因 $r(c)=f(c)-p(c)q(c)=0$，所以，由 $p(x)$ 的定义必有 $r(x)=0$. 因此 $f(x)=p(x)q(x)$.

再证 $p(x)$ 的唯一性．上面已证在 $Q[x]$ 中 $p(x)\mid f(x)$，若有另一个 $p_1(x)$ 也满足上述条件，则 $p(x)\mid p_1(x)$，$p_1(x)\mid p(x)$，故 $p(x)=cp_1(x)$. 由它们首项系数为 1，故 $c=1$，此即 $p(x)=p_1(x)$.

2) 若 $p(x)$ 可约，不妨设 $p(x)=g_1(x)g_2(x)$，其中
$0<\partial(g_1(x))<\partial(p(x))$，$0<\partial(g_2(x))<\partial(p(x))$，但
$0=p(c)=g_1(c)g_2(c)$，故 $g_1(c)=0$ 或 $g_2(c)=0$. 但是这与 $p(x)$ 的定义矛盾，故 $p(x)$ 不可约．

3) 当 $c=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 时，

$$p(x)=(x-\sqrt{2}-\sqrt{3})(x+\sqrt{2}+\sqrt{3})(x-\sqrt{2}+\sqrt{3})(x+\sqrt{2}-\sqrt{3})=x^4-10x^2+1$$

即为所求.

599.　证明：如果 $(f'(x),f''(x))=1$，那么 $f(x)$ 的重因式是二重因式．

证　设不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的任意一个重因式，其重数为 s，则 $p(x)$ 是 $f'(x)$ 的 $s-1$ 重因式．因为 $(f'(x),f''(x))=1$，所以 $s-1=1$，即 $s=2$.

600.　给出实系数四次多项式在实数域上所有不同类型的典

型分解式．

解 设 $f(x)$ 是首项系数为 a_4 的实系数四次多项式，则 $f(x)$ 在实数域上有下列不同类型的典型分解式：

$$f(x)=a_4(x^2+p_1x+q_1)(x^2+p_2x+q_2);$$

$$f(x)=a_4(x^2+px+q)^2;$$

$$f(x)=a_4(x-a)(x-b)(x^2+px+q);$$

$$f(x)=a_4(x-a)(x-b)(x-c)(x-d);$$

$$f(x)=a_4(x-a)^2(x-b)(x-c);$$

$$f(x)=a_4(x-a)^2(x-b)^2;$$

$$f(x)=a_4(x-a)^3(x-b);$$

$$f(x)=a_4(x-a)^4.$$

601. 设 $f(x),g(x)$ 为两个非零多项式，证明：存在自然数 N，使得对任意的 $n_1,n_2>N$，有

$$(f^{n_1}(x),g(x))=(f^{n_2}(x),g(x)).$$

证 若 $(f(x),g(x))=1$，则结论显然成立．设 $(f(x),g(x))=d(x)\neq 1$，而

$$d(x)=p_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)\cdots p_r^{k_r}(x)$$

为 $d(x)$ 的典型分解式．另设

$$g(x)=p_1^{s_1}(x)p_2^{s_2}(x)\cdots p_r^{s_r}(x)g_1(x),$$

其中 $p_i(x)\nmid g_1(x)$，$s_i\geqslant k_i$，$i=1,2,\cdots,r$.

于是取 $N=\max(s_1,s_2,\cdots,s_r)$，当 $n_1,n_2>N$ 时，

$$(f^{n_1}(x),g(x))=(f^{n_2}(x),g(x))=p_1^{s_1}(x)\cdots p_r^{s_r}(x).$$

602. 在 $P[x]$ 中，$f(x),g(x)$ 不互素 $\Longleftrightarrow$ 存在不可约多项式 $p(x)$ 使 $p(x)\mid(f(x)+g(x))$ 且 $p(x)\mid f(x)g(x)$.

证 必要性 设 $d(x)=(f(x),g(x))$，则 $\partial(d(x))>0$，因而有 $d(x)$ 的不可约因式 $p(x)$，使 $p(x)\mid f(x)$，$p(x)\mid g(x)$，从而可证得 $p(x)\mid(f(x)+g(x))$ 且 $p(x)\mid f(x)g(x)$.

充分性 设有不可约多项式 $p(x)\mid f(x)g(x)$，则 $p(x)\mid f(x)$

或 $p(x)|g(x)$. 不妨设 $p(x)|g(x)$,由于 $p(x)|(f(x)+g(x))$则 $p(x)|f(x)$,于是 $f(x)$,$g(x)$有一不可约因式 $p(x)$,故 $f(x)$,$g(x)$不互素.

603. 设 $f(x)$是数域 P 上的多项式,$a\in P$,令 $x=y+a$,得 $g(y)=f(y+a)$,则 $f(x)$在 P 上可约$\Longleftrightarrow g(y)$在 P 上可约.

证 必要性　设在 $P[x]$中,$f(x)=f_1(x)f_2(x)$,此处 $\partial(f_i(x))<\partial(f(x))$,$i=1,2$. 于是 $g(y)=f(y+a)=f_1(y+a)f_2(y+a)$,显然 $f_i(y+a)\in P[y]$且 $\partial(f_i(y+a))=\partial(f_i(x))<\partial(f(x)=\partial(g(y))$,$i=1,2$. 所以,$g(y)$在 P 上可约.

充分性　设在 $P[y]$中,$g(y)=g_1(y)g_2(y)$,此处 $\partial(g_i(y))<\partial(g(y))$,$i=1,2$. 于是

$f(x)=f((x-a)+a)=g(x-a)=g_1(x-a)g_2(x-a)$. 显然 $g_i(x-a)\in P[x]$且 $\partial(g_i(x-a))=\partial(g_i(y))<\partial(g(y))=\partial(f(x))$, $i=1,2$. 因此,$f(x)$在 P 上可约.

604. 多项式 x^6+x^3+1 在有理数域上是否可约?

解 记 $f(x)=x^6+x^3+1$. 令 $x=y+1$,得

$$g(y)=f(y+1)=y^6+6y^5+15y^4+21y^3+18y^2+9y+2.$$

取 $p=3$,由艾森斯坦因判别法可知 $g(y)$在有理数域上不可约,故 $f(x)$在有理数域上不可约.

605. x^p+px+1(p 为奇素数)在有理数域上是否可约?

解 记 $f(x)=x^p+px+1$,令 $x=y-1$,得

$$g(y)=f(y-1)$$
$$=y^p-C_p^1y^{p-1}+C_p^2y^{p-2}-\cdots-C_p^{p-2}y^2+(C_p^{p-1}+p)y-p.$$

取素数 p,则据艾森斯坦因判别法可知 $g(y)$在有理数域上不可约故 $f(x)$在有理数域上不可约.

606. $x^4+4kx+1$(k 为整数)在有理数域上是否可约?

解 记 $f(x)=x^4+4kx+1$. 令 $x=y+1$,得

$$g(y)=f(y+1)=y^4+4y^3+6y^2+4(k+1)x+2(2k+1).$$

取 $p=2$，由艾森斯坦因判别法知 $g(y)$ 在有理数域上不可约，因此 $f(x)$ 在有理数域上不可约．

607.　证明：若是 $p_1,p_2,\cdots,p_t$ 是 t 个不相同的素数，而 n 是一个大于 1 的整数，那么 $\sqrt[n]{p_1p_2\cdots p_t}$ 是一个无理数．

证　由题设可知 $\sqrt[n]{p_1p_2\cdots p_t}$ 是 n 次多项式

$f(x)=x^n-p_1p_2\cdots p_t$ 的一个实根．因为 $p_1,p_2,\cdots,p_t$ 是 t 个不相同的素数，取 $p=p_1$，有 $p\nmid 1$，$p\mid p_1p_2\cdots p_t$，但 $p^2\nmid p_1p_2\cdots p_t$，因此，根据艾森斯坦因判别法知 $f(x)$ 在有理数域上不可约，从而 $f(x)$ 无有理根，于是 $\sqrt[n]{p_1p_2\cdots p_t}$ 是一个无理数．

608.　设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是互不相同的整数，证明：

$$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)-1$$

不能分解成两个次数大于零的整系数多项式之积．

证　用反证法．设 $f(x)=f_1(x)f_2(x)$，其中 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 都是次数大于零而小于 n 的整系数多项式，则 $f_1(x)+f_2(x)=0$ 或 $\partial(f_1(x)+f_2(x))<n$．因为 $f_1(a_i)f_2(a_i)=f(a_i)=-1$，$f_1(a_i)$，$f_2(a_i)$ 均为整数，所以

$$f_1(a_i)+f_2(a_i)=0,i=1,2,\cdots,n,$$

故 $f_1(x)+f_2(x)=0$，于是 $f(x)=-f_1^2(x)$，这与 $f(x)$ 的首项系数为 1 相矛盾．

609.　数域 P 上两个多项式 $f(x)$，$g(x)$ 有公共根，且 $f(x)$ 在 P 上不可约，证明：$f(x)\mid g(x)$．

证　由于 $(f(x),g(x))\neq 1$，而 $f(x)$ 不可约，因此，$(f(x),g(x))=f(x)$，故 $f(x)\mid g(x)$．

610.　设 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 是整系数多项式，证明：若 $ac+bc$ 为奇数，则 $f(x)$ 在有理数域上不可约．

证　用反证法．如果 $f(x)$ 在有理数域上可约，那么 $f(x)$ 在

整数环上可约. 又 $\partial(f(x))=3$,故 $f(x)$ 必有一个一次因式,从而可设

$$x^3+ax^2+bx+c=(x+p)(x^2+qx+r),$$

这里 $p,q,r\in Z$. 于是 $c=pr$.

因为 $ac+bc=(a+b)c$ 为奇数,所以 $a+b$ 与 c 都是奇数,进而 p 与 r 都是奇数,于是 $f(1)=1+(a+b)+c$ 也是奇数. 但是,$f(1)=(1+p)(1+q+r)$ 是偶数,矛盾.

611. 设 $f(x)$ 是一个整系数多项式,试证:如果 $f(0)$ 与 $f(1)$ 都是奇数,那么 $f(x)$ 不能有整数根.

证 用反证法. 设 m 为 $f(x)$ 的整数根,则存在整系数多项式 $q(x)$,使 $f(x)=(x-m)q(x)$,将 $x=0,x=1$ 分别代入此式,得

$$f(0)=-mq(0),f(1)=(1-m)q(1). \tag{1}$$

由于 $-m,1-m$ 总有一为偶数,这与 $f(0)$ 与 $f(1)$ 同为奇数矛盾.

注 ① 假如改成任意两个相邻整数,使得 $f(n)$ 和 $f(n+1)$ 都是奇数,结论仍成立.

② 若存在一个偶数 a,一个奇数 b,使得 $f(a),f(b)$ 都是奇数,结论也成立.

612. 设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是整系数多项式,求证:如果 $a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0$ 是奇数,则 $f(x)$ 不能被 $x-1$ 和 $x+1$ 整除.

证 因为 $f(1)=a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0$ 为奇数,故 $f(1)\neq0$,所以 $f(x)$ 不能被 $x-1$ 整除.

再设 $f(x)=(x+1)q(x)+r$,则 $f(1)=2q(1)+r$,由此可知 r 是奇数,故 $f(-1)\neq0$,于是 $f(x)$ 不能被 $x+1$ 整除.

613. 设 $f(x)$ 是一整系数多项式,试证:如果 $f(-1),f(0)$,$f(1)$ 都不能被 3 整除,那么 $f(x)$ 无整数根.

证 用反证法. 若 a 是 $f(x)$ 的整数根,则

$$f(x)=(x-a)q(x),$$

$q(x)$为整系数多项式，所以

$$f(0)=-aq(0),f(1)=-(a-1)q(1),$$
$$f(-1)=-(a+1)q(-1).$$

由 $a+1,a,a-1$ 中至少有一个能被 3 整除，由此可知 $f(0),f(1),f(-1)$中也至少有一个能被 3 整除，矛盾．

注　如果 $f(a),f(a+1),\cdots,f(a+b-1)$都不能被 b 整除，那么 $f(x)$没有整数根．

614.　设 $f(x)\in P[x]$，则 $f(x)=c$(常数)$\Longleftrightarrow f(x)=f(x+a),\forall\ a\in P$.

证　必要性　显然．

充分性　设 $g(x)=f(x)-f(0)$，则因$\forall\ a\in P$，有 $f(x)=f(x+a)$，所以 $f(0)=f(a)$，故 $g(a)=0$. 由 a 的任意性知 $g(x)=0$，即 $f(x)=f(0)$为常数．

第八章　多项式的根

一、　多项式的根

615.　什么是多项式 $f(x)$ 的根？

答　设 $f(x)\in P[x]$，$a\in P$. 若 $f(\alpha)=0$，则 α 称为 $f(x)$ 在 P 中的根或零点.

注　多项式 $f(x)$ 在 P 中的根，与方程 $f(x)=0$，在 P 中的根相同.

616.　α 是 $f(x)$ 的根的充要条件是 $(x-\alpha)\mid f(x)$.

注　$f(x)$ 除以 $ax-b(a\neq 0)$ 的余式为 $f\left(\frac{b}{a}\right)$

617.　α 是 $f(x)$ 的 k 重根 $\Longleftrightarrow x-\alpha$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式.

618.　数域 P 上 $n(>0)$ 次多项式在 P 内至多有 n 个根.

619.　求证 $\sin x$ 不是多项式.

证　显然 $\sin x$ 不是零多项式. 若 $\sin x$ 是非零 n 次多项式，则它最多有 n 个根，但 $\sin x$ 有无穷多个根，矛盾. 所以 $\sin x$ 也不是非零多项式.

620.　设 $f(x)$，$g(x)$ 的次数都不超过 n，而它们对 $n+1$ 个不同的数 $a_1,a_2,\cdots,a_n,a_{n+1}$ 有相同的值，即 $f(a_i)=g(a_i)$，$i=1,2,\cdots,n+1$. 则 $f(x)=g(x)$.

621.　设 $f(x)\in P[x]$，令 $g(x)=f(x-a)$，则

$$f(\beta)=0\Longleftrightarrow g(\beta+a)=0.$$

证　必要性　$g(\beta+a)=f((\beta+a)-a)=f(\beta)=0$.

充分性　$g(\beta+a)=0$ 但 $g(\beta+a)=f(\beta)$，$\therefore f(\beta)=0$.

注　相当于根的平移变换.

622. 设多项式 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$ 的 n 个根为 $\beta_1,\cdots,\beta_n$，其中 $a_na_0\neq0$，则 $g(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 的 n 个根为 $\frac{1}{\beta_1},\cdots,\frac{1}{\beta_n}$.

证 $g\left(\frac{1}{\beta_i}\right)=a_0\left(\frac{1}{\beta_i}\right)^n+\cdots+a_{n-1}\left(\frac{1}{\beta_i}\right)+a_n$，两边同乘以 β_i^n，得

$$\beta_i^ng\left(\frac{1}{\beta_i}\right)=a_n\beta_i^n+\cdots+a_1\beta_i+a_0=0, \tag{1}$$

但 $\beta_1\cdots\beta_n=(-1)^n\frac{a_0}{a_n}\neq0$，由(1)知 $g\left(\frac{1}{\beta_i}\right)=0$. 由 i 的任意性即得欲证的结论.

注 相当于令 $x=\frac{1}{y}$ 代入 $f(x)$，得 $g(y)=a_0y^n+a_1y^{n-1}+\cdots+a_{n-1}y+a_n$，故称为倒根变换.

623. 设多项式 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0(a_n\neq0)$的 n 个根为 $\beta_1,\cdots,\beta_n$，则 $b\beta_1,\cdots,b\beta_n$ 都是 $h(x)=a_nx^n+a_{n-1}bx^{n-1}+\cdots+a_1b^{n-1}x+a_0b^n$ 的根.

证 $h(b\beta_i)=a_n(b\beta)^n+a_{n-1}b(b\beta_i)^{n-1}+\cdots+a_0b^n$

$$=b^nf(\beta_i)=0.$$

注 相当于令 $x=by$ 代入 $f(x)$，得到 $h(y)$. 故称倍根变换.

624. 求 t 的值，使 $f(x)=x^3-3x^2+tx-1$ 有重根.

解 1 $f'(x)=3x^2-6x+t$. 对 $f(x)$，$f'(x)$作辗转相除法.

1) 当$(f(x),f'(x))=f'(x)$时，那么用 $f'(x)$除 $f(x)$的余式为$(6-2t)x+(3-t)=0$，则 $t=3$. 此时，

$$f(x)=x^3-3x^2+3x-1=(x-1)^3.$$

2) 当 $t\neq3$ 时，$(f(x),f'(x))=x+\frac{1}{2}$，即 $t=-\frac{15}{4}$. 此时

$f(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2(x-4)$.

解 2 利用结式.

$$R(f,f')=\begin{vmatrix}1 & -3 & t & -1 & 0\\0 & 1 & -3 & t & -1\\3 & 6 & -t & 0 & 0\\0 & 3 & 6 & -t & 0\\0 & 0 & 3 & 6 & -t\end{vmatrix}=(t-3)^2(4t+15),$$

当 $R(f,f')=0$ 时，$f(x)$有根．即当 $t=3$ 时，$f(x)$有三重根；当 $t=-\frac{15}{4}$时，$f(x)$有二重根．

625. 设 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$ 为复系数多项式，令 $\overline{f}(x)=\bar{a}_nx^n+\cdots+\bar{a}_1x+\bar{a}_0$，其中 $\bar{a}_k$ 为 a_k 的共轭复数．

1）若$(f(x),\overline{f}(x))=1$，证明：$f(x)$无实根；

2）$f(x)$无实根，能否证明$(f(x),\overline{f}(x))=1$呢？

证　1）用反证法．设 c 是 $f(x)$的根，即 $f(c)=0$. 可以证明$\overline{f}(c)=0$. 这与$(f(x),\overline{f}(x))=1$ 矛盾．

2）不能．比如，

$$f(x)=(x^2+1)(x+i)，则\ \overline{f}(x)=(x^2+1)(x-i),$$

那么 $f(x)$无实根，但$(f(x),\overline{f}(x))=x^2+1\neq 1$.

626. 证明 $f(x)=x^n-nqx+(n-1)r$ 有重根$\Longleftrightarrow q^n=r^{n-1}$，其中 $n>1$.

证　必要性　设 α 是 $f(x)$的重根，则 $f(\alpha)=f'(\alpha)=0$，而 $f'(x)=n(x^{n-1}-q)$. 由 $f'(\alpha)=0$　得 $q=\alpha^{n-1}$，于是

$$0=f(\alpha)=(n-1)(r-\alpha q)，故\ \alpha=\frac{r}{q}，从而$$

$$q=\alpha^{n-1}=\frac{r^{n-1}}{q^{n-1}},q^n=r^{n-1}.$$

充分性　由 $q^n=r^{n-1}$得 $q=\left(\frac{r}{q}\right)^{n-1}$，故 $f\left(\frac{r}{q}\right)=0$. 又可算得 $f'\left(\frac{r}{q}\right)=0$，故$\frac{r}{q}$为 $f(x)$的重根．

627. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个不同的数，而 $F(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$. 证明：

1) $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{F(x)}{(x-a_i)F'(a_i)}=1$；

2) 任意多项式 $f(x)$，用 $F(x)$ 除，所得的余式为

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{f(a_i)F(x)}{(x-a_i)F'(a_i)}.$$

证 1) 令 $g(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{F(x)}{(x-a_i)F'(a_i)}$，则 $\partial(g(x))\leqslant n-1$. 但

$$g(a_1)=g(a_2)=\cdots=g(a_n)=1,$$

所以 $g(x)=1$.

2) 设 $f(x)$ 是任意的一个多项式，则

$$f(x)=q(x)F(x)+r(x), \tag{1}$$

$r(x)=0$ 或 $\partial(r(x))\leqslant n-1$.

当 $r(x)=0$ 时，结论显然成立.

当 $\partial(r(x))\leqslant n-1$ 时，令

$$k(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{f(a_i)F(x)}{(x-a_i)F'(a_i)} \tag{2}$$

则 $\partial(k(x))\leqslant n-1$. 由(1)、(2)式，得

$$r(a_i)=f(a_i), k(a_i)=f(a_i), i=1,2,\cdots,n.$$

所以 $r(a_i)=k(a_i), i=1,2,\cdots,n$. 故 $r(x)=k(x)$.

628. **拉格朗日插值法** $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 与

$$F(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n),$$

$b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是任意的 n 个数. 显然，次数小于 n 的多项式

$$L(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{b_iF(x)}{(x-a_i)F'(a_i)} \tag{1}$$

适合条件 $L(a_i)=b_i, i=1,2,\cdots,n$.

利用公式(1)求：

1）次数小于 4 的多项式 $f(x)$，它适合条件：

$$f(2)=3, f(3)=-1, f(4)=0, f(5)=2;$$

2）一个二次多项式 $f(x)$，它在 $x=0,\frac{\pi}{2},\pi$ 处与函数 $\sin x$ 有相同的值；

3）一个次数尽可能低的多项式 $f(x)$，使 $f(0)=1, f(1)=2$, $f(2)=5, f(3)=10$.

解　1）设 $F(x)=(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$, $f(2)=3$, $f(3)=-1, f(4)=0, f(5)=2$. 将它们代入(1)(注意(1)中 $L(x)$ 即为 $f(x)$)，得 $f(x)=-\frac{2}{3}x^3+\frac{17}{2}x^2-\frac{203}{6}x+42$.

2）$\sin 0=0=f(0), \sin\frac{\pi}{2}=1=f\left(\frac{\pi}{2}\right), \sin\pi=0=f(\pi)$. 设 $F(x)=x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)(x-\pi)$，代入(1)即得 $f(x)=-\frac{4}{\pi^2}x(x-\pi)$.

3）设 $F(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)$ 可得 $f(x)=x^2+1$. 这也是满足条件的次数最低的多项式.

629.　设 n 次多项式 $f(x)$ 的 n 个根为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$. 令 $g(x)=f(ax+b)$，其中 $a\neq0$，$g(x)$ 的 n 个根为 $y_1,y_2,\cdots,y_n$. 则适当变动次序，有

$$x_k=ay_k+b, k=1,2,\cdots,n.$$

证　$0=g(y_k)=f(ay_k+b)$，从而 $ay_k+b\in\{x_1,\cdots,x_n\}$，可取 $ay_k+b=x_k$.

反之，$0=f(x_j)=f\left[a\left(\frac{x_j-b}{a}\right)+b\right]=g\left(\frac{x_j-b}{a}\right)$，类似地可取 $y_j=\frac{x_j-b}{a}, x_j=ay_j+b$.

630.　设 $x_1,\cdots,x_n$ 是多项式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

的根，α 和 $\beta(\neq0)$ 是任意两数. 证明：

$$\beta^n f(x)=(-1)^n f(\alpha-\beta x)\Longleftrightarrow x_k+\beta x_{n+1-k}=\alpha, k=1,2,\cdots,n.$$

证 必要性 由 $\beta^n f(x)=(-1)^n f(\alpha-\beta x)$ 可知，两多项式 $f(x)$ 与 $f(\alpha-\beta x)$ 有相同的根集，由第 **629** 条知，适当编号有

$$\alpha-\beta x_{n+1-k}=x_k.$$

充分性 由 $\alpha-\beta x_{n+1-k}=x_k, k=1,2,\cdots,n$ 那么 $f(\alpha-\beta x)$ 与 $f(x)$ 有完全相同的根集，故存在常数 c 使 $f(x)=cf(\alpha-\beta x)$. 比较两边首项系数得 $c=(-1)^n\dfrac{1}{\beta^n}$. 故 $\beta^n f(x)=(-1)^n f(\alpha-\beta x)$.

二、单位根

631. 什么叫 n 次单位根？它们等于什么？

答 设多项式 x^n-1 的 n 个根是 $\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$. 其中，每一个都称为 n 次单位根．由复数开方可知

$$\alpha_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}, k=0,1,\cdots,n-1 \tag{1}$$

或

$$\alpha_k=e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k=0,1,\cdots,n-1, \tag{2}$$

其中(1)式称为三角表示法，(2)式称为指数表示法．

注 $\alpha_i\neq\alpha_j(i\neq j)$，即 $\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$ 互不相等，因为，令 $f(x)=x^n-1$，则 $(f(x),f'(x))=1$，即 x^n-1 无重根．

632. n 次单位根的几何意义是什么？在 n 次单位根中有几个实根？

答 由 n 次单位根的三角表达式知，$\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$ 刚好是单位圆上一个内接正 n 边形的顶点，或者说 $\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$ 把单位圆 n 等分．

在 $\alpha_0,\cdots,\alpha_{n-1}$ 中，$\alpha_0=1$ 是一个实根．是否还有另外的实根，由 n 的奇偶性而定．当 n 为奇数时，$\alpha_0,\cdots,\alpha_{n-1}$ 只有一个实根 $\alpha_0=1$，其它均为复数；当 n 为偶数时，$\alpha_0=1$，$\alpha_{\frac{n}{2}}=-1$，其它均为复数．

633. 设 α 是 n 次单位根,那么

1) $\alpha^n=1$;

2) 当 $\alpha\neq1$ 时,则 $1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{n-1}=0$.

证 1) 由定义可知.

2) $0=\alpha^n-1=(\alpha-1)(\alpha^{n-1}+\cdots+\alpha+1)$,由于 $\alpha\neq1$,故 $1+\alpha+\cdots+\alpha^{n-1}=0$.

634. 什么叫 n 次单位原根?

答 设 $\alpha_0,\cdots,\alpha_{n-1}$是全部 n 次单位根,令 $M=\{\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}\}$ 如果存在 $\omega\in M$,有 $M=\{\omega^0,\omega,\cdots,\omega^{n-1}\}$成立,则称 ω 为 n 次单位原根. 换句话说,通过 ω 的乘方,可以得到 x^n-1 的全部根,则称 ω 是 n 次单位原根.

比如,1 是 n 次单位根,但它不是 $n(n>1)$次单位原根,令 $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$,则 ε 是 n 次单位原根. 因为

$$\varepsilon^k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n},k=0,1,\cdots,n-1.$$

由此可知: $M=\{1,\varepsilon,\cdots,\varepsilon^{n-1}\}$.

635. n 次单位原根是否唯一的?

答 设 M 为全部 n 次单位根所成的集合.

当 $n=2$ 时,$M=\{1,-1\}$,这时 n 次单位原根只有一个:-1.

当 $n>2$ 时,n 次单位原根都不是唯一的. 事实上,设 ω 是一个 n 次单位原根,则

$$M=\{1,\omega,\cdots,\omega^{n-1}\}.$$

由此,ω^k 也是 n 次单位原根,其中 k 与 n 互素. 用反证法,若 ω^k 不是 n 次单位原根,则一定存在自然数 $r<n$,有$(\omega^k)^r=1$.

由于 k 与 n 互素,因此存在整数 q,s 有 $1=qn+ks$. 那么 $r=qrn+krs$. 这样

$$\omega^r=\omega^{qrn}\cdot\omega^{krs}=1,$$

这与 ω 是 n 次单位原根的假设矛盾.

注 ① 当 n 为素数时，n 次单位原根的个数是 $n-1$.

② 设 $1,\omega,\cdots,\omega^{n-1}$ 是全部 n 次单位根，则 ω^k 是 n 次单位原根 $\Longleftrightarrow (k,n)=1$.

③ 设 $\varepsilon=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$ 是 n 次单位原根，则

$$x^n-1=(x-1)(x-\varepsilon)\cdots(x-\varepsilon^{n-1})$$

为 x^n-1 在复数域上的典型分解式.

④ x^n-1 在实数域上的典型分解式为

$$x^n-1=\begin{cases}(x-1)\prod\limits_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\left[x^2-\left(2\cos\dfrac{2k}{n}\pi\right)x+1\right], n\text{ 为奇数时；}\\(x+1)(x-1)\prod\limits_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}\left[x^2-\left(2\cos\dfrac{2k}{n}\pi\right)x+1\right], n\text{ 为偶数时.}\end{cases}$$

636. 设 $\varepsilon=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$，令 $\alpha_k=\varepsilon^k$，则 $\alpha_k=\overline{\alpha}_{n-k}$.

证 因为 $\alpha_k=\varepsilon^k=e^{i\frac{2k\pi}{n}}$，$\alpha_{n-k}=e^{i\frac{2(n-k)\pi}{n}}$，

所以 $\overline{\alpha}_{n-k}=e^{i\frac{2(k-n)}{n}\pi}=e^{i\cdot 2\pi}\cdot e^{i\cdot\frac{2(k-n)}{n}\pi}=e^{i\frac{2k\pi}{n}}=\alpha_k$.

637. 求 $f(x)=x^n-A$（A 为复数）的 n 个复根.

解 把复数写成三角形式，即 $A=r(\cos\theta+i\sin\theta)$. 设 x^n-A 的 n 个根为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$，则

$$\begin{aligned}\alpha_k&=\sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right]\\&=\sqrt[n]{r}\,e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}=\sqrt[n]{r}\,e^{i\frac{\theta}{n}}\varepsilon^k, k=0,1,\cdots,n-1.\end{aligned}\quad(1)$$

其中 $$\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$$

注 任何复数 A 开 n 次方都有 n 个复根，其表达式由(1)给出.

638. 在复数域上求下列多项式的典型分解式：

1) x^n-2；

2) x^n+2.

解 1) 因为 $2=2(\cos 0+i\sin 0)$，由 **637** 条(1)式，得

$$\alpha_k=\sqrt[n]{2}\,\varepsilon^k,k=0,1,\cdots,n-1$$

为 x^n-2 的 n 个不同根，故

$$x^n-2=(x-\sqrt[n]{2})(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_{n-1}).$$

2) 由于 $-2=2(\cos\pi+i\sin\pi)$，类似地得

$$\alpha_k=\sqrt[n]{2}\,e^{i\frac{\pi}{n}}\varepsilon^k,k=0,1,\cdots,n-1.$$

故

$$x^n+2=(x+\sqrt[n]{2})(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_{n-1}).$$

639. 设 $\partial(f(x))=m>0$，证明：如果 $f(x)\mid f(x^n)$，那么 $f(x)$ 的根只能是零或单位根.

证 设 α 是多项式 $f(x)$ 的任意一个根，由 $f(x)\mid f(x^n)$ 可知，α 也是 $f(x^n)$ 的根，即 $f(\alpha^n)=0$. 依此类推，可得 $\alpha,\alpha^n,\alpha^{n^2},\cdots$ 都是 $f(x)$ 的根. 由于 $f(x)$ 的次数为 m，因此 $f(x)$ 至多只有 m 个根，从而存在 $k>\lambda$，有

$$\alpha^{n^k}=\alpha^{n^\lambda}\text{或 }\alpha^{n^\lambda}(\alpha^{n^k-n^\lambda}-1)=0.$$

因此，得欲证之结论.

640. 设 a,b 是正整数，p 为不小于 3 的素数，令 $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{p}+i\sin\frac{2\pi}{p}$. 证明：

$$(a+b)(a+\varepsilon b)\cdots(a+\varepsilon^{p-1}b)=a^p+b^p. \tag{1}$$

证 在(1)式中把 a 看成未知量，由 **637** 条，p 次多项式 a^p+b^p 有 p 个根 $-b,-\varepsilon b,\cdots,-\varepsilon^{p-1}b$，
于是

$$a^p+b^p=(a+b)(a+\varepsilon b)\cdots(a+\varepsilon^{p-1}b).$$

641. 证明：若 $\sqrt[3]{a}$ (a 为正有理数)为无理数，且为有理系数多项式 $f(x)$ 的根，则 $\sqrt[3]{a}\,\varepsilon$ 和 $\sqrt[3]{a}\,\varepsilon^2$ 也是 $f(x)$ 的根，其中 $\varepsilon=-\frac{1}{2}$

$+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 为三次单位根.

证 显然多项式 x^3-a 的三个根为 $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[3]{a}\varepsilon$, $\sqrt[3]{a}\varepsilon^2$. 因此,只须证明 x^3-a 整除 $f(x)$ 即可. 设

$$f(x)=(x^3-a)q(x)+r(x), \quad (1)$$

其中 $r(x)=0$ 或 $\partial(r(x))<3$.

若 $\partial(r(x))=1$, 设 $r(x)=bx+c$, 其中 $b,c\in Q$, 且 $b\neq 0$. 由(1)知, $f(\sqrt[3]{a})=r(\sqrt[3]{a})=b(\sqrt[3]{a})+c=0$,
即 $\sqrt[3]{a}=-\frac{c}{b}$, 矛盾.

若 $\partial(r(x))=2$, 设 $r(x)=bx^2+cx+d$, 其中 $b,c,d\in Q$, 且 $b\neq 0$, 则同样由(1)式可得 $r(\sqrt[3]{a})=b(\sqrt[3]{a})^2+c(\sqrt[3]{a})+d=0$, 此是不可能的.

故 $r(x)=0$.

三、有理根

642. 设

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0 \quad (1)$$

是一个整系数多项式,而 $\frac{r}{s}$ 是它的一个有理根,其中 $(r,s)=1$, 那么 $s|a_n$, $r|a_0$. 特别地,如果 $f(x)$ 的首项系数 $a_n=1$, 那么 $f(x)$ 的有理根都是整数根,而且是 a_0 的因子.

643. 求多项式 $f(x)=x^3-6x^2+15x-14$ 的有理根.

解 因为 $f(x)$ 的有理根只可能是 $\pm1,\pm2,\pm7,\pm14$, 分别代入 $f(x)$ 验算知 $f(x)$ 仅有一个有理根 2.

644. 如果既约分数 $\frac{p}{q}$ 是整系数多项式 $f(x)$ 的根,那么整数 $p-mq$ 可以整除 $f(m)$, m 为任一整数.

证 因为$f(x)=\left(x-\frac{p}{q}\right)g(x)=(qx-p)\cdot\frac{g(x)}{q}$，由于$p$与$q$互素，知$qx-p$为本原多项式，又$f(x)$是整系数多项式，所以有理系数多项式$\frac{g(x)}{q}$必为整系数多项式．以任意整数$m$代入得$f(m)=(qm-p)\frac{g(m)}{q}$，因为$\frac{g(m)}{q}$为整数，所以$(qm-p)\mid f(m)$．

645. 若既约分数$\frac{p}{q}$是整系数多项式$f(x)$的根，则

$(q-p)\mid f(1)$，$(q+p)\mid f(-1)$．

证 由**644**条可得．

646. 若a是整系数多项式$f(x)$的整数根，则$(a-1)\mid f(1)$，$(a+1)\mid f(-1)$．

证 由**645**条可得．

647. 设p为素数，求证$\sqrt[n]{p}\,(n>1)$是一个无理数，这里开方指算术根．

证 只须证方程$x^n-p=0$无有理根即可．由于$x^n-p=0$是首项系数为1的整系数方程，故其有理根都是整数，且都是p的因子．因为p为素数，所以因子只有±1，$\pm p$．这四个数显然都不是它的根．因而$x^n-p=0$无有理根，但实数$\sqrt[n]{p}$是其根，故$\sqrt[n]{p}$只能是无理数．

648. 设有整系数方程$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0=0$．若$a_n$，$a_{n-1}$，$\cdots$，$a_1$有公因子$d$，但$d\nmid a_0$，求证此方程没有整数根．

证 否则，若方程有整数根α，则

$$a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_1\alpha=-a_0.$$

因为$d\mid(a_n\alpha^n+\cdots+a_1\alpha)$，所以$d\mid a_0$，矛盾．

649. 设有整系数方程$x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0=0$，又设$p$为素数，且$p$可以整除$a_{n-1}$，$a_{n-2}$，$\cdots$，$a_0$．证明：$f(x)$的整数根（如果存在）必为$p$的倍数．

证 设α为其整数根，则

$$\alpha^n=-(a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_0).$$

所以 $p|\alpha^n$，从而 $p|\alpha$.

650. 设 $f(x)$是整系数多项式，它在 5 个整数点上的值均为 5，证明：$f(x)$无整数根．

证 设 $f(x)=q(x)(x-x_1)\cdots(x-x_5)+5$，其中 $x_i(i=1,2,\cdots,5)$都是整数，$q(x)$是整系数多项式．

用反证法．若

$0=f(m)=q(m)(m-x_1)\cdots(m-x_5)+5$，

即 $-5=q(m)(m-x_1)\cdots(m-x_5)$，　(1)

由于-5 仅有 4 个不同的整数因子$\pm1,\pm5$，这与(1)式矛盾．从而 $f(x)$无整数根．

651. 设 $f(x)$是有理数域上首项系数为 1 的 $n(\geqslant2)$次多项式，并且在有理数域上不可约．已知 $f(x)$的某一根的倒数且仍为 $f(x)$的根．证明：$f(x)$的每一根的倒数都是 $f(x)$的根．

证 设

$$f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0, \tag{1}$$

由假设存在一数 α 使

$$f(\alpha)=f(\frac{1}{\alpha})=0. \tag{2}$$

令

$$M=\{\varphi(x)|\varphi(\alpha)=0,\varphi(x)\in Q[x]\}, \tag{3}$$

下证 $f(x)$是 M 中次数最低的，从而是唯一的．

设 M 中次数最低的且首项系数为 1 的多项式为 $h(x)$，那么 $h(\alpha)=0$. 用 $h(x)$除 $f(x)$，得

$$f(x)=q(x)h(x)+r(x), \tag{4}$$

其中 $r(x)=0$ 或 $\partial(r(x))<\partial(h(x))$. 由于 $r(\alpha)=0$ 以及 $h(x)$次数最低，所以 $r(x)=0$，则 $h(x)|f(x)$，$f(x)=h(x)g(x)$. 由于 $f(x)$不可约，故 $g(x)$一定是常数．但 $f(x)$，$h(x)$首项系数都是 1，即证

得 $f(x)=h(x)$.

再证(1)式中的系数关系有

$$a_0=\pm 1, a_i=\pm a_{n-i}, (i=1,2,\cdots,n-1). \tag{5}$$

事实上

$$f(\alpha)=\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_1\alpha+a_0, \tag{6}$$

$$f(\frac{1}{\alpha})=(\frac{1}{\alpha})^n+a_{n-1}(\frac{1}{\alpha})^{n-1}+\cdots+a_1(\frac{1}{\alpha})+a_0, \tag{7}$$

所以由(7)式得

$$\alpha^n+\frac{a_1}{a_0}\alpha^{n-1}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_0}\alpha+\frac{1}{a_0}=0. \tag{8}$$

由(6)、(8)两式及上面证明的唯一性得 $a_0=\frac{1}{a_0}$. 故 $a_0=\pm 1$. 再由 $a_i=\frac{a_{n-i}}{a_0}$,得 $a_i=\pm a_{n-i}$.

最后可证:若 $f(\beta)=0$,则 $f(\frac{1}{\beta})=0$.

652. 证明:不存在次数为 $n\geqslant 1$ 的整系数多项式 $f(x)$,对于变量 x 的任意整数值的函数值都是素数.

证 用反证法. 设存在多项式 $f(x)$,取整数 x_0 且 $f(x_0)=p$,其中 p 为素数. 对于任意整数 k,有

$$f(x_0+kp)=p+kp\frac{f'(x_0)}{1!}+\cdots+(kp)^n\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},$$

因而 $p\mid f(x_0+kp)$. 由假设 $f(x_0+kp)$ 只能是素数,所以 $f(x_0+kp)=\pm p$,即有 $[f(x_0+kp)]^2-p^2=0$,亦即 $2n$ 次方程 $[f(x)]^2-p^2=0$ 具有无穷多个根 x_0+kp,这是不可能的.

四、 根与系数的关系

653. 根与系数的关系(Vieta 定理) 设有一元 n 次多项式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0,$$

其根为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$,则

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=-\dfrac{a_{n-1}}{a_n}, \\ \alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\cdots+\alpha_{n-1}\alpha_n=\dfrac{a_{n-2}}{a_n}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}+\cdots+\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_n=(-1)^{n-1}\dfrac{a_1}{a_n}, \\ \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n=(-1)^n\dfrac{a_0}{a_n}. \end{cases} \tag{1}$$

注 由于 n 次多项式与 n 次方程有相同的根,因此一元 n 次方程的根与系数也满足(1)式.

654. 若实系数方程 $x^3+px+q=0$ 有一根 $a+bi$(a,b 为实数,$b\neq0$),则方程 $x^3+px-q=0$ 有实根 $2a$.

证 设原方程三个根为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$,不失一般性,令 $\alpha_1=a+bi$,从而有 $\alpha_2=a-bi$.

$$0=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=(a+bi)+(a-bi)+\alpha_3,$$

所以 $\alpha_3=-2a$, 即 $(-2a)^3+p(-2a)+q=0$, 所以

$$(2a)^3+p(2a)-q=0.$$

655. 试作二次方程,使其根为方程 $x^2+bx+c=0$ 的根的平方.

解 设 x_1,x_2 为 x^2+bx+c 的两个根,再设所求方程为 $x^2+px+q=0$,则

$$-p=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=b^2-2c,$$

$$q=x_1^2x_2^2=c^2.$$

故所求方程为:$x^2+(2c-b^2)x+c^2=0$.

656. 求证三次方程 $x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$ 的三根成等差数列 $\Longleftrightarrow 2a_1^3-9a_1a_2+27a_3=0$.

证 必要性 设方程的三根为:$a-d,a,a+d$,则

$-a_1=(a-d)+a+(a+d)=3a$，所以 $a=-\frac{a_1}{3}$ 是原方程的根，代入原方程，$(-\frac{a_1}{3})^3+a_1(-\frac{a_1}{3})^2+a_2(-\frac{a_1}{3})+a_3=0$，即 $2a_1^3-9a_1a_2+27a_3=0$.

充分性 取 $\alpha=-\frac{a_1}{3}$，由于 $(-\frac{a_1}{3})^3+a_1(-\frac{a_1}{3})^2+a_2(-\frac{a_1}{3})+a_3=27(2a_1^3-9a_1a_3+27a_3)=0$，故 α 是三次方程的根．设另外两根为 β,γ，则

$$\alpha+\beta+\gamma=-a_1,\beta+\gamma=-a_1-(-\frac{a_1}{3})=-\frac{2}{3}a_1=2\alpha.$$

所以 $\beta-\alpha=\alpha-\gamma$，即 α,β,γ 成等差数列．

657. 若 α,β 同为 $x^2+px+q=0$ 和 $x^{2n}+p^nx^n+q^n=0$（n 为正偶数）的两个相异非零根，求证：$\frac{\beta}{\alpha},\frac{\alpha}{\beta}$ 为 $x^n+1+(x+1)^n=0$ 的根．

证 因为 $\alpha+\beta=-p$，n 为偶数，所以 $(\alpha+\beta)^n=p^n$. 由 $0=\alpha^{2n}+p^n\alpha^n+q^n=(\alpha^n)^2+p^n\alpha^n+q^n$ 知 α^n 是 $x^2+p^nx+q^n=0$ 的根．同理，β^n 是它的另一根．故 $\alpha^n+\beta^n=-p^n$. 从而 $\alpha^n+\beta^n+(\alpha+\beta)^n=0$，$(\frac{\beta}{\alpha})^n+1+(\frac{\beta}{\alpha}+1)^n=0$. 即 $\frac{\beta}{\alpha}$ 是 $x^n+1+(x+1)^n=0$ 的根．类似地可证，$\frac{\alpha}{\beta}$ 也是 $x^n+1+(x+1)^n=0$ 的根．

658. 设 x_1,x_2,x_3 为方程 $x^3-6x^2+ax+a=0$ 的三个根，求出使 $(x_1-1)^3+(x_2-2)^3+(x_3-3)^3=0$ 的所有实数 a，并对每个这样的 a，求出相应的 x_1,x_2,x_3.

解 令 $y=x-2$，则

$$y^3+(a-12)y+(3a-16)=0, \tag{1}$$

那么 $y_1=x_1-2,y_2=x_2-2,y_3=x_3-2$ 为(1)的三个根

故

$$0=y_1+y_2+y_3=(y_1+1)+y_2+(y_3-1). \tag{2}$$

在公式

$$x^3+y^3+z^3=(x+y+z)^3-3(x+y+z)(xy+xz+yz)+3xyz$$

中，令 $x=y_1+1, y=y_2, z=y_3-1$，并注意(2)式得

$$0=(x_1-1)^3+(x_2-2)^3+(x_3-3)^3=(y_1+1)^3+y_2{}^3+(y_3-1)^3$$
$$=3(y_1+1)y_2(y_3-1).$$

因此，$y_1=-1$ 或 $y_2=0$ 或 $y_3=1$.

当 $y_1=-1$ 时，$x_1=y_1+2=1$ 代入原方程解得 $a=\frac{5}{2}$，从而 $x^3-6x^2+ax+a=(x-1)(x^2-5x-\frac{5}{2})$，另两根为：$\frac{1}{5}(5\pm\sqrt{35})$；

当 $y_2=0$ 时，$x_2=2, a=\frac{16}{3}$，另两根为 $2\pm\frac{2}{3}\sqrt{15}$；

当 $y_3=1$ 时，$x_3=3, a=\frac{27}{4}$，另两根为$\frac{3}{2}(1\pm\sqrt{2})$.

659. 求证实系数三次方程 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 的三个根的实部均为负数的充要条件是 $a>0, c>0, ab-c>0$.

证　先证必要性．设三根为 x_1, x_2, x_3，其中不妨设 x_1 是实根，且由必要性假设知 $x_1<0$.

1) 若 $x_2=\alpha+\beta i, x_3=\alpha-\beta i$，且 $\alpha<0$，则

$$x_2+x_3=2\alpha<0, x_2x_3=\alpha^2+\beta^2>0,$$
$$a=-(x_1+x_2+x_3)=-(x_1+2\alpha)>0,$$
$$b=x_1(x_2+x_3)+x_2x_3=2\alpha x_1+(\alpha^2+\beta^2)>0,$$
$$c=-x_1x_2x_3=-x_1(\alpha^2+\beta^2)>0,$$
$$ab-c=-x_1(\alpha^2+\beta^2)-2\alpha(\alpha^2+\beta^2)-2\alpha x_1{}^2-4\alpha^2x_1+x_1(\alpha^2+\beta^2)$$
$$=-2\alpha(\alpha^2+\beta^2)-2\alpha x_1{}^2-4\alpha^2x_1>0.$$

2) 若 x_1, x_2, x_3 为三个负数，仿上可证得结论．

再证充分性．由 $a>0, c>0, ab-c>0$ 可知 $b>\frac{c}{a}>0$，从而方程无非负实根.

如果方程三根均为实数，则一定是负的，从而结论得证．否

则，设

$$x_1<0, x_2=\alpha+\beta i, x_3=\alpha-\beta i,$$

先证 $\alpha\neq 0$. 否则，$x_2=\beta i, x_3=-\beta i$，那么 $a=-x_1, b=\beta^2, c=-x_1\beta^2$，从而 $ab-c=-x_1\beta^2+x_1\beta^2=0$，这与 $ab-c>0$ 矛盾．

再证 $\alpha<0$. 否则，$\alpha>0$，那么 $b=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=2\alpha x_1+\alpha^2+\beta^2$，$b-(\alpha^2+\beta^2)=2\alpha x_1<0$，$c=-x_1(\alpha^2+\beta^2)$，$\alpha^2+\beta^2=-\dfrac{c}{x_1}$，所以 $b+\dfrac{c}{x_1}<0$，$bx_1+c>0$. 于是 $c>-bx_1=b(a+2\alpha)=ab+2\alpha b>ab$，即 $ab-c<0$，矛盾．

660.　解方程组

$$\begin{cases} x+y+z=3, & (1)\\ x^2+y^2+z^2=3, & (2)\\ x^3+y^3+z^3=3. & (3)\end{cases}$$

解　由(1)、(2)、(3)得 $xy+yz+zx=3, xyz=1$. 由韦达定理可知 x,y,z 是多项式 t^3-3t^2+3t-1 的三个根，而 $t^3-3t^2+3t-1=(t-1)^3$，所以 $x=y=z=1$.

661.　设 $1,x_1,\cdots,x_{2n}$是 $x^{2n+1}-1$ 的全部根，试证：$(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_{2n})=2n+1$.

证　因为 $x^{2n+1}-1=(x-1)(x^{2n}+x^{2n-1}+\cdots+x+1)$，所以 $x_1,x_2,\cdots,x_{2n}$是 $x^{2n}+x^{2n-1}+\cdots+x+1$ 的根．令　$y_i=1-x_i, i=1,2,\cdots,2n$，则 $y_1,y_2,\cdots,y_{2n}$都是多项式$(1-y)^{2n}+(1-y)^{2n-1}+\cdots+(1-y)+1$ 的根，而此多项式的常数项是 $2n+1$，由韦达定理知：

$$(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_{2n})=y_1y_2\cdots y_{2n}=2n+1.$$

662.　解线性方程组：

$$\begin{cases} a_1^{n-1}x_1+a_1^{n-2}x_2+\cdots+a_1x_{n-1}+x_n=-a_1^n,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_n^{n-1}x_1+a_n^{n-2}x_2+\cdots+a_nx_{n-1}+x_n=-a_n^n.\end{cases}$$

其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是互不相等的数.

解　由于原方程组的系数行列式不等于零,所以有唯一解.

作多项式 $f(y)=y^n+x_1y^{n-1}+x_2y^{n-2}+\cdots+x_{n-1}y+x_n$,则 a_1, $a_2,\cdots,a_n$ 是 $f(y)$的 n 个根,由韦达定理知

$$\begin{cases} x_1=-(a_1+a_2+\cdots+a_n), \\ x_2=a_1a_2+a_1a_3+\cdots+a_{n-1}a_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n=(-1)^n a_1a_2\cdots a_n. \end{cases}$$

五、　三次与四次多项式的根

663.　设 $f(x)=x^3+px+q$ 的三个根为 x_1,x_2,x_3,则

$$x_1=\alpha+\beta, x_2=\alpha\varepsilon+\beta\varepsilon^2, x_3=\alpha\varepsilon^2+\beta\varepsilon. \qquad (1)$$

其中

$$\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3},$$

$$\alpha=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}},$$

$$\beta=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}, \qquad (2)$$

$$\alpha\beta=-\frac{p}{3}.$$

注　① 这个求根公式,称为卡当(Cartan)公式.

② 对于一般的三次方程 $ax^3+bx^2+cx+d=0$,只要令　$x=y-\frac{b}{3a}$,代入方程,即可化为形如

$$y^3+py+q=0$$

的方程,其中 $p=(2ac-b^2)/3a^2, q=(2b^3-9abc+27a^2d)/27a^3$.

664.　设复系数多项式 $f(x)=x^3+px+q$ 的三个根为 x_1, x_2,x_3. 证明:

$$(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2=-4p^3-27q^2.$$

证　设 α,β 为 **663** 条(2)式，可证 $\alpha^3+\beta^3=-q,\alpha\beta=-\frac{p}{3}$. 由卡当公式知 $f(x)$的三根为 $x_1=\alpha+\beta,x_2=\alpha\varepsilon+\beta\varepsilon^2,x_3=\alpha\varepsilon^2+\beta\varepsilon$. 其中 ε 为三次单位原根．于是

$$(x_1-x_2)=(1-\varepsilon)(\alpha-\beta\varepsilon^2),$$

$$(x_1-x_3)=(1-\varepsilon^2)(\alpha-\beta\varepsilon),$$

$$(x_2-x_3)=\varepsilon(1-\varepsilon^2)(\alpha-\beta).$$

$$\therefore\quad (x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2=-27q^2-4p^3.$$

665.　证明：实系数三次多项式 $f(x)=x^3+px+q$ 的根都是实数且有二根相等的充要条件是：

$$\Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0.$$

证　充分性　令 α 为$-\frac{q}{2}$的实立方根，即 $\alpha=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}},\alpha\varepsilon,\alpha\varepsilon^2$，其中 ε 为三次单位原根，则由$\frac{q^2}{4}=-\frac{p^3}{27}$，可得 $\alpha^2=-\frac{p}{3}$. 由此，据卡当公式知 $f(x)$的三个根为：

$$\alpha+\alpha=2\alpha,\alpha\varepsilon+\alpha\varepsilon^2=\alpha(\varepsilon+\varepsilon^2)=-\alpha,\alpha\varepsilon^2+\alpha\varepsilon=-\alpha.$$

即三个根都是实数，且有两个根相等．

必要性　设 α,α,β 为 $f(x)$的三个根，则由根与系数的关系，得

$$\begin{cases}2\alpha+\beta=0,\\ \alpha^2+2\alpha\beta=p,\\ \alpha^2\beta=-q.\end{cases}$$

由此可得 $\beta=-2\alpha,p=-3\alpha^2,q=2\alpha^3$. 于是$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0$.

注　当 $p=q=0$ 时，$f(x)$有三重根 0；当 $pq\neq0$ 而 $\Delta=0$ 时，则 $f(x)$有三个实根，其中有一个为二重根．

666.　试讨论实系数三次方程 $x^3+px+q=0$ 的根的情况．

解　判别式 $\Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$.

表 8-1

Δ	方程根的性质
>0	一个实根，一对共轭复根
$=0$	全为实根，其中至少有二个相等
<0	三个不同的实根

下面证明表 8-1 的结论.

令 $f_0(x)=f(x)$，它的斯图姆组为 $f_0(x)$，$f_1(x)=3x^2+p$，$f_2(x)=-2px-3q$，$f_3(x)=-(4p^3+27q^2)$. 并设斯图姆组在 x 点的变号数为 $V(x)$，那么

1) 当 $-(4p^3+27q^2)>0$ 时，即 $\Delta<0$，则 $p<0$. $V(+\infty)=0$，$V(-\infty)=3$. 故 $f(x)$ 有三个实根，并且可以证明 $f(x)$ 无重根，从而 $f(x)$ 有三个不同实根.

2) 当 $-(4p^3+27q^2)<0$ 时，即 $\Delta>0$.

① 当 $p>0$ 时，$V(-\infty)=2$，$V(+\infty)=1$. 故 $f(x)$ 只有一个实根；

② 当 $p<0$ 时，$V(-\infty)=2$，$V(+\infty)=1$. 故 $f(x)$ 只有一个实根.

因此 $f(x)$ 有一个实根，一对共轭复根.

3) 当 $4p^3+27q^2=0$ 时，$f(x)$ 有重根，因此一定为三个实根(因为复根是成对出现的). 且至少有两个实根相等.

667.　设复系数四次方程为

$$x^4+bx^3+cx^2+dx+e=0, \tag{1}$$

则(1)的四个根与下面两个方程的四个根完全相同：

$$x^2+\frac{(b+\beta)}{2}x+\left(y+\frac{by-d}{\beta}\right)=0, \tag{2}$$

$$x^2+\frac{(b-\beta)}{2}x+(y-\frac{by-d}{\beta})=0, \tag{3}$$

其中 $\beta=\sqrt{8y+b^2-4c}$，y 是方程

$$8y^3-4cy^2+(2bd-8e)y+e(4c-b^2)-d^2=0. \tag{4}$$

的任一实根.

注　① 方程(4)称为四次方程(1)的予解方程.

② 解四次方程要先从予解方程(4)中求出一个实根(有多个，可任取一个)，然后代入(2)、(3)求根.

668.　利用四次方程的根式解法，求多项式 $f(x)=x^4+x^2+4x-3$ 的根.

解　由于 $b=0,c=1,d=4,e=-3$，可得予解方程

$$8t^3-4t^2-24t-28=0.$$

显然，$t_0=1$ 是它的一个实根. 于是 $f(x)$的根就是以下两个方程的根：

$$x^2+x-1=0, x^2-x+3=0.$$

这两个二次方程的根分别为：$\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{5})$与$\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{11}i)$. 这就是原四次多项式的所有根.

669.　把多项式 $f(x)=x^4+4x-1$ 分解成两个实二次式之积.

解　利用四次方程求根公式的导出过程，把方程 $x^4+4x-1=0$ 分解为两个二次方程：

$$x^2+\sqrt{2}x+1-\sqrt{2}=0, x^2-\sqrt{2}x+1+\sqrt{2}=0,$$

所以 $f(x)=x^4+4x-1=(x^2+\sqrt{2}x+1-\sqrt{2})(x^2-\sqrt{2}x+1+\sqrt{2})$.

六、　实系数多项式的根

670.　设 $f(x)=x^5-9x^4+ax^3+bx^2+cx-4$ 有 5 个实根，证

明：$f(x)$至少有一个根小于1.

证　设5个实根为$x_i=1+\alpha_i, i=1,2,\cdots,5$. 下证至少有一个$\alpha_i<0$. 否则，即$\alpha_j>0, j=1,\cdots,5$. 由韦达定理知：

$$(1+\alpha_1)+\cdots+(1+\alpha_5)=9, \tag{1}$$

$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_5)=4. \tag{2}$$

由(1)知

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_5=4, \tag{3}$$

由(2)知

$$1+(\alpha_1+\cdots+\alpha_5)+\sum\alpha_i\alpha_j+\sum\alpha_i\alpha_j\alpha_k+\sum\alpha_i\alpha_j\alpha_k\alpha_m$$
$$+\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_5=4. \tag{4}$$

注意到(3)式，以及每个$\alpha_i\geqslant 0$，这与(4)式矛盾，所以至少有一个$\alpha_i<0$，从而至少有一根$x_i<1$.

671.　试求多项式$f(x)=nx^n-x^{n-1}-\cdots-1$的实根的个数.

解　$x=1$是$f(x)$的根. 考虑$F(x)=(x-1)f(x)=nx^{n+1}-(n+1)x^n+1$，$F'(x)=n(n+1)x^{n-1}(x-1)$，其根为$x=0,1$.

讨论情况见下表：

表 8-2

	n为偶数							n为奇数					
x	$-\infty$	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$	$-\infty$	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$F'(x)$		+	0	−	0	+		−	0	−	0	+
$F(x)$		↗	1	↘	0	↗		↘	1	↘	0	↗
$F(x)$的根		有实根		无实根	根	无实根		无实根		无实根	根	无实根

由此可见，当n为偶数时，$f(x)$有一个负根和一个正根$x=1$；当n为奇数时，$f(x)$只有一个根$x=1$.

672.　设a是一个实数，证明：多项式

$$f(x)=x^n+ax^{n-1}+a^2x^{n-2}+\cdots+a^{n-1}x+a^n$$

最多有一个实根(不计重数).

证　当 $a=0$ 时，$f(x)=x^n$ 只有实根 0.

当 $a\neq 0$ 时，令 $g(x)=x^{n+1}-a^{n+1}$，则 $g(x)=(x-a)f(x)$，且 $g(x)$ 没有重根．于是 $f(x)$ 也没有重根．

当 n 为奇数时，由于 $a\neq 0$，$n+1$ 为偶数，故 $g(x)=x^{n+1}-a^{n+1}$ 有且只有二实根 $x=\pm a$．于是 $-a$ 便是 $f(x)$ 的唯一实根．

当 n 为偶数时，$n+1$ 为奇数，$g(x)$ 只有唯一的实根 $x=a$，从而 $f(x)$ 没有实根．

总之，$f(x)$ 最多有一个实根．

673.　设多项式 $f(x)$ 只有实根，证明：如果实数 α 是 $f'(x)$ 的重根，则 α 是 $f(x)$ 的根．

证　设 $f(x)$ 的实根为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，则

$$f'(x)=a_0\sum_{i=1}^{n}(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_{i-1})(x-\alpha_{i+1})\cdots(x-\alpha_n)$$
$$=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x-\alpha_i}\right)f(x).$$

上式两端求导，得

$$f''(x)=-\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(x-\alpha_i)^2}\right)f(x)+\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x-\alpha_i}\right)f'(x).$$

若 $f(\alpha)\neq 0$，则 $\alpha\neq\alpha_i$．由于 α 是 $f'(x)$ 的重根，故有 $f'(\alpha)=f''(\alpha)=0$．因而 $f(\alpha)=0$，矛盾．所以 $f(\alpha)=0$，即 α 是 $f(x)$ 的根．

674.　设 n 次实多项式 $f(x)$ 无重根．证明：如果存在实数 x_0 使 $[f'(x_0)]^2<f(x_0)f''(x_0)$，则 $f(x)$ 的根不全为实数．

证　用反证法．　设 $f(x)$ 的根 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 全是实数．不难看到 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x-x_i}$.

若 x_i 全为实数，上式对 x 求导则得：

$$\frac{f''(x)f(x)-[f'(x)]^2}{[f(x)]^2}=-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(x-x_i)^2}.$$

上式右端当 $x=x_0$(x_0 显然不是 $f(x)$ 的根)时,必为负数,所以 $f''(x_0)f(x_0)-[f'(x_0)]^2<0$,与已知条件矛盾.

675.　证明:若实系数多项式 $f(x)$ 的一切根都是实数,并且其中有 p 个(重根按重数计算)是正根,则 $f'(x)$ 有 p 个或 $p-1$ 个正根.

证　设 $x_1<x_2<\cdots<x_k$ 为 $f(x)$ 的全部不同的正实根,且重数分别为 $m_1,m_2,\cdots,m_k$,则由假设知

$$m_1+m_2+\cdots+m_k=p.$$

而 $f'(x)$ 的正根只可能是 $x_1,x_2,\cdots,x_k$,重数分别为 $m_1-1,m_2-1,\cdots,m_k-1$ 及 $y_1,y_2,\cdots,y_{k-1}$,由第 **673** 条知它们分别为区间 $(x_1,x_2),\cdots,(x_{k-1},x_k)$ 内的单根,或在 (x_0,x_1) 内也可能有 $f'(x)$ 的一个正根,其中 x_0 为 $f(x)$ 的小于 x_1 且与 x_1 相邻的一个根;则 $x_0\leqslant 0$. 从而 $f'(x)$ 的正根个数为:

$$(m_1-1)+\cdots+(m_k-1)+k-1=p-1$$

或

$$(m_1-1)+\cdots+(m_k-1)+k-1+1=p.$$

676.　设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 为实系数多项式,且 $a_0>0$,证明:若 $f(x)$ 只有实根,且有 p 个是正根(重根按重数计算),则 $f(x)$ 的最后一个不等于零的系数的符号为 $(-1)^p$.

证　设 $f(x)$ 的最后一个不等于零的系数是 a_k,从而 $f(x)=a_0x^n+\cdots+a_kx^{n-k}=a_0x^{n-k}(x-x_1)\cdots(x-x_p)(x-x_{p+1})\cdots(x-x_k)$,其中 $x_1,x_2,\cdots,x_p$ 为 $f(x)$ 的正根,而 $x_{p+1},\cdots,x_k$ 为 $f(x)$ 的负根,但是

$$\begin{aligned}a_k&=a_0(-x_1)(-x_2)\cdots(-x_p)(-x_{p+1})\cdots(-x_k)\\&=a_0(-1)^px_1x_2\cdots x_p(-x_{p+1})\cdots(-x_k),\end{aligned}$$

而 $a_0>0,x_1,\cdots,x_p$ 均为正数,又 $x_{p+1},\cdots,x_k$ 均为负数,故 a_k 的符号为 $(-1)^p$.

677.　在一个多项式的两个根之间,它的导数至少有一个根.

证　由微积分中罗尔定理可证.

注　在代数中把这条也称为罗尔定理.

678.　设 $p(x)$ 是 n 次多项式,且 $p(a)\geqslant 0, p'(a)\geqslant 0,\cdots, p^{(n-1)}(a)\geqslant 0, p^{(n)}(a)>0$. 证明:方程 $p(x)=0$ 的实根不超过 a.

证　对多项式 $p(x)$ 在 $x=a$ 点按泰勒公式展开,得

$$p(x)=p(a)+p'(a)(x-a)+\cdots+\frac{p^{(i)}(a)(x-a)^i}{i!}+\cdots+\frac{p^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!},$$

因为 $p^{(n+1)}(x)=0$,所以余式为零. 当 $x>a$ 时,由对 $p^{(i)}(a)$ 的假定和上式 $p(x)>0$,这意味着 $p(x)$ 没有超过 a 的根.

679.　证明:若实系数多项式 $p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 的全部根都是实数,则它的各阶导数 $p'(x), p''(x),\cdots,p^{(n-1)}(x)$ 也只有实根($a_0\neq 0$).

证　只要证明 $p'(x)$ 的所有根均为实数即可.

设 $\alpha_1<\cdots<\alpha_s$ 为 $p(x)$ 的根,它们的重数依次为 $k_1,k_2,\cdots,k_s$,则 $k_1+\cdots+k_s=n$. 于是 α_i 就是 $p'(x)$ 的 k_i-1 重根. 因此 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 作为 $p'(x)$ 的根的重数之和为 $(k_1-1)+\cdots+(k_s-1)=n-s$,除此之外,由罗尔定理,多项式 $p'(x)$ 还有根 b_i,其中 $\alpha_i<b_i<\alpha_{i+1}, i=1,\cdots,s-1$. 不少于 $s-1$ 个根. 因为 $(n-s)+(s-1)=n-1$,所以 $p'(x)$ 没有其它的根. 即 $p'(x)$ 的所有根都是实数.

680.　已知 $c_0+\frac{c_1}{2}+\cdots+\frac{c_n}{m+1}=0$,证明:多项式 $c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n$ 至少有一实根.

证　设 $p(x)=c_0x+\frac{c_1}{2}x^2+\cdots+\frac{c_n}{n+1}x^{n+1}$. 由于 $p(1)=0$ 及 $p(0)=0$,因此存在 $x_0\in(0,1)$,使得 $p'(x_0)=0$. 但 $p'(x)$ 同多项式 $c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n$ 相一致,因而 x_0 也是 $c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n$ 的根.

681. 试证：没有实根的首项系数大于零的实系数多项式可以表成两个实系数多项式的平方和．

证　设 $f(x)$ 是适合条件的多项式，那么 $\partial(f(x))$ 一定是偶数，而且其根一定是一些共轭虚数对．设其根为

$$\alpha_1,\overline{\alpha_1},\alpha_2,\overline{\alpha_2},\cdots,\alpha_s,\overline{\alpha_s}.$$

令　$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_s)=f_1(x)+if_2(x)$，

其中 $f_1(x),f_2(x)$ 是实系数多项式，则

$$(x-\overline{\alpha_1})(x-\overline{\alpha_2})\cdots(x-\overline{\alpha_s})=f_1(x)-if_2(x),$$

于是

$$\begin{aligned}f(x)&=c(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_s)(x-\overline{\alpha_1})\cdots(x-\overline{\alpha_s})\\&=[\sqrt{c}\,f_1(x)]^2+[\sqrt{c}\,f_2(x)]^2.\end{aligned}$$

682. 设对于 x 的一切实数值，实系数多项式 $f(x)$ 的值都 $\geqslant 0$，则 $f(x)=\psi_1^2(x)+\psi_2^2(x)$，其中 $\psi_1(x),\psi_2(x)$ 是实系数多项式．

证　首先可知 $f(x)$ 首项系数为正．否则让 $x\to-\infty$，$f(x)$ 与首项系数同号，则与 $f(x)\geqslant 0$ 矛盾．

再设 $\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_r$ 分别是 $f(x)$ 的 $k_1,\cdots,k_r$ 重实根，那么

$$f(x)=(x-\alpha_1)^{k_1}\cdots(x-\alpha_r)^{k_r}g(x),$$

其中 $g(x)$ 是实系数多项式且无实根．由第 **681** 条只须证 $k_1,\cdots,k_r$ 均为偶数即可．

若某 k_i 是奇数，取 $c\in(\alpha_{i-1},\alpha_i)$，$d\in(\alpha_i,\alpha_{i+1})$，因为 $(c-\alpha_i)^{k_i}$ 与 $(d-\alpha_i)^{k_i}$ 反号，而当 $j\neq i$ 时，所有其余 $(c-\alpha_j)^{k_j}$ 与 $(d-\alpha_j)^{k_j}$ 同号，故 $f(c)$ 与 $f(d)$ 反号．这与 $f(x)$ 的一切值都 $\geqslant 0$ 矛盾，从而 $k_1,\cdots,k_r$ 均为偶数．

683. 设 $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^i$ 是实系数多项式，则

1) 当 $(-1)^ia_i(i=0,1,\cdots,n)$ 全为正数时，$f(x)$ 没有负根．

2) 当 $(-1)^ia_i(i=0,1,\cdots,n)$ 全为负数时，$f(x)$ 没有负根．

3) 当 $a_i(i=0,1,\cdots,n)$ 全正或全负时，$f(x)$ 没有正根．

证 用反证法可证得.

684. 试证:$2x^8+5x^6+\sqrt{3}x^4+7x^2+1$ 没有实数根.

证 用第 **683** 条可证.

七、斯图姆(Sturm)定理

685. 什么叫做多项式实根的界?

答 设 n 次实系数多项式 $f(x)$ 有 k 个正实根为 $\beta_1,\cdots,\beta_k$. 若存在正实数 A,使 $\beta_i<A,i=1,2,\cdots,k$,则称 A 为 $f(x)$ 的正根的上界.

类似地,可以定义正根的下界,负根的上界,负根的下界.

设 $f(x)$ 的一切实根为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_t$,若存在正实数 B,使 $|\alpha_i|<B$, $i=1,2,\cdots,t$,则称 B 为实根的界.

686. 设实系数多项式 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0(a_n\neq 0)$,令 $c=\max\{|a_0|,|a_1|,\cdots,|a_{n-1}|\}$ 和 $A=1+\dfrac{c}{|a_n|}$,若 $f(x)$ 有实根,则它们一定在 $(-A,A)$ 内.

证
$$
\begin{aligned}
|f(x)| &\geqslant |a_n|\cdot|x|^n-|a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0| \\
&\geqslant |a_n|\cdot|x^n|-c[|x|^{n-1}+\cdots+|x|+1] \\
&=|a_n||x|^n-c\,\frac{|x|^n-1}{|x|-1}.
\end{aligned}
$$

当 $|x|>1$ 时,有

$$|f(x)|>|a_n||x|^n-c\,\frac{|x|^n}{|x|-1}=\frac{|a_n|\cdot|x|^n}{|x|-1}\left[|x|-1-\frac{c}{|a_n|}\right]. \tag{1}$$

当 $|x|\geqslant\dfrac{c}{|a_n|}+1=A$ 时,$|f(x)|>0$. 因此 $f(x)$ 要有实根必在 $(-A,A)$ 内.

687. 设实系数多项式 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$,当 $|x|$ 充分大时,多项式 $f(x)$ 的符号和它的最高次项 a_nx^n 的符号一致.

证　先证当$|x|>\frac{A}{|a_n|}+1$时，有

$$|a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0|<|a_nx^n|, \tag{1}$$

其中$A=\max\{|a_0|,|a_1|,\cdots,|a_{n-1}|\}$. 因为由$|x|>\frac{A}{|a_n|}+1$可得$A<|a_n|(|x|-1)$，于是

$$|a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0|\leqslant A\frac{|x|^n-1}{|x|-1}<|a_n|(|x|^n-1)<|a_nx^n|.$$

再证结论．由(1)式，当$|x|>\frac{A}{|a_n|}+1$时可知$f(x)$的符号与a_nx^n的符号一致．

688.　求多项式$f(x)=64x^3+256x^2-184x-113$的实根的界．

解　因为$a_n=64,c=256$，故$A=1+\frac{c}{|a_n|}=5$，$f(x)$的实根在$(-5,5)$内．

689.　设$f(x)$是首项系数为1的实系数n次多项式，且根全为实数．证明：实数b是$f(x)$的实根上界，当且仅当$f(b),f'(b),\cdots,f^{(n)}(b)$都大于零．

证　设$f(b),f'(b),\cdots,f^{(n)}(b)$都大于零，则由泰勒公式

$$f(x)=f(b)+f'(b)(x-b)+\frac{f''(b)}{2!}(x-b)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(b)}{n!}(x-b)^n$$

知，对任何实数α，若$\alpha\geqslant b$，则$f(\alpha)>0$，即α不是根．这就是说，b是$f(x)$的实根上界．

反之，设b是$f(x)$的实根上界，且

$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n),$$

其中$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$都是实数．则$\alpha_i<b,i=1,2,\cdots,n$. 因此，$f(b)>0$. 又由于

$$f'(x)=(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)+(x-\alpha_1)(x-\alpha_3)\cdots(x-\alpha_n)+\cdots$$
$$+(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_{n-1}),$$

……………………………………

$f^{(n)}=n!$,

从而可得 $f'(b),f''(b),\cdots,f^{(n)}(b)$都大于零.

690. 设 $f(x)$为实系数多项式,b 为正实数,且 $f(x)=(x-b)q(x)+f(b)$. 证明:如果 $f(b)>0$,且商式 $q(x)$没有负系数,则 b 为 $f(x)$的实根上界.

证 任取 $a\geqslant b>0$,则因为 $q(x)$的系数非负,所以有

$$f(a)=(a-b)q(a)+f(b)\geqslant f(b)>0.$$

因此 a 不是 $f(x)$的根,亦即 b 是 $f(x)$的实根上界.

691. 设 $f(x)$为实系数多项式,存在实数 $a<b$.

1) 若 $f(a)$与 $f(b)$符号相反,则 $f(x)$在(a,b)内有奇数个实根(重根要计重数);

2) 若 $f(a)$与 $f(b)$符号相同,则 $f(x)$在(a,b)内有偶数个实根(重根要计重数).

证 只证 1),2)可类似地证明.

不失一般性,设 $f(a)=A>0,f(b)=B<0$,则点 $M(a,A)$在 x 轴上方,点 $N(b,B)$在 x 轴下方,而 $f(x)$是连续函数,从 M 点出发到 N 点,必须经过 x 轴奇数次,从而有奇数个实根.

692. 实系数多项式的实根个数与其次数具有相同的奇偶性.

证 设 $f(x)$的次数为 n,它有 m 个实根 $\beta_1,\cdots,\beta_m$,则 $f(x)=(x-\beta_1)(x-\beta_2)\cdots(x-\beta_m)g(x)$. 于是 $g(x)$的次数为 $n-m$,由于它没有实根,因此 $n-m$ 一定是偶数次. 从而 n 与 m 有相同的奇偶性.

693. 什么叫做实数序列的变号数?

答 给定一个实数序列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$. 只去掉其中 $a_i=0$ 的数,不改变次序得到新的非零实数序列 $c_1,\cdots,c_m$. 当 $c_kc_{k+1}<0$ 时,则称 c_k 与 c_{k+1}之间有一个变号次数;当 $c_kc_{k+1}>0$ 时,则称 c_k 与

c_{k+1}之间变号次数为零．$c_1,\cdots,c_m$之间所有变号次数的和，称为$a_1,\cdots,a_n$的变号数．

比如实数序列$-1,0,1,2,0,-1,-2,3$的变号数与去掉0以后的实数列$-1,1,2,-1,-2,3$的变号数相等，此变号数为3.

694. 什么叫做实系数多项式的斯图姆组？

答 设$f(x)$是无重根的实系数多项式．令$f_0(x)=f(x)$，$f_1(x)=f'(x)$．用$f_1(x)$除$f(x)$所得余式反号后记为$f_2(x)$，再用$f_2(x)$除$f_1(x)$所得余式反号后记为$f_3(x)$，这样继续下去，最后一个记作$f_s(x)$（非零常数）．由这样得到的多项式序列$f_0(x)$，$f_1(x),\cdots,f_s(x)$就称为$f(x)$的斯图姆组．

比如，$f(x)=x^3-3x^2+3=f_0(x)$，$f'(x)=3x^2-6x=f_1(x)$，可求出$f_2(x)=2x-3$，$f_3(x)=\frac{9}{4}$，那么$f_0(x),f_1(x),f_2(x),\frac{9}{4}$为$f(x)$的斯图姆组．

695. 什么是斯图姆定理？

答 设$f(x)$为无重根的实系数多项式，$f(x)$的斯图姆组为

$$f_0(x),f_1(x),\cdots,f_m(x),$$

$f(a)f(b)\neq 0$，其中$a<b$，若实数列$f_0(a),f_1(a),\cdots,f_m(a)$的变号数为$p$，实数列$f_0(b),f_1(b),\cdots,f_m(b)$的变号数为$q$，则$f(x)$在区间$(a,b)$内实根的个数为$p-q$.

696. 用斯图姆定理求多项式$f(x)=x^3+3x-1$的实根个数，并把每根分隔成单位长区间内．

解 先求实根的界．由第**686**条，$c=3$，$a_n=1$，则$A=4$，所以$f(x)$的实根都是在$(-4,4)$内．

再求$f(x)$的斯图姆组：$f_0(x)=f(x)$，$f_1(x)=3x^2+6x$，利用辗转相除法：

$\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}$	$3x^2+6x$ $3x^2+\frac{3}{2}x$	$x^3+3x^2\quad -1$ x^3+2x^2	$\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$
	$\frac{9}{2}x$ $\frac{9}{2}x+\frac{9}{4}$	$x^2\quad -1$ x^2+2x	
	$r_2(x)=\frac{-9}{4}$ $f_3(x)=\frac{9}{4}$	$r_1(x)=-2x-1$ $f_2(x)=2x+1$	

所以斯图姆组为 $f_0(x)=x^3+3x^2-1$, $f_1(x)=3x^2+6x$, $f_2(x)=2x+1$, $f_3(x)=\frac{9}{4}$.

再求变号数,并把根隔离

表 8-3

x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	变号数
-4	$-$	$+$	$-$	$+$	3
-3	$-$	$+$	$-$	$+$	3
-2	$+$	0	$-$	$+$	2
-1	$+$	$-$	$-$	$+$	2
0	$-$	0	$+$	$+$	1
1	$+$	$+$	$+$	$+$	0

由表可知,$f(x)$有三个实根分别位于$(-3,-2)$,$(-1,0)$,$(0,1)$之内.

697. 什么叫傅立叶-布当(Fourier-Budan)定理?

答 设 n 次实系数多项式 $f(x)$,$a<b$,且 $f(a)f(b)\neq 0$. 再设

实数序列 $f(a), f'(a), \cdots, f^{(n)}(a)$ 的变号数为 p，而 $f(b), f'(b), \cdots, f^{(n)}(b)$ 的变号数为 q. 那么

1) $p \geq q$;

2) $f(x)$ 在 (a,b) 内的实根个数（k 重根按 k 个计算）或者等于 $p-q$，或者比 $p-q$ 少一个正偶数.

698. 什么叫笛卡尔(Descartes)符号法则?

答 设实系数多项式 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$，其中 $a_na_0\neq 0$. 若系数序列 $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$ 的变号次数为 p，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内的实根个数（k 重根按 k 个计算）等于 p 或者比 p 少一个的正偶数.

注 当 $p=0$ 时，无正根，当 $p=1$ 时，有且仅有一个正根.

八、 两个多项式的公共根

699. 设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$, $g(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m$，其中 a_0, b_0 不全为 0，则 $(f(x),g(x))\neq 1 \Longleftrightarrow$ 存在次数小于 m 的多项式 $u(x)$ 与次数小于 n 的多项式 $v(x)$，使 $u(x)f(x)=v(x)g(x)$.

700. 什么叫结式?

答 设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$, $g(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m$，则

$$R(f,g)=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & a_n & & & \\ & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & a_n & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & a_n \\ b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & \cdots & b_m & & & \\ & b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & \cdots & b_m & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_m \end{vmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} m\text{行} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} n\text{行} \end{matrix}$$

称为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的结式(其中空白处元素都是零).

701.　$R(f,g)=(-1)^{mn}R(g,f)$，其中 m,n 含意同第 **700** 条.

证　用行列式性质可证.

702.　设 $f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m=a_0\prod_{i=1}^{m}(x-x_i)$，其中 $a_0\neq 0,x_1,\cdots,x_m$ 为 $f(x)$ 的根；

$$g(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n=b_0\prod_{i=1}^{n}(x-y_i),$$

其中 $b_0\neq 0,y_1,\cdots,y_n$ 为 $g(x)$ 的全部根，则

$$\begin{aligned}R(f,g)&=a_0^nb_0^m\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}(x_i-y_j)\\&=a_0^n\prod_{i=1}^{m}g(x_i)=(-1)^{nm}\cdot b_0^m\prod_{i=1}^{n}f(y_i).\end{aligned}$$

证　1) 先证

$$R(f,g)=a_0^n\prod_{i=1}^{m}g(x_i). \tag{1}$$

对 m 用数学归纳法. 当 $m=1$ 时，$f(x)=a_0x+a_1$，那么 $x_1=-\dfrac{a_1}{a_0}$ 为 $f(x)$ 的根. 易证

$$R(f,g)=\begin{vmatrix}a_0 & a_1 & & & & \\ & a_0 & a_1 & & & \\ & & & \cdots & & \\ & & & & a_0 & a_1\\ b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_{n-1} & b_n\end{vmatrix}=a_0^ng(x_1).$$

即当 $m=1$ 时，(1)式成立. 现归纳假设结论对 k 成立，再证 $k+1$ 时结论也成立. 这时

$$\begin{aligned}f(x)&=a_0x^{k+1}+a_1x^k+\cdots+a_{k+1}\\&=(x-x_1)(a_0x^k+c_1x^{k-1}+\cdots+c_k). \end{aligned}\tag{2}$$

比较(2)式两边的系数，得

$$a_1=c_1-a_0x_1,\cdots,a_k=c_k-c_{k-1}x_1,a_{k+1}=-c_kx_1.$$

$$R(f,g)=\begin{vmatrix} a_0 & c_1-a_0x_1 & \cdots & c_k-c_{k-1}x_1 & -c_kx_1 & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & a_0 & c_1-a_0x_1 & \cdots & & -c_kx_1 \\ b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_n & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & b_0 & b_1 & \cdots & & b_n \end{vmatrix}\begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} n\text{ 行} \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} k+1\text{ 行} \end{matrix}$$

把第 1 列乘以 x_1 加到第 2 列，再把新的第 2 列乘以 x_1 加到第 3 列，…，最后把第 $n+k$ 列乘以 x_1 加到 $n+k+1$ 列，并注意 $g(x_1)=b_0x_1^n+\cdots+b_n$，于是

$$R(f,g)=\begin{vmatrix} a_0 & c_1 & \cdots & c_k & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & a_0 & c_1 & \cdots & & c_k \\ b_0 & b_0x_1+b_1 & \cdots & g(x_1) & x_1g(x_1) & \cdots & & x_1^kg(x_1) \\ & b_0 & \cdots & \cdots & g(x_1) & \cdots & & x_1^{k-1}g(x_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & b_0 & b_0x_1+b_1 & \cdots & & g(x_1) \end{vmatrix}\begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} n\text{ 行} \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} k+1\text{ 行} \end{matrix}$$

再把第 $n+2$ 行乘以 $-x_1$ 加到第 $n+1$ 行，把第 $n+3$ 行乘以 $-x_1$ 加到第 $n+2$ 行，…，最后把第 $n+k+1$ 行乘以 $-x_1$ 加到第 $n+k$ 行．于是

$$R(f,g)=\begin{vmatrix} a_0 & c_1 & \cdots & c_k & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & a_0 & c_1 & \cdots & c_k & 0 \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_n & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & b_0 & b_1 & \cdots & b_n & 0 \\ & & & & b_0 & \cdots & & g(x_1) \end{vmatrix}$$

按最后一列展开

$$R(f,g)=g(x_1)\begin{vmatrix} a_0 & c_1 & \cdots & c_k & & & \\ & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \\ & & & a_0 & c_1 & \cdots & c_k \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_n & & & \\ & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \\ & & & b_0 & b_1 & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

$$=g(x_1)\cdot R(\psi,g),$$

其中 $\psi(x)=a_0x^k+c_1x^{k-1}+\cdots+c_k$. 由归纳假设知

$$R(\psi,g)=a_0^n g(x_2)g(x_3)\cdots g(x_{k+1}),$$

因此

$$R(f,g)=a_0^n g(x_1)g(x_2)\cdots g(x_{k+1}).$$

归纳法完成.

2) 类似地可证 $R(g,f)=b_0^m\prod\limits_{i=1}^{n}f(y_i)$.

但 $R(f,g)=(-1)^{mn}R(g,f)$, 故

$$R(f,g)=(-1)^{nm}b_0^m\prod_{i=1}^{n}f(y_i).$$

3) 由于 $g(x)=b_0(x-y_1)(x-y_2)\cdots(x-y_n)$, 则

$$g(x_i)=b_0(x_i-y_1)(x_i-y_2)\cdots(x_i-y_n), i=1,2,\cdots,m.$$

把这 m 个式子乘起来, 再代入(1)式右端得

$$R(f,g)=a_0^n b_0^m\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}(x_i-y_j). \tag{3}$$

703. 设 $f(x)=a_0x^m+\cdots+a_{m-1}x+a_m, a_0\neq 0$,

$$g(x)=b_0x^n+\cdots+b_{n-1}x+b_n, b_0\neq 0,$$

则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 有公共复根 $\Longleftrightarrow R(f,g)=0$.

证 由第 **702** 条证明过程中的(3)式可证.

注 $(f(x),g(x))\neq 1\Longleftrightarrow R(f,g)=0$.

704. 设 $f(x)=a_0x^m+\cdots+a_m, a_0\neq 0$, 则 $f(x)$ 有重根 $\Longleftrightarrow$

$R(f,f')=0$.

证 $f(x)$有重根$\Longleftrightarrow(f,f')\neq 1\Longleftrightarrow R(f,f')=0$.

705. 设 $f(x),g_1(x),g_2(x)\in C[x]$,证明

$$R(f,g_1g_2)=R(f,g_1)\cdot R(f,g_2).$$

证 设 $x_1,\cdots,x_m$ 为 $f(x)=a_0x^m+\cdots+a_m$ 的全部根.$\partial(g_1(x))=s,\partial(g_2(x))=t$,由 **702** 条知

$$\begin{aligned}R(f,g_1g_2)&=a_0^{s+t}\prod_{i=1}^{m}[g_1(x_i)g_2(x_i)]\\&=[a_0^s\cdot\prod_{i=1}^{m}g_1(x_i)][a_0^t\cdot\prod_{i=1}^{m}g_2(x_i)]\\&=R(f,g_1)\cdot R(f,g_2).\end{aligned}$$

706. 求多项式 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 与 $g(x)=a_0x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}$的结式.

解

$$R(f,g)=\begin{vmatrix}a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ & & & & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n\\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ & & & & & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1}\end{vmatrix}$$

$$=\left|\begin{array}{cccc|cccc} & & & & a_n & & & \\ & 0 & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & a_n\\ \hline a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & & & & \\ & \ddots & & \vdots & a_{n-1} & & & \\ & & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ & & & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-1}\end{array}\right|$$

$=a_0^n a_n^{n-1}$.

707. 设 $f(x)=2x^3-3x^2+\lambda x+2,g(x)=x^4+\lambda x^2-3x-1$,

在 λ 取什么值时，$f(x)$ 与 $g(x)$ 有公共根．

解　因为

$$R(f,g)=\begin{vmatrix} 2 & -3 & \lambda & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & \lambda & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & \lambda & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -3 & \lambda & 2 \\ 1 & 0 & \lambda & -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \lambda & -3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+3)(-\lambda^3+4\lambda^2+28\lambda+157),$$

故当 $\lambda=-3$ 时，$R(f,g)=0$，从而 $f(x)$ 与 $g(x)$ 有公共根．其次对 $\lambda^3-4\lambda^2-28\lambda-157$ 的任意一个根，都使 $f(x)$ 与 $g(x)$ 有公共根．

708.　什么叫做以 $f(x)$ 和 $g(x)$ 为基的斯图姆组？

答　令 $f_0(x)=f(x)$，$f_1(x)=g(x)$，用 $f_1(x)$ 除 $f_0(x)$ 所得的余式反号记为 $f_2(x)$，再用 $f_2(x)$ 除 $f_1(x)$ 所得的余式反号，记为 $f_3(x)$，…，继续下去得到 $f_0(x)$，$f_1(x)$，…，$f_m(x)$，此即称为以 $f(x)$ 和 $g(x)$ 为基的斯图姆组．

709.　什么是卢斯定理？

答　设 n 次实系数多项式

$$f(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n.$$

令

$$f_0(t)=t^n-a_2t^{n-2}+a_4t^{n-4}-a_6t^{n-6}+\cdots,$$

$$f_1(t)=a_1t^{n-1}-a_3t^{n-3}+a_5t^{n-5}-\cdots,$$

以 $f_0(t)$，$f_1(t)$ 为基作斯图姆组：

$$f_0(t),f_1(t),\cdots,f_s(t),\tag{1}$$

那么 $f(z)$ 在虚轴及右半平面上没有根 $\Longleftrightarrow$ 斯图姆组(1)中 $s=n$，且每个多项式比它的前一个多项式低一次，且首项系数全为正数．

第九章　多元多项式

一、 定义

710.　什么叫做 n 元多项式?

答　P 是数域,$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 n 个文字,称形如

$$ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n},a\in P,k_i \text{ 为非负整数} \tag{1}$$

的式子为 n 元单项式. 若干个 n 元单项式的代数和,称为 n 元多项式. 当 $n\geqslant 2$ 时,n 元多项式统称为多元多项式.

注　n 元多项式的全体记为 $P[x_1,x_2,\cdots,x_n]$.

711.　什么叫做 n 元多项式的次数?

答　在第 **710** 条的(1)式中,若 $a\neq 0$,令 $m=k_1+\cdots+k_n$,则称单项式的次数为 m. n 元多项式中各个单项式的次数的最高者,叫做此 n 元多项式的次数. 比如,三元多项式

$$f(x,y,z)=xyz^2-5x^2yz^2+6yz^8$$

的次数就为 9.

注　若在一个多项式中,各单项式的次数都是 m,则称此多项式为 m 次齐次多项式.

712.　什么叫同类项?

答　若 $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$ 和 $bx_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots x_n^{l_n}$ 中,$k_i=l_i,i=1,2,\cdots,n$,则称这两个单项式为同类项.

713.　与第 **450**、**451** 条类似,可定义多元多项式相等、相加、相减、相乘.

714.　什么叫做字典排列法? 什么叫首项?

答　$ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$ 与 $bx_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots x_n^{l_n}$ 为某一个 n 元多项式的两项,当 $k_1=l_1,\cdots,k_i=l_i,k_{i+1}>l_{i+1}(i<n)$时,$ax_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}$ 排在 $bx_1^{l_1}\cdots x_n^{l_n}$ 前

面，这样，在单项式之间就给出了一个先后次序的排法，这种排法称为字典排列法.

在字典排列法中，第一个系数不为零的单项式称为此多元多项式的首项.

注 多元多项式除按字典排列法外，还有按某一文字的降幂排列法，比如，二元多项式

$$f(x,y)=xy^2+2x^2y-2x^2y^2+5x,$$

按字典排列法为

$$f(x,y)=-2x^2y^2+2x^2y+xy^2+5x;$$

按 x 的降幂排列法为

$$f(x,y)=(2y-2y^2)x^2+(5+y^2)x;$$

按 y 的降幂排列法为

$$f(x,y)=(x-2x^2)y^2+(2x^2)y+5x.$$

715. 若 $f(x_1,\cdots,x_n)\neq 0, g(x_1,\cdots,x_n)\neq 0$，则

1) $fg\neq 0$；

2) fg 的首项等于 f 的首项与 g 的首项的乘积.

716. 设多项式 $f(x,y)$ 关于 x 的次数 $\leqslant n$，关于 y 的次数 $\leqslant m$，且存在不同的数 $a_i(i=0,1,2,\cdots,n.)$ 和不同的数 $b_j(j=0,1,2,\cdots,m.)$ 使得

$f(a_i,b_j)=0, i=0,1,2,\cdots,n; j=0,1,2,\cdots,m.$

则 $f(x,y)\equiv 0.$

证 设按 x 的降幂排列法

$$f(x,y)=c_n(y)x^n+c_{n-1}(y)x^{n-1}+\cdots+c_1(y)x+c_0(y),$$

其中 $c_k(y)=0$ 或 $\partial(c_k(y))\leqslant m, k=0,1,2,\cdots,n.$

由假设知

$$f(a_i,b_j)=c_n(b_j)a_i^n+c_{n-1}(b_j)a_i^{n-1}+\cdots+c_1(b_j)a_i+c_0(b_j)$$
$$=0,(i=0,1,2,\cdots,n; j=0,1,2,\cdots,m.)$$

固定 j 把 $c_n(b_j),c_{n-1}(b_j),\cdots,c_0(b_j)$ 看成 $n+1$ 个未知数，对于不同

的 i，由上式即得 $n+1$ 个方程．由于系数是范德蒙行列式不为 0，故 $c_k(b_j)=0$．　$(k=0,1,2,\cdots,n.)$

再固定 k，由 $c_k(b_j)=0, j=0,1,2,\cdots m$ 知 $c_k(y)=0$ 有 $m+1$ 个不同的根，故

$$c_k(y)\equiv 0, \qquad (k=0,1,2,\cdots,n.)$$

$$\therefore \quad f(x,y)\equiv 0.$$

二、 对称多项式

717. 什么叫做对称多项式？

答 若 n 元多项式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 对于任意的 $i,j(1\leqslant i<j\leqslant n)$，都有

$$f(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_j,\cdots,x_n)=f(x_1,\cdots,x_j,\cdots,x_i,\cdots,x_n),$$

则称此多项式为对称多项式．

718. 什么叫做初等对称多项式？

答 下列 n 个 n 元对称多项式

$$\begin{cases}\sigma_1=x_1+x_2+\cdots+x_n,\\ \sigma_2=x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \sigma_n=x_1x_2\cdots x_n\end{cases} \tag{1}$$

称为初等对称多项式．

719. 什么是对称多项式基本定理？

答 对称多项式基本定理即：对于任意一个 n 次对称多项式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 有唯一相应的 n 元多项式 $\varphi(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，使得

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\varphi(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n),$$

其中 $\sigma_1,\cdots,\sigma_n$ 为初等对称多项式．

注 用初等多项式表示对称多项式的常用方法有消去首项法、待定系数法、公式法．

720. 什么叫做牛顿(Newton)公式？

答 牛顿公式即：设 $s_k=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k, k=0,1,2,\cdots$，当 $k\leqslant n$ 时，有

$$s_k-\sigma_1 s_{k-1}+\sigma_2 s_{k-2}+\cdots+(-1)^{k-1}\sigma_{k-1}s_1+(-1)^k k\sigma_k=0;$$

当 $k>n$ 时，有

$$s_k-\sigma_1 s_{k-1}+\cdots+(-1)^n\sigma_n s_{k-n}=0.$$

721. 用初等对称多项式表示对称多项式

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_2+x_3).$$

解 1 消去首项法. 由于 $f(x_1,x_2,x_3)$的首项为 $x_1^2x_2$，对应的指数组为(2,1,0)，作 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ 的幂积

所以 $$\varphi_1=\sigma_1^{2-1}\sigma_2^{1-0}\sigma_3^0=\sigma_1\sigma_2,$$

$$f_1=f-\varphi_1=(x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_2+x_3)-\sigma_1\sigma_2$$
$$=-x_1x_2x_3=-\sigma_3.$$

故得 $$f=\varphi_1+f_1=\sigma_1\sigma_2-\sigma_3.$$

解 2 待定系数法. 由于 f 的首项为 $x_1^2x_2$，写出相应的初等多项式的幂积，即

表 9-1

可能的指数组	幂积
(2,1,0)	$\sigma_1\sigma_2$
(1,1,1)	σ_3

设 $$f(x_1,x_2,x_3)=\sigma_1\sigma_2+a\sigma_3.$$

令 $x_1=2,x_2=-1,x_3=-1$，于是有 $f=-2,\sigma_1=0,\sigma_3=2$，代入上式解得 $a=-1$. 故得

$$f=\sigma_1\sigma_2-\sigma_3.$$

解 3 $$f=(x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_2+x_3)$$
$$=(x_1^2+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)(x_2+x_3)$$
$$=(x_1^2+\sigma_2)(\sigma_1-x_1)$$

$$=\sigma_1\sigma_2-x_1(x_1^2+\sigma_2-x_1\sigma_1)$$

$$=\sigma_1\sigma_2-x_1x_2x_3=\sigma_1\sigma_2-\sigma_3.$$

722. 用初等对称多项式表示 n 元对称多项式

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum x_1^2+\sum x_1^2x_2.$$

解 设 $f=f_1+f_2$，其中

$$f_1=\sum x_1^2=(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2-2(x_1x_2+\cdots+x_{n-1}x_n)$$

$$=\sigma_1^2-2\sigma_2,$$

$$f_2=\sum x_1^2x_2.$$

用初等对称多项式表示 f_2：　　表 9-2

可能的指数组	幂积
$(2,1,0,0,\cdots,0)$	$\sigma_1\sigma_2$
$(1,1,1,0,\cdots,0)$	σ_3

设　$f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sigma_1\sigma_2+a\sigma_3$，

令 $x_1=x_2=x_3=1,x_4=\cdots=x_n=0$，代入上式解得 $a=-2$. 所以 $f_2=\sigma_1\sigma_2-2\sigma_3$. 故 $f=\sigma_1^2-2\sigma_2+\sigma_1\sigma_2-2\sigma_3$.

723. 设 a_1,a_2,a_3 是方程 $5x^3-6x^2+7x-8=0$ 的三个根，计算

$$(a_1^2+a_1a_2+a_2^2)(a_2^2+a_2a_3+a_3^2)(a_1^2+a_1a_3+a_3^2).$$

解 由根与系数的关系知

$$\sigma_1=a_1+a_2+a_3=\frac{6}{5},$$

$$\sigma_2=a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3=\frac{7}{5},$$

$$\sigma_3=a_1a_2a_3=\frac{8}{5}.$$

故　$(a_1^2+a_1a_2+a_2^2)(a_2^2+a_2a_3+a_3^2)(a_1^2+a_1a_3+a_3^2)$

$$=\sigma_1^2\sigma_2^2-\sigma_1^3\sigma_3-\sigma_2^3=-\frac{1679}{625}.$$

724. 三次方程 $x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$ 的三个根成等差数列的充分必要条件是 $2a_1^3-9a_1a_2+27a_3=0$.

证 设方程的三个根为 x_1,x_2,x_3,则它们成等差数列的充分必要条件是

$$(2x_1-x_2-x_3)(2x_2-x_1-x_3)(2x_3-x_1-x_2)=0.$$

将左边的对称多项式表成初等多项式,得

$$(2x_1-x_2-x_3)(2x_2-x_1-x_3)(2x_3-x_1-x_2)$$
$$=2\sigma_1^3-9\sigma_1\sigma_2+27\sigma_3=-2a_1^3+9a_1a_2-27a_3.$$

所以方程的三个根成等差数列的充分必要条件是 $2a_1^3-9a_1a_2+27a_3=0$.

注 这一结果与第 **656** 条一致,但证明方法不同.

725. 设 $xyz\neq0, x+y+z=0$,则

$$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}+\frac{z}{x}+\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{z}=-3. \tag{1}$$

证 设 $\begin{cases}\sigma_1=x+y+z,\\ \sigma_2=xy+xz+yz,\\ \sigma_3=xyz.\end{cases}$ 那么

$$(1)\text{式左边}=\frac{y^2z+x^2z+yz^2+x^2y+xz^2+xy^2}{xyz}$$
$$=\frac{\sigma_1\sigma_2-3\sigma_3}{\sigma_3}=-3.$$

726. 若 n 次多项式 $f(x)$ 的根为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,而数 c 不是 $f(x)$ 的根,则

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i-c}=-\frac{f'(c)}{f(c)}.$$

证 由泰勒公式知

$$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(c_1)}{n!}(x-c)^n,$$

其中 c_1 在 x_1 和 c 之间. 令 $x=c+y$,则

$$g(y)=f(c+y)=f(c)+f'(c)y+\frac{f''(c)}{2!}y^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(c_1)}{n!}y^n.$$

由于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 $f(x)$的根,故

$$y_1=x_1-c,y_2=x_2-c,\cdots,y_n=x_n-c$$

是 $g(y)$的根. 设 $\sigma_1,\cdots,\sigma_n$ 为 $y_1,\cdots,y_n$ 的初等对称多项式,由根与系数的关系,并注意 $f^{(n)}(c)=n!$,得

$$\sigma_{n-1}=(-1)^{n-1}f'(c),\sigma_n=(-1)^nf(c).$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i-c}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{y_i}=\frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_n}=\frac{(-1)^{n-1}f'(c)}{(-1)^nf(c)}$$

$$=-\frac{f'(c)}{f(c)}.$$

727. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是方程 $x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$ 的根,则 $x_2,\cdots,x_n$ 的对称多项式可以表成 x_1 与 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的多项式.

证 设 $f(x_2,\cdots,x_n)$是关于 $x_2,\cdots,x_n$ 的任意一个对称多项式,由第 719 条有

$$f(x_2,\cdots,x_n)=g(\sigma'_1,\cdots,\sigma'_{n-1}),\tag{1}$$

其中 $\sigma'_i(i=1,2,\cdots,n-1)$是 $x_2,\cdots,x_n$ 的初等对称多项式. 由于

$$\begin{cases}\sigma'_1=\sigma_1-x_1,\\ \sigma'_i=\sigma_i-x_1\sigma'_{i-1}\quad(i=2,\cdots,n-1),\end{cases}$$

其中 σ_i 为 $x_1,\cdots,x_n$ 的初等对称多项式,又 $\sigma_i=(-1)^ia_i(i=1,2,\cdots,n-1)$,所以 σ'_i 是关于 $x_1,a_1,\cdots,a_{n-1}$的多项式,不妨记

$$\sigma'_i=h_i(x_1,a_1,\cdots,a_n)\qquad(i=1,\cdots,n-1).$$

将其代入(1)式右端,即知 $f(x_2,\cdots,x_n)$可表成 x_1 与 $a_1,\cdots,a_n$ 的多项式.

728. 设 $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)=x^n-\sigma_1x^{n-1}+\cdots+(-1)^n\sigma_n,s_k=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k\quad(k=0,1,2,\cdots)$,则

1) $x^{k+1}f'(x)=(s_0x^k+s_1x^{k-1}+\cdots+s_{k-1}x+s_k)f(x)+g(x)$,

其中 $g(x)$的次数$<n$;

2) 由 1)可证得第 **720** 条即牛顿公式.

证 1)由假设可得 $f'(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{f(x)}{x-x_i}$,

$$x^{k+1}f'(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{x^{k+1}}{x-x_i}f(x)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{x^{k+1}-x_i^{k+1}}{x-x_i}f(x)+\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{k+1}}{x-x_i}f(x)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}(x^k+x_ix^{k-1}+\cdots+x_i^k)f(x)+g(x),$$

其中 $g(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{k+1}}{x-x_i}f(x)$是次数$<n$ 的多项式,因此

$$x^{k+1}f'(x)=(s_0x^k+s_1x^{k-1}+\cdots+s_{k-1}x+s_k)f(x)+g(x).$$

2) 由于 $f(x)=x^n-\sigma_1x^{n-1}+\cdots+(-1)^n\sigma_n$,故

$$x^{k+1}f'(x)=x^{k+1}[nx^{n-1}-(n-1)\sigma_1x^{n-2}+\cdots+(-1)^{n-1}\sigma_{n-1}],$$

由 1)可得

$$x^{k+1}[nx^{n-1}-(n-1)\sigma_1x^{n-2}+\cdots+(-1)^{n-1}\sigma_{n-1}]$$
$$=(s_0x^k+s_1x^{k-1}+\cdots+s_{k-1}x+s_k)f(x)+g(x). \qquad (1)$$

当 $k\leqslant n$ 时,比较(1)式两端 x^n 的系数,由于 $\partial(g(x))<n$,得

$$(-1)^k(n-k)\sigma_k=s_k-\sigma_1s_{k-1}+\cdots+(-1)^{k-1}\sigma_{k-1}s_1+(-1)^k\sigma_ks_0,$$

$$\therefore\ s_k-\sigma_1s_{k-1}+\cdots+(-1)^{k-1}\sigma_{k-1}s_1+(-1)^kk\sigma_k=0.$$

当 $k>n$ 时,由于(1)式左端 x^n 的系数为 0,故

$$s_k-\sigma_1s_{k-1}+\cdots+(-1)^n\sigma_ns_{k-n}=0.$$

729. 根据第 **720** 条牛顿公式,用初等对称多项式表示 s_2,s_3,s_4,s_5,s_6.

解 1) 当 $n\geqslant6$ 时,

$$s_2=\sigma_1^2-2\sigma_2,$$
$$s_3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3,$$

$$s_4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+4\sigma_1\sigma_3+2\sigma_2^2-4\sigma_4,$$

$$s_5=\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1^2\sigma_3+5\sigma_1\sigma_2^2-5\sigma_1\sigma_4-5\sigma_2\sigma_3+5\sigma_5,$$

$$s_6=\sigma_1^6-6\sigma_1^4\sigma_2+6\sigma_1^3\sigma_3+9\sigma_1^2\sigma_2^2-6\sigma_1^2\sigma_4-2\sigma_2^3$$
$$+3\sigma_3^2+6\sigma_2\sigma_4+6\sigma_1\sigma_5-12\sigma_1\sigma_2\sigma_3-6\sigma_6.$$

2）当 $n=5$ 时，s_2,s_3,s_4,s_5 同 1），

$$s_6=\sigma_1^6-6\sigma_1^4\sigma_2+6\sigma_1^3\sigma_3+9\sigma_1^2\sigma_2^2-6\sigma_1^2\sigma_4$$
$$-12\sigma_1\sigma_2\sigma_3+6\sigma_1\sigma_5-2\sigma_2^3+6\sigma_2\sigma_4+3\sigma_3^2.$$

3）当 $n=4$ 时，s_2,s_3,s_4 同 1），

$$s_5=\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1^2\sigma_3+5\sigma_1\sigma_2^2-5\sigma_1\sigma_4-5\sigma_2\sigma_3,$$

$$s_6=\sigma_1^6-6\sigma_1^4\sigma_2+6\sigma_1^3\sigma_3+9\sigma_1^2\sigma_2^2-6\sigma_1^2\sigma_4$$
$$-12\sigma_1\sigma_2\sigma_3-2\sigma_2^3+6\sigma_2\sigma_4+3\sigma_3^2.$$

4）当 $n=3$ 时，s_2,s_3 同 1），

$$s_4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+4\sigma_1\sigma_3+2\sigma_2^2,$$

$$s_5=\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1^2\sigma_3+5\sigma_1\sigma_2^2-5\sigma_2\sigma_3,$$

$$s_6=\sigma_1^6-6\sigma_1^4\sigma_2+6\sigma_1^3\sigma_3+9\sigma_1^2\sigma_2^2-12\sigma_1\sigma_2\sigma_3-2\sigma_2^3+3\sigma_3^2.$$

5）当 $n=2$ 时，s_2 同 1），

$$s_3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2,$$

$$s_4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2,$$

$$s_5=\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1\sigma_2^2,$$

$$s_6=\sigma_1^6-6\sigma_1^4\sigma_2+9\sigma_1^2\sigma_2^2-2\sigma_2^3.$$

730. 如果对于某一个 6 次方程有 $s_1=s_3=0$，那么

$$\frac{s_7}{7}=\frac{s_5}{5}\cdot\frac{s_2}{2}.$$

证 这时 $n=6$. $s_1=s_3=0$，即有 $\sigma_1=\sigma_3=0$. 由第 **729** 条可得 $s_2=-2\sigma_2$，故 $s_5=5\sigma_5$. 由第 **720** 条 $s_7=-7\sigma_2\sigma_5$. 所以，

$$\frac{s_7}{7}=-\sigma_2\sigma_5=\frac{s_5}{5}\cdot\frac{s_2}{2}.$$

731. 求一个 n 次方程，使 $s_1=s_2=\cdots=s_{n-1}=0$.

解　设此方程为 $x^n-\sigma_1x^{n-1}+\cdots+(-1)^n\sigma_n=0$. 由第 **720** 条及 $s_1=s_2=\cdots=s_{n-1}=0$ 得 $\sigma_1=\sigma_2=\cdots=\sigma_{n-1}=0$. 故所求方程为 $x^n+(-1)^n\sigma_n=0$，亦即 $x^n+a=0$.

732.　求一个 n 次方程，使 $s_2=s_3=\cdots=s_n=0$.

解　设此方程为 $x^n-\sigma_1x^{n-1}+\cdots+(-1)^n\sigma_n=0$. 由于 $s_2=s_3=\cdots=s_n=0$，由第 **720** 条($k\leqslant n$)可得

$$\sigma_k=\frac{\sigma_{k-1}\sigma_1}{k},(k=2,3,\cdots,n.)$$

由此递推得 $\sigma_k=\frac{\sigma_1^k}{k!}$，$(k=2,3,\cdots,n)$. 故所求方程为

$$x^n-\sigma_1x^{n-1}+\frac{\sigma_1^2}{2!}x^{n-2}+\cdots+(-1)^n\frac{\sigma_1^n}{n!}=0.$$

三、　二次型的定义

733.　什么叫做二次型？

答　设 P 是一数域，系数在数域 P 中的 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的二次齐次多项式

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

称为数域 P 上的一个 n 元二次型，简称二次型.

注　① 二次型可表为矩阵形式，即 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X'AX$，其中 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$，$A=A'=(a_{ij})_{n\times n}$，并称对称矩阵 A 为二次型的矩阵，秩 A 称为二次型的秩.

② 当 P 是实数域时，称 f 为实二次型；当 P 是复数域时，称 f 为复二次型.

734.　设二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的矩阵为 n 阶三对角对称矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & & & 0 \\ -1 & 1 & -1 & & \\ & -1 & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

试写出二次型(二次齐次多项式)的表示式.

解 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2-2x_1x_2-2x_2x_3-\cdots-2x_{n-1}x_n$.

735. 设二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum\limits_{i=1}^{n}x_ix_{n-i+1}$,写出二次型 f 的矩阵.

解 设二次型 f 的矩阵为 A,当 $n=2m$ 时,

$$A=\begin{bmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & \ddots & \\ b & & & & & a \end{bmatrix};$$

当 $n=2m+1$ 时,

$$A=\begin{bmatrix} a & & & & & & b \\ & \ddots & & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & & a & & b & & \\ & & & a+b & & & \\ & & b & & a & & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & & \ddots & \\ b & & & & & & a \end{bmatrix}.$$

736. 证明实二次型 $f=\sum\limits_{i=1}^{m}(\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j)^2$ 的秩等于矩阵 $A=$

$(a_{ij})_{m\times n}$的秩.

证 令 $y_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j(i=1,2,\cdots,m)$, $Y=(y_1,y_2,\cdots,y_m)'$, $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$, 则 $Y=AX$, 而

$$f=\sum_{i=1}^{m}y_i^2=Y'Y=X'A'AX.$$

因此,二次型 f 的矩阵是 $A'A$, 而秩$(A'A)=$秩(A), 所以 f 的秩等于秩 A.

四、 二次型的标准形

737. 什么叫二次型的标准形?

答 二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)$经过非退化线性替换所变成的平方和 $d_1y_1^2+\cdots+d_ny_n^2$ 称为它的标准形.

738. 数域 P 上任意一个二次型都可以经过非退化的线性替换化为标准形.

注 ① 用矩阵语言叙述为:任意对称矩阵 A 都合同于对角矩阵,即存在可逆矩阵 T,使 $T'AT=\mathrm{diag}(d_1,\cdots,d_r,0,\cdots,0)$,其中 $r=$秩(A), $d_1\cdots d_r\neq 0$.

② 二次型的标准形不是唯一的.

739. 什么叫做规范形?

答 二次型的规范形一般指两种:

1) 在复数域 C 中,下列二次型

$$f(x_1,\cdots,x_n)=d_1x_1^2+\cdots+d_nx_n^2,$$

其中 $d_i=0$ 或 1 $(i=1,2,\cdots,n)$称为规范形.

2) 在实数域 R 中,下列二次型

$$f(x_1,\cdots,x_n)=d_1x_1^2+\cdots+d_nx_n^2,$$

其中 $d_i=0,1$ 或 $-1(i=1,2,\cdots,n)$称为规范形.

740. 任意一个复二次型都可以经过非退化线性替换变成规

范形，且规范形是唯一的.

注　用矩阵语言叙述为：对于任何复对称矩阵 A，都存在可逆矩阵 T，使 $T'AT=\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，其中 $r=$ 秩 A.

741.　设 A,B 是两个复 n 阶对称矩阵，则 A 与 B 合同 $\Longleftrightarrow$ 秩 $A=$ 秩 B.

证　必要性　因为 A 与 B 合同，即存在可逆矩阵 P 使得 $A=P'BP$，故秩 $A=$ 秩 B.

充分性　设秩 $A=$ 秩 $B=r$，则 A 合同于 $\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，$B$ 合同于 $\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，由合同的对称性与传递性知 A 合同于 B.

742.　什么叫惯性定理？

答　惯性定理是：对于任意一个实二次型，都可经过非退化的实线性替换变为规范形，规范形是唯一的.

注　① 用矩阵语言叙述为：设 A 是 n 阶实对称矩阵，则存在实可逆矩阵 T，使

$$T'AT=\begin{bmatrix} E_s & & \\ & -E_t & \\ & & 0 \end{bmatrix},$$

其中 s 是 A 的正特征值的个数，t 是 A 的负特征值的个数，$s+t=$ 秩(A). 因此，s,t 都是由 A 唯一确定的.

② 上面的 s 称为正惯性指数，它也等于实二次型标准形中系数为正的项数；上面的 t 称为负惯性指数，它也等于实二次型标准形中系数为负的项数.

③ $s-t$ 称为符号差.

743.　将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=4x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3+3x_3^2$ 化为标准形，并写出相应的非退化线性替换.

解 1 配方法.

$$f=3[x_3^2-2x_3(\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2)+(\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2)^2]-\frac{1}{3}x_1^2-\frac{1}{3}x_2^2+\frac{10}{3}x_1x_2$$

$$=3(x_3-\frac{1}{3}x_1-\frac{1}{3}x_2)^2-\frac{1}{3}(x_2^2-10x_1x_2+25x_1^2)+8x_1^2$$

$$=3(-\frac{1}{3}x_1-\frac{1}{3}x_2+x_3)^2-\frac{1}{3}(x_2-5x_1)^2+8x_1^2.$$

令 $\begin{cases} y_1=-\frac{1}{3}x_1-\frac{1}{3}x_2+x_3, \\ y_2=-5x_1+x_2, \\ y_3=x_1, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_1=y_3, \\ x_2=y_2+5y_3, \\ x_3=y_1+\frac{1}{3}y_2+2y_3, \end{cases}$

则二次型化为标准形 $f=3y_1^2-\frac{1}{3}y_2^2+8y_3^2$.

解 2 初等变换法. 对矩阵 $\begin{bmatrix} A \\ E \end{bmatrix}$ 的列、行作同步初等变换(即设 T_1 为初等矩阵,则用 T_1' 与 T_1 左、右乘 A),将 A 化为对角矩阵,即

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & \frac{1}{3} & 2 \end{bmatrix}.$$

于是,非退化线性替换

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & \frac{1}{3} & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

将二次型化为标准形 $f=3y_1^2-\frac{1}{3}y_2^2+8y_3^2$.

解 3　特征值法．　设二次型矩阵为 A，则 $|\lambda E-A|=(\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda+2)$. 故 A 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=4,\lambda_3=-2$. 分别求出属于 $\lambda_1=1,\lambda_2=4,\lambda_3=-2$ 的一个特征向量 $\alpha_1=(1,1,1)',\alpha_2=(1,1,-2)',\alpha_3=(1,-1,0)'$. 将它们正交单位化，由于 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 两两正交，故将它们单位化即可．

$\beta_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)',\beta_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)',\beta_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)'$. 于是，正交替换

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$$

将二次型化为标准形 $f=y_1^2+4y_2^2-2y_3^2$.

注　由此可见，二次型的标准形不唯一．

744.　用非退化线性替换化下列二次型为标准形（并写出相应的非退化线性替换）：

1) $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j$；

2) $\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$，其中 $\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$.

解　1) 设原式为 f，经过展开配方整理得

$$f=(x_1+\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n}x_j)^2+\frac{3}{4}(x_2+\frac{1}{3}\sum_{j=3}^{n}x_j)^2+\cdots\cdots$$
$$+\frac{n}{2(n-1)}(x_{n-1}+\frac{1}{n}x_n)^2+\frac{n+1}{2n}x_n^2.$$

令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n} x_j, \\ y_2 = x_2 + \frac{1}{3}\sum_{j=3}^{n} x_j, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{n-1} = x_{n-1} + \frac{1}{n} x_n, \\ y_n = x_n, \end{cases}$$

则非退化线性替换

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{3}y_3 - \cdots\cdots - \frac{1}{n-1}y_{n-1} - \frac{1}{n}y_n, \\ x_2 = y_2 - \frac{1}{3}y_3 - \cdots\cdots - \frac{1}{n-1}y_{n-1} - \frac{1}{n}y_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1} = y_{n-1} - \frac{1}{n}y_n, \\ x_n = y_n, \end{cases}$$

将二次型 f 化为标准形

$$f = y_1^2 + \frac{3}{4}y_2^2 + \cdots\cdots + \frac{n}{2(n-1)}y_{n-1}^2 + \frac{n+1}{2n}y_n^2.$$

2）令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - \bar{x}, \\ y_2 = x_2 - \bar{x}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{n-1} = x_{n-1} - \bar{x}, \\ y_n = x_n, \end{cases}$$

则

$$\begin{cases} x_1 \quad = 2y_1 + \sum\limits_{i=2}^{n} y_i, \\ x_2 \quad = y_1 + 2y_2 + \sum\limits_{i=3}^{n} y_i, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1} = \sum\limits_{i=1}^{n-2} y_i + 2y_{n-1} + y_n, \\ x_n \quad = y_n. \end{cases}$$

注意到$\sum\limits_{i=1}^{n} y_i = \bar{x}$，故原式

$$\begin{aligned} f &= \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 + (y_n - \sum_{i=1}^{n} y_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 + (\sum_{i=1}^{n-1} y_i)^2 \\ &= 2(\sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n-1} y_i y_j). \end{aligned}$$

由 1)知，线性替换

$$\begin{cases} y_1 \quad = z_1 - \frac{1}{2} z_2 - \frac{1}{3} z_3 - \cdots\cdots - \frac{1}{n-1} z_{n-1}, \\ y_2 \quad = z_2 - \frac{1}{3} z_3 - \cdots\cdots - \frac{1}{n-1} z_{n-1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{n-1} = z_{n-1}, \\ y_n \quad = z_n, \end{cases}$$

将二次型 f 化为标准形

$$f = 2z_1^2 + \frac{3}{2} z_2^2 + \cdots\cdots + \frac{n}{n-1} z_{n-1}^2.$$

由 1)、2)可得所用非退化线性替换为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} & 0 & \cdots\cdots & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{4}{3} & \cdots\cdots & 0 & 1 \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots & & \cdots\cdots & \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots\cdots & \frac{n}{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{bmatrix}.$$

745.　已知二次型 $f=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3(a>0)$ 通过正交替换化为标准形 $f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$，求出参数 a 和相应的正交矩阵.

解　二次型矩阵为

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & a \\ 0 & a & 3 \end{bmatrix}.$$

因 $|\lambda E-A|=(\lambda-2)(\lambda^2-6\lambda+9-a^2)=0$. 已知 A 的特征值 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=5$. 将 $\lambda_1=1$ 代入上式，解得 $a^2=4$. 所以 $a=\pm 2$. 由 $a>0$ 得 $a=2$.

分别求出属于特征值 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=5$ 的特征向量

$$\alpha_1=(0,1,-1)',\alpha_2=(1,0,0)',\alpha_3=(0,1,1)'.$$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 两两正交，再单位化得正交矩阵

$$Q=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

746.　设 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4$，分别在实数和复数域上将它化为规范形，并写出相应的非退

化线性替换.

解 令

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix},$$

则二次型化为标准形 $f=y_1^2-\frac{1}{4}y_2^2-y_3^2-\frac{3}{4}y_4^2$.

1) 在实数域上,令

$y_1=z_1, y_2=2z_2, y_3=z_3, y_4=\frac{2\sqrt{3}}{3}z_4$,则二次型的规范形为

$$f=z_1^2-z_2^2-z_3^2-z_4^2$$

非退化线性替换为 $X=C_1Z$,其中

$$C_1=\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 1 & 1 & -1 & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}.$$

2) 在复数域上，令

$$y_1=z_1, y_2=2iz_2, y_3=iz_3, y_4=\frac{2\sqrt{3}}{3}iz_4,$$

则二次型的规范形为

$$f=z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2.$$

非退化线性替换为 $X=C_2Z$，其中

$$C_2=\begin{bmatrix}1 & -i & -i & -\frac{\sqrt{3}}{3}i\\ 1 & i & -i & -\frac{\sqrt{3}}{3}i\\ 0 & 0 & i & -\frac{\sqrt{3}}{3}i\\ 0 & 0 & 0 & \frac{2\sqrt{3}}{3}i\end{bmatrix}.$$

747. 设

$$A=\begin{bmatrix}0 & a & b\\ a & 0 & c\\ b & c & 0\end{bmatrix},$$

试求可逆矩阵 T，使 $T'AT$ 为对角矩阵.

解 设以 A 为矩阵的二次型是

$$f(x_1,x_2,x_3)=X'AX=2ax_1x_2+2bx_1x_3+2cx_2x_3.$$

当 $a=b=c=0$ 时，$A=0$，$T=E$ 即为所求.

当 a,b,c 不全为零时，不妨设 $a\neq0$，令

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix},$$

则

$$f=2ay_1^2-2ay_2^2+(2b+2c)y_1y_3+(2b-2c)y_2y_3$$

$$=2a\left(y_1+\frac{b+c}{2a}y_3\right)^2-2a\left(y_2-\frac{b-c}{2a}y_3\right)^2-\frac{2bc}{a}y_3^2.$$

令

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{b+c}{2a} \\ 0 & 1 & \frac{b-c}{2a} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix},$$

则二次型化为标准形 $f=2az_1^2-2az_2^2-\frac{2bc}{a}z_3^2$. 可逆矩阵

$$T=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{b+c}{2a} \\ 0 & 1 & \frac{b-c}{2a} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{c}{a} \\ 1 & -1 & -\frac{b}{a} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

使 $T'AT=\text{diag}\left(2a,-2a,-\frac{2bc}{a}\right)$.

748. 秩等于 r 的对称矩阵可以表成 r 个秩等于 1 的对称矩阵之和.

证 因对称矩阵 A 的秩为 r，于是存在可逆矩阵 C，使

$$C'AC=\begin{bmatrix} d_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & d_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}=D_1+D_2+\cdots\cdots+D_r.$$

这里，$D_i(i=1,2,\cdots,r)$表示主对角线上第 i 个元素为 d_i，其余元素为零的对角矩阵. 由此，得

$$A=(C^{-1})'D_1C^{-1}+(C^{-1})'D_2C^{-1}+\cdots\cdots+(C^{-1})'D_rC^{-1}.$$

显然，$(C^{-1})'D_iC^{-1}$的秩为 1，且为对称矩阵，故 A 可表成 r 个秩为 1 的对称矩阵之和.

749. 确定实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_{2n})=x_1x_2+x_3x_4+\cdots\cdots+x_{2n-1}x_{2n}$的秩和符号差.

解 作非退化线性替换

$$\begin{cases} x_1 = y_1+y_2, \\ x_2 = y_1-y_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{2n-1} = y_{2n-1}+y_{2n}, \\ x_{2n} = y_{2n-1}-y_{2n}, \end{cases}$$

则二次型 $f=y_1^2-y_2^2+\cdots\cdots+y_{2n-1}^2-y_{2n}^2$，故其秩为 $2n$，符号差为零.

750. 确定实二次型 $f(x,y,z)=ayz+bzx+cxy$ 的秩和符号差.

解 1）当 $a>0$ 时，

① $bc=0$，由第 **747** 条知秩为 2，符号差为 0；

② 当 $bc>0$ 时，秩为 3，符号差为 -1；

③ 当 $bc<0$ 时，秩为 3，符号差为 1.

2）当 $a<0$ 时，

① 当 $bc=0$ 时，秩为 2，符号差为 0；

② 当 $bc>0$ 时，秩为 3，符号差为 1；

③ 当 $bc<0$ 时，秩为 3，符号差为 -1.

3）当 $a=0$ 时，

① $b=0=c$，秩为 0，符号差为 0；

② 其它情况都可得到秩为 2，符号差为 0.

综上所述，当 $abc>0$ 时，秩为 3，符号差为 -1；当 $abc<0$ 时，秩为 3，符号差为 1；当 $a=b=c=0$ 时，秩和符号差均为 0；当 $abc=0$，但 a,b,c 不全为 0 时，秩为 2，符号差为 0.

751. 设 $A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}$ 是一对称矩阵，且 $|A_{11}|\neq 0$，则存在 $T=\begin{pmatrix}E & X\\ 0 & E\end{pmatrix}$ 使 $T'AT=\begin{pmatrix}A_{11} & 0\\ 0 & *\end{pmatrix}$，其中 $*$ 表示阶数与 A_{22} 相同的矩阵.

证 取 $T=\begin{pmatrix}E & -A_{11}^{-1}A_{12}\\ 0 & E\end{pmatrix}$，则

$$T'AT=\begin{pmatrix}A_{11} & 0\\ 0 & A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\end{pmatrix}.$$

五、 实二次型合同的充要条件

752. 实对称矩阵的特征值均为实数.

753. 实对称矩阵的属于不同特征值的特征向量必正交.

754. 设 A 是实对称矩阵，则存在正交矩阵 T，使 $T'AT=T^{-1}AT=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的特征值.

令 $T=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，则 $A\alpha_i=\lambda_i\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$，即 α_i 为 A 属于 λ_i 的一个特征向量.

注：特别存在 n 维列向量 $\beta_i\neq 0$，使 $\beta'_iA\beta_i=\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$. 实际上，取单位特征向量 β_i，即 $A\beta_i=\lambda_i\beta_i$. 再用 β'_i 乘等式两边，即证 $\beta'_iA\beta_i=\lambda_i$.

755. 设 A,B 都是实对称矩阵，且

$$A\equiv\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_s,-\lambda_{s+1},\cdots,-\lambda_r,0,\cdots,0),$$

$$B\equiv\mathrm{diag}(\mu_1,\cdots,\mu_t,-\mu_{t+1},\cdots,-\mu_p,0,\cdots,0),$$

其中 $\lambda_i>0\ (i=1,2,\cdots,r)$，$\mu_j>0\ (j=1,2,\cdots,p)$，则 $A\equiv B\Longleftrightarrow s=t$ 且 $r=p$.（$\equiv$表示合同）.

证 因为 A,B 都是实对称矩阵，由惯性定理可证。

注 ① 设实对称矩阵 A 和 B 的正惯性指数分别为 s_1,s_2，负惯性指数分别为 t_1,t_2，则 A 合同于 $B \Longleftrightarrow s_1=s_2,t_1=t_2$.

② 设 A,B 是实对称矩阵，则 A 合同于 $B \Longleftrightarrow A$ 与 B 有相同个数的正特征值，且 A 和 B 有相同个数的负特征值.

756. n 阶单位矩阵 E 与 $-E$ 在实数域上不合同，而在复数域上合同.

证 E 的正惯性指数为 n，$-E$ 的正惯性指数为 0，故 E 和 $-E$ 在实数域上不合同.

在复数域上，秩 E＝秩$(-E)=n$，故 E 与 $-E$ 合同.

757. 证明

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} 与 \begin{bmatrix} \lambda_{i_1} & & & \\ & \lambda_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{i_n} \end{bmatrix}$$

合同，其中 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列.

证 设两个矩阵分别为 A,B，其相应的二次型分别为

$$f_A=\lambda_1 x_1^2+\lambda_2 x_2^2+\cdots\cdots+\lambda_n x_n^2,$$

$$f_B=\lambda_{i_1} y_1^2+\lambda_{i_2} y_2^2+\cdots\cdots+\lambda_{i_n} y_n^2.$$

作非退化线性替换

$$y_t=x_{i_t},t=1,2,\cdots,n,$$

则 f_B 化成 f_A. 因此，A,B 合同.

758. 设 $A=\begin{bmatrix} B & C \\ C & B \end{bmatrix}$，其中 $B=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. $f(x)$是实系数多项式，证明：在实数域上存在实数 λ_1,λ_2 和 4 阶方阵 B_1,B_2，使得

1) $f(A)=\lambda_1 B_1+\lambda_2 B_2$;

2) $B_1B_2=B_2B_1=0$;

3) $B_1^2=B_1, B_2^2=B_2$.

证　$(\lambda E-A)=(\lambda-1)^3(\lambda+3)$，而 A 为实对称阵，故存在正交阵 T，使 $T'AT=\mathrm{diag}(1,1,1,-3)$. 那么

$$T'f(A)T=\mathrm{diag}(f(1),f(1),f(1),f(-3))$$

$$=f(1)\mathrm{diag}(1,1,1,0)+f(-3)\mathrm{diag}(0,0,0,1)$$

令 $B_1=T\mathrm{diag}(1,1,1,0)T'$，$B_2=T\mathrm{diag}(0,0,0,1)T'$. $\lambda_1=f(1)$，$\lambda_2=f(-3)$.

则　$f(A)=\lambda_1B_1+\lambda_2B_2, B_1^2=B_1, B_2^2=B_2, B_1B_2=B_2B_1=0.$

759.　设 A,B,C,D 为 n 阶对称矩阵，A 合同于 B，C 合同于 D. 试问下列结论是否正确？为什么？

1) $(A+C)$ 合同于 $(B+D)$；

2) $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$ 合同于 $\begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}$.

解　1) 不正确. 例如，在复数域上，取 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$，$D=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$，则 A 与 B 合同，C 与 D 合同，但是 $A+C$ 与 $B+D$ 不合同.

2) 正确. 因 $B=Q'_1AQ_1$，$D=Q'_2CQ_2$，取可逆矩阵 $\begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix}$，则

$$\begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix}'\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix}.$$

760.　设分块矩阵 $M=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ 是对称矩阵，其中 D 为非奇异矩阵，则矩阵 M 合同于矩阵

$$N=\begin{bmatrix} A-BD^{-1}C & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}.$$

证 由 $M'=M$ 知，$A'=A, B'=C, D'=D$. 令矩阵

$$P=\begin{bmatrix} E & 0 \\ D^{-1}C & E \end{bmatrix},$$

则

$$P'MP=\begin{bmatrix} A-BD^{-1}C & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix},$$

即矩阵 M 与 N 合同.

761. n 阶矩阵是反对称矩阵的充分必要条件是：对任意 n 维列向量 X，都有

$$X'AX=0.$$

证 必要性 若 $A'=-A$，则对任意 X 有

$$X'AX=(X'AX)'=X'A'X=-X'AX,$$

移项后，可得

$$X'AX=0.$$

充分性 若对任意 X 有 $X'AX=0$，设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，e_i 表示第 i 个分量为 1 其余分量为零的 n 维列向量，取 $X=e_i+e_j$，则

$$(e_i+e_j)'A(e_i+e_j)=0,$$

即

$$a_{ii}+a_{jj}+a_{ij}+a_{ji}=0.$$

当 $i=j$ 时，得 $a_{ii}=a_{jj}=0$；当 $i\neq j$ 时，得 $a_{ij}=-a_{ji}$，故 A 是反对称矩阵.

762. 如果 n 阶对称矩阵 A 对任意 n 维列向量 X 都有 $X'AX=0$，那么 $A=0$.

证 因为 $A'=A$，对任意 n 维列向量 X 都有 $X'AX=0$，由第 761 条知 $A'=-A$，即 $2A=0$，故 $A=0$.

763. n 阶实矩阵 A 是对称矩阵的充分必要条件是 $AA'=A^2$.

证 必要性显然，下证充分性. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，由于 $AA'=A^2$，故有 $\mathrm{tr}AA'=\mathrm{tr}A^2$，即

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}a_{ji}.$$

整理得

$$\sum_{i\neq j}(a_{ij}-a_{ji})^2=0.$$

因 A 是实矩阵，故 $a_{ij}=a_{ji}(i\neq j)$，即 $A'=A$.

764. 设 A,B 为 n 阶实对称矩阵，λ 是 AB 的一个非实特征值，X 是 AB 对应于 λ 的一个特征向量，则 $\overline{X}'BX=0$.

证 在 $ABX=\lambda X$ 的两边取共轭转置得 $\overline{X}'BA=\overline{\lambda}\overline{X}'$，所以 $\overline{X}'BABX=\overline{\lambda}\overline{X}'BX$. 即 $\lambda\overline{X}'BX=\overline{\lambda}\overline{X}'BX$，$(\lambda-\overline{\lambda})\overline{X}'BX=0$. 因 λ 是非实数，即 $\lambda-\overline{\lambda}\neq0$，所以 $\overline{X}'BX=0$.

765. 设 A 为一个 n 阶实对称矩阵，且 $|A|<0$，则必存在实 n 维向量 $X\neq0$，使 $X'AX<0$.

证 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X'AX$，$A$ 的 n 个实特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则由 $|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n<0$ 知 A 至少有一个特征值为负，不妨设 $\lambda_1<0$. 由第 **754** 条的注，存在 $\beta\neq0$，使 $\beta'A\beta=\lambda_1<0$.

766. 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X'AX$ 是一实二次型，若有 n 维实向量 X_1,X_2，使

$$X'_1AX_1>0,X'_2AX_2<0,$$

则必存在 n 维实向量 $X_0\neq0$，使 $X'_0AX_0=0$.

证 设秩 $A=r$，则存在非退化线性替换 $X=CY$，将二次型化为规范形

$$f=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2,$$

由 $1\leqslant p<r$，若取 $y_1=1,y_2=\cdots=y_{r-1}=0,y_r=1$，则

$$f=1^2+0^2+\cdots+0^2-0^2-\cdots-0^2-1^2=0.$$

取 $Y_0=(1,0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)'$，$X_0=CY_0\neq0$，则 $f=X'_0AX_0=0$.

767. 设实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X'AX$，矩阵 A 的特征值 $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$，则在条件 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$ 下，二次型 f 的

最小值和最大值分别是 λ_1 和 λ_n.

证　存在正交矩阵 Q,使

$$Q'AQ=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)=B.$$

作正交替换 $X=QY$,则

$$X'AX=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots\cdots+\lambda_ny_n^2=Y'BY.$$

而

$$\lambda_1Y'Y\leqslant Y'BY=X'AX\leqslant\lambda_nY'Y,$$
$$X'X=(QY)'QY=Y'Y,$$

故

$$\lambda_1X'X\leqslant X'AX\leqslant\lambda_nX'X. \tag{1}$$

条件 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$ 即 $X'X=1$,因此

$$\lambda_1\leqslant X'AX\leqslant\lambda_n.$$

易知上述不等式里 $X'AX$ 可达到等号,即 f 的最小值和最大值分别是 λ_1,λ_n.

768.　设 A 是 n 阶实对称矩阵,则存在一正实数 c,使对任一实 n 维向量 X 都有

$$|X'AX|\leqslant cX'X.$$

证　由第 **767** 条(1)式,令 $c=\max\{|\lambda_1|,|\lambda_n|\}$,则

$$|X'AX|\leqslant cX'X.$$

769.　设 A,B 是 n 阶对称矩阵,λ_1,λ_2 是 $|A-\lambda B|=0$ 的不同根,并且 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$,$Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)'$ 分别是

$$(A-\lambda_1B)X=0,(A-\lambda_2B)Y=0$$

的解,则 $X'AY=0,X'BY=0$.

证　因为 $\lambda_1X'BY=\lambda_1(X'BY)'=\lambda_1Y'BX=Y'(\lambda_1BX)=Y'AX=(Y'AX)'=X'AY=\lambda_2X'BY$,而 $\lambda_1\neq\lambda_2$,故 $X'BY=0,X'AY=0$.

770.　一个实二次型可以分解成两个实系数的一次齐次多项式之积的充分必要条件是:它的秩等于 2 和符号差等于 0,或者秩

等于 1.

证 必要性 设 $f=(a_1x_1+\cdots\cdots+a_nx_n)(b_1x_1+\cdots\cdots+b_nx_n)\neq 0$, $a_i, b_i(i=1,2,\cdots,n)$均为实数.

1) 若两个一次式系数成比例,即 $b_i=ka_i(i=1,2,\cdots,n)$,不妨设 $a_1\neq 0$,则非退化线性替换

$$\begin{cases} y_1=a_1x_1+\cdots+a_nx_n, \\ y_i=x_i(i=2,\cdots,n) \end{cases}$$

化二次型 $f=ky_1^2$,此时 f 的秩为 1.

2) 若两个一次式系数不成比例,不妨设$\frac{a_1}{b_1}\neq\frac{a_2}{b_2}$,则连续进行下列非退化线性替换

$$\begin{cases} y_1=a_1x_1+\cdots+a_nx_n, \\ y_2=b_1x_1+\cdots+b_nx_n, \\ y_i=x_i(i=3,\cdots,n) \end{cases} \text{及} \begin{cases} y_1=z_1+z_2, \\ y_2=z_1-z_2, \\ y_i=z_i(i=3,\cdots,n) \end{cases}$$

化二次型 $f=y_1y_2=z_1^2-z_2^2$,此时 f 的秩为 2 且符号差为 0.

充分性 1) 若 f 的秩等于 1,则存在非退化线性替换 $X=CY$ 化二次型为

$$\begin{aligned} f&=d_1y_1^2=d_1(a_1x_1+\cdots\cdots+a_nx_n)^2 \\ &=(a_1x_1+\cdots+a_nx_n)(d_1a_1x_1+\cdots+d_1a_nx_n). \end{aligned}$$

2) 若 f 的秩等于 2,符号差等于 0,则非退化线性替换 $X=CY$ 化二次型为

$$\begin{aligned} f&=y_1^2-y_2^2=(y_1+y_2)(y_1-y_2) \\ &=(a_1x_1+\cdots+a_nx_n)(b_1x_1+\cdots+b_nx_n). \end{aligned}$$

771. 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=L_1^2+L_2^2+\cdots+L_p^2-L_{p+1}^2-\cdots-L_{p+q}^2$,其中 $L_i(i=1,2,\cdots,p+q)$是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的一次齐次式,则 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的正惯性指数$\leqslant p$,负惯性指数$\leqslant q$.

证 设 $L_i=b_{i1}x_1+b_{i2}x_2+\cdots+b_{in}x_n(i=1,2,\cdots,p+q)$,再设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的正惯性指数为 s,秩为 r,则存在非退化线性替换

$$y_i=c_{i1}x_1+c_{i2}x_2+\cdots+c_{in}x_n(i=1,2,\cdots,n) \tag{1}$$

使

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)&=L_1^2+L_2^2+\cdots+L_p^2-L_{p+1}^2-\cdots-L_{p+q}^2\\&=y_1^2+\cdots+y_s^2-y_{s+1}^2-\cdots-y_r^2.\end{aligned} \tag{2}$$

先证 $s\leqslant p$. 用反证法. 假设 $s>p$, 注意到线性方程组

$$\begin{cases}b_{11}x_1+\cdots+b_{1n}x_n&=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ b_{p1}x_1+\cdots+b_{pn}x_n&=0,\\ c_{s+1,1}x_1+\cdots+c_{s+1,n}x_n&=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ c_{n1}x_1+\cdots+c_{nn}x_n&=0.\end{cases}$$

的未知量的个数为 n, 方程个数为 $p+n-s<n$, 故此线性方程组存在非零解 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, 将它代入(2), 得

$$f(a_1,a_2,\cdots,a_n)=-L_{p+1}^2-\cdots-L_{p+q}^2=y_1^2+\cdots+y_s^2.$$

$$L_{p+1}=\cdots=L_{p+q}=y_1=\cdots=y_s=0.$$

因此, 对一组不全为零的数 $x_1=a_1,x_2=a_2,\cdots,x_n=a_n$, 使得 $y_1=y_2=\cdots=y_n=0$, 这与非退化线性替换(1)的条件相矛盾.

类似地可证得 f 的负惯性指数 $\leqslant q$.

772. 任何一个 n 阶可逆复对称矩阵必定合同于以下形式的矩阵之一:

$$\begin{bmatrix}0 & E_r\\ E_r & 0\end{bmatrix}, \text{若 } n=2r;\ \begin{bmatrix}0 & E_r & 0\\ E_r & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \text{若 } n=2r+1.$$

证　设 A 为 n 阶可逆复对称矩阵. 由于两个复对称矩阵合同的充分必要条件是其秩相等, 故当 $n=2r$ 时,

$$\text{秩}(A)=\text{秩}\begin{bmatrix}0 & E_r\\ E_r & 0\end{bmatrix}=n,$$

因而 A 合同于$\begin{bmatrix} 0 & E_r \\ E_r & 0 \end{bmatrix}$；当 $n=2r+1$ 时，

$$\text{秩}(A)=\text{秩}\begin{bmatrix} 0 & E_r & 0 \\ E_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}，\text{因而 } A \text{ 合同于}\begin{bmatrix} 0 & E_r & 0 \\ E_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

773. 任何一个 n 阶可逆实对称矩阵必合同于以下形式的矩阵之一：

$$\begin{bmatrix} 0 & E_r & 0 \\ E_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{n-2r} \end{bmatrix} \text{或} \begin{bmatrix} 0 & E_r & 0 \\ E_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -E_{n-2r} \end{bmatrix}.$$

证 设 A 为 n 阶可逆实对称矩阵. 当 A 的符号差 $\geqslant 0$，且 -1 的个数为 r 时，A 合同于

$$\begin{bmatrix} E_r & & \\ & -E_r & \\ & & E_{n-2r} \end{bmatrix};$$

当 A 的符号差 <0，且 1 的个数为 r 时，A 合同于

$$\begin{bmatrix} E_r & & \\ & -E_r & \\ & & -E_{n-2r} \end{bmatrix}.$$

令 $P=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} E_r & E_r \\ -E_r & E_r \end{bmatrix}$，则 $P'\begin{bmatrix} E_r & \\ & -E_r \end{bmatrix}P=\begin{bmatrix} 0 & E_r \\ E_r & 0 \end{bmatrix}$.

故存在可逆矩阵 $Q=\begin{bmatrix} P & \\ & E_{n-2r} \end{bmatrix}$，使

$$Q'\begin{bmatrix} E_r & & \\ & -E_r & \\ & & E_{n-2r} \end{bmatrix}Q=\begin{bmatrix} 0 & E_r & 0 \\ E_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{n-2r} \end{bmatrix},$$

$$Q'\begin{bmatrix} E_r & & \\ & -E_r & \\ & & -E_{n-2r} \end{bmatrix}Q=\begin{bmatrix} 0 & E_r & 0 \\ E_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -E_{n-2r} \end{bmatrix}.$$

774. 设 A 是反对称矩阵,则 A 合同于矩阵

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & & & & \\ & & -1 & 0 & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & 0 & 1 & & & \\ & & & & & -1 & 0 & & & \\ & & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

证 用归纳法,当 $n=1$ 时,$A=(0)$,命题显然成立. 当 $n=2$ 时,设

$$A=\begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{bmatrix}.$$

若 $a_{12}=0$,命题成立;若 $a_{12}\neq0$,A 的第一行、第一列均乘以 a_{12}^{-1},得 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$,故 A 与 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ 合同. 即当 $n=1$ 或 2 时,命题都成立.

假定 $n\leqslant k$ 时命题成立,往证 $n=k+1$ 时命题成立. 设

$$A=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & a_{1k} & a_{1,k+1} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ -a_{1k} & \cdots & 0 & a_{k,k+1} \\ -a_{1,k+1} & \cdots & -a_{k,k+1} & 0 \end{bmatrix}.$$

若最后一行、一列元素全为零,由归纳假定,命题成立;若最后一行、一列中有元素不全为零,则经过行、列同时对换,假定 $a_{k,k+1}\neq0$,于是用 $a_{k,k+1}^{-1}$ 去乘最后一行、一列,则 A 化成

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & a_{1k} & b_1 \\ -a_{1k} & \cdots & 0 & 1 \\ -b_1 & \cdots & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

由此将最后两行、两列的其它元素化为零，则 A 合同于

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & b_{1,k-1} & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -b_{1,k-1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

经过行、列同时对换，将右下角的 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ 移到左上角．再由归纳假定即知命题对 $n=k+1$ 也真，归纳法完成．

775. 设 n 阶实对称矩阵 A 是满秩的，A_{ij} 是 $A=(a_{ij})$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式，则二次型 $g=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{A_{ij}}{|A|}x_ix_j$ 和二次型 $f=X'AX$ 有相同的正、负惯性指数．

证 因为 A 是满秩的，设 $AX=Y$，则 $X=A^{-1}Y$．于是

$$f=X'AX=(A^{-1}Y)'Y=Y'A^{-1}Y,$$

其中 $Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)'$．而 $A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}$，因此

$$f=Y'A^{-1}Y=\frac{1}{|A|}Y'A^*Y=\frac{1}{|A|}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}y_iy_j,$$

即
$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=g(y_1,y_2,\cdots,y_n).$$

由于非退化线性替换不改变二次型的秩和符号差，故 f 和 g 有相同的正、负惯性指数．

776. 如果 n 阶实对称矩阵按合同分类，即两个 n 阶实对称矩阵属于同一类当且仅当它们合同，问共有多少类？

解 设 A 为 n 阶实对称矩阵，秩 $A=r$，由第 **742** 条知，A 仅与下列 $r+1$ 个对角矩阵之一合同：

$$\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} E_{r-1} & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} E_{r-2} & & \\ & -E_2 & \\ & & 0 \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} -E_r & \\ & 0 \end{bmatrix}.$$

而 r 又可以取 $0,1,\cdots,n$ 之一，故按合同分类，n 阶实对称矩阵的类数为

$$N=1+2+\cdots+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

777. 设 $\lambda=a+bi$ 为 n 阶实方阵 A 的任一特征值，则 $\frac{1}{2}\min\mu_i\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}\max\mu_i$，其中 $\mu_1,\cdots,\mu_n$ 为 $A+A'$ 的全部特征值．

证 存在正交矩阵 T，使 $T'(A+A')T=\mathrm{diag}(\mu_1,\cdots,\mu_n)$. 设 β 是 A 属于 λ 的特征向量，即 $A\beta=\lambda\beta$，则

$$\overline{\beta}'(A+A')\beta=(\lambda+\overline{\lambda})\overline{\beta}'\beta=2a\,\overline{\beta}'\beta.$$

令 $Y=T'\beta=(y_1,y_2,\cdots,y_n)'$，则

$$\overline{Y}'\mathrm{diag}(\mu_1,\cdots,\mu_n)Y=2a\overline{Y}'Y,$$

$$\sum_{i=1}^n\mu_i\overline{y}_iy=2a\sum_{i=1}^n\overline{y}_iy_i,$$

$$(\min\mu_i)\sum_{i=1}^n|y_i|^2\leqslant 2a\sum_{i=1}^n|y_i|^2\leqslant(\max\mu_i)\sum_{i=1}^n|y_i|^2,$$

$\sum_{i=1}^n|y_i|^2\neq 0$. 所以 $\min\mu_i\leqslant 2a\leqslant\max\mu_i$. 同乘以 $\frac{1}{2}$ 即得欲证的不等式.

778. 设 A,B,AB 都是 n 阶实对称矩阵，λ 是 AB 的一个特征根，则存在 A 的一个特征根 s，和 B 的一个特征根 t，使 $\lambda=st$.

证 由 A,B 都相似于对角矩阵及 $AB=(AB)'=B'A'=BA$，故存在可逆矩阵 T，使

$$T^{-1}AT=\mathrm{diag}(s_1,\cdots,s_n),T^{-1}BT=\mathrm{diag}(t_1,\cdots,t_n),$$

$$T^{-1}(AB)T=(T^{-1}AT)(T^{-1}BT)=\mathrm{diag}(t_1s_1,\cdots,t_ns_n),$$

由于 $t_1s_1,\cdots,t_ns_n$ 为 AB 的全部特征值，从而即得结论.

六、 正定与半正定二次型(矩阵)

779. 什么叫正(负、半正、半负、不)定二次型(矩阵)?

答 设 A 为 n 阶实对称矩阵.

1) 如果对任意 n 维列向量 $X\neq 0$,总有 $X'AX>0$,则称 A 为正定矩阵,并称 $f(x_1,\cdots,x_n)=X'AX$ 为正定二次型.

2) 若对任意 n 维列向量 X,总有 $X'AX\geqslant 0$,则称 A 为半正定矩阵,并称 $f(x_1,\cdots,x_n)=X'AX$ 为半正定二次型.

3) 若对任意 n 维列向量 $X\neq 0$,总有 $X'AX<0$,则称 A 为负定矩阵,并称 $f(x_1,\cdots,x_n)=X'AX$ 为负定二次型.

4) 若对任意 n 维列向量 X,总有 $X'AX\leqslant 0$,则称 A 为半负定矩阵,并称 $f(x_1,\cdots,x_n)=X'AX$ 为半负定二次型.

5) 若存在两个 n 维列向量 X_1,X_2 使 $X'_1AX_1>0,X'_2AX_2<0$,则称 $f(x_1,\cdots,x_n)=X'AX$ 为不定二次型.

780. 设 A 为 n 阶实对称矩阵,A 为正定矩阵的充要条件是 A 的各阶顺序主子式都大于 0.

781. 判别下列二次型是否正定:

1) $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j$;

2) $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_ix_{i+1}$.

解 1) 记二次型的矩阵为 $A=(a_{ij})$,其中 $a_{ij}=\begin{cases}1, i=j\\ \dfrac{1}{2}, i\neq j.\end{cases}$;设 A 的 k 阶顺序主子式为 $|A_k|$,则

$$|A_k|=(\frac{1}{2})^k(k+1)>0,k=1,2,\cdots,n.$$

由第 **780** 条 A 为正定矩阵,从而二次型为正定的.

2) 记二次型矩阵为 B,并设 B 的 k 阶顺序主子式为 $|B_k|$. 而

$$B=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix},$$

$$|B_k|=(\frac{1}{2})^k(k+1)>0, k=1,2,\cdots,n.$$

因此由第 **780** 条知二次型是正定的.

782. 设 $A=\begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$,其中 B,C 分别为 k 阶和 m 阶实对称矩阵,那么

1) A 为实对称矩阵;

2) B,C 都是正定矩阵$\Rightarrow A$ 为正定矩阵;

3) B,C 都是半正定的$\Rightarrow A$ 为半正定矩阵.

证 1) 显然.

2) $\forall X'=(x_1,\cdots,x_n)\neq 0$,其中 $n=k+m$,令 $X'=(Y'_1,Y'_2)$,其中 $Y'_1=(x_1,\cdots,x_k)$,$Y'_2=(x_{k+1},\cdots,x_n)$,则 Y_1,Y_2 不全为 0,于是 $X'AX=Y'_1BY_1+Y'_2CY_2>0$,即 A 为正定矩阵.

3) 仿 2)可证.

783. 当 a,b,c 取何值时,二次型 $ax_1^2+bx_2^2+ax_3^2+2cx_1x_3$ 是负定的?

解 设二次型矩阵为 A,则

$$A=\begin{bmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{bmatrix}, \quad -A=\begin{bmatrix} -a & 0 & -c \\ 0 & -b & 0 \\ -c & 0 & -a \end{bmatrix}.$$

由于$-A$正定$\Longleftrightarrow A$负定，$-A$正定的条件是

$$-a>0,(-a)(-b)>0,-b(a^2-c^2)>0,$$

即当$a<0,b<0,|a|>|c|$时，此二次型为负定.

784. 设$a_1,a_2,\cdots,a_n$为n个实数，当$a_1,a_2,\cdots,a_n$满足什么条件时，二次型

$$f(x_1,\cdots,x_n)=(x_1+a_1x_2)^2+(x_2+a_2x_3)^2+\cdots+(x_{n-1}+a_{n-1}x_n)^2+(x_n+a_nx_1)^2$$

是正定的?

解　由于对任意$x_1,x_2,\cdots,x_n$都有$f(x_1,\cdots,x_n)\geqslant 0$，故二次型$f(x_1,\cdots,x)$半正定. $f(x_1,\cdots,x_n)=0\Longleftrightarrow x_1+a_1x_2=x_2+a_2x_3=\cdots=x_{n-1}+a_{n-1}x_n=x_n+a_nx_1=0\Longleftrightarrow$

$$\begin{bmatrix}1 & a_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}. \tag{1}$$

因此f为正定$\Longleftrightarrow f(x_1,\cdots,x_n)=0$仅有零解$\Longleftrightarrow$方程组(1)仅有零解$\Longleftrightarrow$系数行列式$D=1+(-1)^{n+1}a_1a_2\cdots a_n\neq 0$. 故当$a_1a_2\cdots a_n\neq(-1)^n$时，二次型$f$正定.

785. 正定矩阵的充要条件. 设A为n阶实对称矩阵，则下面的几条等价：

1) A为正定矩阵；

2) A的所有特征值均大于0；

3) 存在正定矩阵B使$A=B^2$；

4) A合同于E；

5) A的一切主子式都大于0；

6) A的一切主子矩阵都是正定矩阵；

7) A的一切顺序主子式都大于0；

8) A半正定且$|A|\neq 0$；

9) 任意 $n\times m$ 实矩阵 C，且秩 $C=m$，都有 $C'AC$ 为正定矩阵；

10) 对任意实可逆矩阵 T，$T'AT$ 正定；

11) 设 $A=\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A'_2 & A_3 \end{bmatrix}$，则 A_1 和 $A_3-A'_2A_1^{-1}A_2$ 正定.

证 1) $\Longleftrightarrow$7) 第 **780** 条已经给出.

1)$\Rightarrow$2) 用反证法. 若 A 的全部特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，不全为正，不妨设 $\lambda_1\leqslant 0$. 由第 **754** 条的注，存在 $\beta\neq 0$ 使 $\beta' A\beta=\lambda_1\leqslant 0$，这与 A 为正定矩阵的假设矛盾.

2)$\Rightarrow$1) 设 A 的特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，由第 **754** 条存在正交矩阵 T 使

$$T'AT=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),A=T\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)T' \quad (1)$$

任取 $X\neq 0$，则

$$X'AX=(X'T)\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)(T'X)=Y'\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)Y,$$

其中 $Y'=X'T=(y_1,\cdots,y_n)\neq 0$. 于是 $X'AX=\lambda_1y_1^2+\cdots+\lambda_ny_n^2>0$，即 A 为正定矩阵.

2)$\Rightarrow$3) 由(1)式得

$A=\left[T\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\cdots,\sqrt{\lambda_n})T^{-1}\right]\left[T\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\cdots,\sqrt{\lambda_n})T^{-1}\right]=B^2$，其中 $B=T\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\cdots,\sqrt{\lambda_n})T^{-1}$. 因 B 为实对称矩阵，且特征值 $\sqrt{\lambda_i}>0(i=1,2,\cdots,n)$，故为正定矩阵.

3)$\Rightarrow$4) $A=B^2=B'EB$. B 是正定矩阵，从而为可逆矩阵，即 A 合同于 E.

4)$\Rightarrow$1) 设 $A=T'ET=T'T$，其中 $|T|\neq 0$. 任取 $X\neq 0$，令 $TX=Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)'$，则 $Y\neq 0$. 于是

$$X'AX=Y'Y=y_1^2+\cdots+y_n^2>0,$$

故 A 为正定矩阵.

1)$\Rightarrow$5) 用反证法. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$. 若存在

$$\begin{bmatrix} a_{i_1i_1} & \cdots & a_{i_1i_k} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{i_ki_1} & \cdots & a_{i_ki_k} \end{bmatrix} = B, \text{而} |B| < 0,$$

但 B 是 k 阶实对称矩阵,从而存在 k 阶正交矩阵 U 使

$$B = U' \operatorname{diag}(\mu_1, \cdots, \mu_k) U.$$

由 $|B| = \mu_1 \cdots \mu_k < 0$ 知 B 至少有一个特征值小于 0. 不失一般性,设 $\mu_1 < 0$. 令 $Y' = (1, 0, \cdots, 0)U$,则 $Y \neq 0$,且 $Y'BY = \mu_1 < 0$. 令 $X' = (x_1, \cdots, x_n)$,其中

$$x_i = \begin{cases} y_i, \text{当 } i \in \{i_1, \cdots, i_k\} \text{时}, \\ 0, \text{其它}, \end{cases}$$

则 $X \neq 0$,且

$$X'AX = Y'BY = \mu_1 < 0,$$

这与 A 为正定矩阵的假设矛盾.

5)⇒6)　设 B 是 A 的一个 k 阶主子矩阵,由于 B 的任意一个顺序主子式均为 A 的一个主子式,由 5)的假设知它们都大于 0,从而由第 **780** 条可知 B 为正定矩阵.

6)⇒1)　因 A 本身也是它的一个主子矩阵.

1)⇒8)　因为正定矩阵一定是半正定的,而 $|A| > 0$.

8)⇒1)　设 A 的 n 个特征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$,由 A 半正定可知 $\lambda_i \geq 0, i = 1, 2, \cdots, n$. 又 $|A| = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n \neq 0$,故 $\lambda_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n$.

1)⇒9)　任取 $X \neq 0$,则 $CX \neq 0$(因为若 $CX = 0$,则 $C'CX = 0$,而 $C'C$ 为 m 阶可逆矩阵,所以 $X = 0$,与假设矛盾). 由于 A 为正定矩阵,因此

$$X'(C'AC)X = (CX)'A(CX) > 0.$$

9)⇒1)　取 E,由 9)的假设 $E'AE$ 为正定矩阵,但 $A = E'AE$,所以 A 是正定的.

9)⇒10)　只要把 9)中 C 取成 10)中 T 即可.

10)⇒1) 设 $T'AT$ 为正定矩阵，其中 T 为实可逆矩阵. 因为 $A=(T^{-1})'(T'AT)(T^{-1})$，由 10)即知 A 正定.

1) ⇒ 11) 由于 A 正定，因此 A_1 正定. 令 $T'=\begin{bmatrix} E & 0 \\ -A'_2A_1^{-1} & E \end{bmatrix}$，则

$$T'AT=\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_3-A'_2A_1^{-1}A_2 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

但 T 为实可逆矩阵，而合同不改变正定性，所以由(2)式知 A_1 与 $A_3-A'_2A_1^{-1}A_2$ 都是正定矩阵.

11)⇒1) 由假设，取上面的 T'，仍有(2)式成立. 再由第 **782** 条知 $T'AT$ 为正定矩阵，从而 A 为正定矩阵.

注 对正定二次型有类似的结论，这是因为配方法就是对二次型的矩阵作合同变换. 设二次型为 $X'AX$，其标准形为

$$d_1y_1^2+\cdots+d_ny_n^2,$$

则 $X'AX$ 为正定二次型$\Longleftrightarrow d_i>0, i=1,2,\cdots,n$.

786. 半正定矩阵的充要条件. 设 A 为 n 阶实对称矩阵，则下面几条等价：

1) A 为半正定矩阵；

2) A 的特征值 $\lambda_i\geqslant 0, i=1,2,\cdots,n$；

3) A 合同于 $\mathrm{diag}(1,\cdots,1,0,\cdots,0)$，其中 1 的个数等于 A 的秩；

4) A 的一切主子式都非负；

5) A 的一切主子矩阵都是半正定矩阵；

6) $A=B'B$，其中 B 为实矩阵；

7) 对任意 $n\times m$ 实矩阵 C，都有 $C'AC$ 为半正定矩阵；

8) 合同不改变半正定性.

证 证明方法类似于第 **785** 条，从略.

注 A 的一切顺序主子式都非负，不能断定 A 半正定，比如，$A=\text{diag}(0,-1)$.

787. 设 A 为正定矩阵，则

1) $A^{-1}, kA(k>0), A^m$(m 为整数), A^* 都是正定矩阵；

2) $g(x)=a_m x^m+\cdots+a_1 x+a_0$，其中 $a_i \geqslant 0(i=0,1,2,\cdots,m)$ 且至少有一个为正，则 $g(A)$正定.

证 1) 设 A 的全部特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则由 A 正定知 $\lambda_i>0\ (i=1,2,\cdots,n)$.

因为 A^{-1}是实对称矩阵，它的全部特征值为$\frac{1}{\lambda_1},\frac{1}{\lambda_2},\cdots,\frac{1}{\lambda_n}$，也全为正，故 A^{-1}正定.

同样，kA 实对称，其特征值 $k\lambda_1,k\lambda_2,\cdots,k\lambda_n(k>0)$全为正，故 kA 正定.

A^m 实对称，其特征值 $\lambda_1^m,\lambda_2^m,\cdots,\lambda_n^m$ 全为正，故 A^m 正定.

因为 $A^*=|A|A^{-1}$，而$|A|>0$，由前述可知 A^*正定.

2) $g(A)$的全部特征值为 $g(\lambda_1),g(\lambda_2),\cdots,g(\lambda_n)$，由假设知，它们全部为正，故 $g(A)$正定.

788. 1) 设 A 为 n 阶正定矩阵，B 为 n 阶半正定矩阵，则 $A+B$ 为正定矩阵；

2) 两个同阶半正定矩阵之和为半正定矩阵.

证 1) 因为对于任意的 $X\neq 0$ 有

$$X'(A+B)X=X'AX+X'BX>0,$$

所以 $A+B$ 为正定矩阵.

2) 类似于 1)可证得.

789. 设 A 是实对称矩阵，则存在实数 $\alpha>0,\beta>0$，使 $\alpha E+A, E+\beta A$ 为正定矩阵.

证 设 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，令 $g(x)=x+\alpha$，则 $g(A)=\alpha E+A$ 的特征值为 $\lambda_1+\alpha,\lambda_2+\alpha,\cdots,\lambda_n+\alpha$. 取 $\alpha>\max\{|\lambda_i|\}$，则

$\alpha E+A$ 的特征值全为正，故 $\alpha E+A$ 正定. 取 $\beta=\frac{1}{\alpha}$，则 $\beta>0$，$E+\beta A=\frac{1}{\alpha}(\alpha E+A)$. 由 $\frac{1}{\alpha}>0$，$\alpha E+A$ 正定知 $E+\beta A$ 也正定.

790. 主对角线上全是 1 的上三角矩阵称为特殊上三角矩阵.

1) 设 A 是一对称矩阵，T 为特殊上三角矩阵，而 $B=T'AT$，则 A 与 B 对应的顺序主子式有相同的值；

2) 如果对称矩阵 A 的顺序主子式全不为零，那么一定有一特殊上三角矩阵 T 使 $T'AT$ 成对角形；

3) 利用以上结果证明：如果实对称矩阵 A 的各阶顺序主子式全大于零，则 A 是正定矩阵.

证 1) 设 A_k，B_k 分别为 A 与 B 的 k 阶顺序主子矩阵，下证 $|A_k|=|B_k|$，$k=1,2,\cdots,n$.

令 $T=\begin{bmatrix} T_k & * \\ 0 & T_{n-k}\end{bmatrix}$，其中 T_i 为特殊上三角矩阵.

$$B=T'AT=\begin{bmatrix} T'_k & 0 \\ * & T'_{n-k}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_k & * \\ * & *\end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_k & * \\ 0 & T_{n-k}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} T'_kA_kT_k & * \\ * & *\end{bmatrix},$$

则 $B_k=T'_kA_kT_k$，两边取行列式，并注意 $|T_k|=1$，得 $|B_k|=|A_k|$.

2) 设 n 阶对称矩阵 $A=(a_{ij})$，因 $a_{11}\neq 0$，则对 A 的第一行和第一列同时进行相应的第三种初等变换 A，可化为 $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & B_{n-1}\end{bmatrix}$，

其中 $B_{n-1}=\begin{bmatrix} b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n2} & \cdots & b_{nn}\end{bmatrix}$. 由假设及 1)的结论知 $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & b_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\neq 0$. 从而 $b_{22}\neq 0$，把 B_{n-1} 看成上面的 A，则 B_{n-1} 又可化为 $\begin{bmatrix} b_{22} & 0 \\ 0 & B_{n-2}\end{bmatrix}$. 这样继续下去，可以将 A 化成对角矩阵. 由于每

进行一次行、列的第三种初等变换，相当于右乘特殊上三角矩阵 T 而左乘 T'，又特殊上三角矩阵之积仍为特殊上三角矩阵，因此即得 2).

3) 由 2)的结论知，存在特殊上三角矩阵使 $T'AT=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，由 1)知

$$\lambda_1=a_{11}>0,\lambda_1\lambda_2=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}>0,$$ 从而 $\lambda_2>0$. 这样继续下去可证得一切 $\lambda_i>0,i=1,2,\cdots,n$. 考虑实二次型 $X'AX$，令 $X=TY$，则

$$X'AX=Y'(T'AT)Y=\lambda_1y_1^2+\cdots+\lambda_ny_n^2,$$

因此，当 $X\neq0$ 时有 $Y\neq0$，从而知 $X'AX>0$，即 A 为正定矩阵.

791. 若 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j(a_{ij}=a_{ji})$ 是正定二次型，则 f 为负定二次型，其中

$$f(y_1,\cdots,y_n)=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}&y_1\\a_{21}&\cdots&a_{2n}&y_2\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}&y_n\\y_1&\cdots&y_n&0\end{vmatrix}.$$

证 1 令 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，由第 **402** 条知

$$f(y_1,\cdots,y_n)=-\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}y_iy_j,$$

其中 A_{ij}是 a_{ij}的代数余子式. 上式说明二次型 f 的相应的矩阵为 $-(A^*)'$. 由 A 正定知 A^* 正定，这样 $-(A^*)'=-A^*$ 负定. 故 f 为负定二次型.

证 2 令 $A=(a_{ij})$，则 A 为正定矩阵. 令 $Y=(y_1,\cdots,y_n)'$，则由

$$\begin{bmatrix}A&Y\\Y'&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E&-A^{-1}Y\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A&0\\Y'&-Y'A^{-1}Y\end{bmatrix}$$

两边取行列式得 $f=-|A|Y'A^{-1}Y$. 由于 A^{-1} 也是正定矩阵及 $|A|>0$, 故 f 为负定二次型.

792. 设 A 为正定矩阵,则

1) $|A|\leqslant a_{nn}P_{n-1}$, 这里 P_{n-1} 是 A 的 $n-1$ 阶顺序主子式;

2) $|A|\leqslant a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

证 1) 设 $|A|=\begin{vmatrix} A_{n-1} & X \\ X' & a_{nn}\end{vmatrix}$, 其中 $P_{n-1}=|A_{n-1}|$, $X=(a_{n1}, a_{n2},\cdots,a_{nn-1})'$. 于是

$$|A|=\begin{vmatrix} A_{n-1} & X \\ X' & a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A_{n-1} & X \\ 0 & a_{nn}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} A_{n-1} & X \\ X' & 0\end{vmatrix},$$

由第 791 条知 $|A|=a_{nn}P_{n-1}-|A_{n-1}|X'A_{n-1}^{-1}X$. 由 A 正定知 A_{n-1} 正定, 从而 A_{n-1}^{-1} 正定, $|A_{n-1}|X'A_{n-1}^{-1}X\geqslant 0$. 所以 $|A|\leqslant a_{nn}P_{n-1}$.

2) 反复利用 1), 则

$$|A|\leqslant a_{nn}P_{n-1}\leqslant a_{nn}a_{n-1,n-1}P_{n-2}\leqslant\cdots\leqslant a_{nn}a_{n-1,n-1}\cdots a_{11}.$$

793. 设 $T=(t_{ij})$ 是 n 阶实可逆矩阵,则

$$|T|^2\leqslant\prod_{i=1}^{n}(t_{1i}^2+\cdots+t_{ni}^2).$$

证 因 T 是 n 阶实可逆矩阵, 所以 $T'T$ 是正定矩阵, 于是

$$T'T=\begin{bmatrix} \sum\limits_{k=1}^{n}t_{k1}^2 & & & * \\ & \sum\limits_{k=1}^{n}t_{k2}^2 & & \\ & & \ddots & \\ * & & & \sum\limits_{k=1}^{n}t_{kn}^2 \end{bmatrix},$$

由第 792 条知 $|T|^2=|T'T|\leqslant\prod\limits_{i=1}^{n}(t_{1i}^2+t_{2i}^2+\cdots+t_{ni}^2)$.

794. 设 A,B,C 为三角形的三内角, 则对任意实数 x,y,z,

有

$$x^2+y^2+z^2\geqslant 2xy\cos A+2xz\cos B+2yz\cos C.$$

证 考虑二次型

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2xy\cos A-2xz\cos B-2yz\cos C.$$

其矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}1 & -\cos A & -\cos B\\ -\cos A & 1 & -\cos C\\ -\cos B & -\cos C & 1\end{bmatrix}.$$

由于 A 的全部一阶主子式都等于 1,二阶主子式都有形式 $1-\cos^2\alpha$,因而

$$1-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha\geqslant 0,$$

唯一的三阶主子式

$$|A|=1-2\cos A\cos B\cos C-\cos^2 A-\cos^2 B-\cos^2 C=0,$$

故二次型半正定. 所以,对任意实数 x,y,z 有 $f(x,y,z)\geqslant 0$. 故

$$x^2+y^2+z^2\geqslant 2xy\cos A+2xz\cos B+2yz\cos C.$$

795. t 为何值时,二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=tx_1^2+tx_2^2-5x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$$

是半负定的.

解 设 f 所对应的矩阵为 A,则

$$-A=\begin{bmatrix}-t & -t & 1\\ -t & -t & 1\\ 1 & 1 & 5\end{bmatrix}.$$

f 为半负定二次型 $\Longleftrightarrow -A$ 为半正定矩阵 $\Longleftrightarrow -A$ 的一切主子式都非负 $\Longleftrightarrow \begin{cases}-t\geqslant 0\\ -5t-1\geqslant 0\end{cases}\Longleftrightarrow t\leqslant -1/5.$

796. $n\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i)^2$ 是半正定二次型.

证 1 $n\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i)^2=\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_i-x_j)^2\geqslant 0.$

证 2 设此二次型矩阵为 A，则

$$A=\begin{bmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{bmatrix},$$

$$|\lambda E-A|=\lambda(\lambda-n)^{n-1}.$$

于是 A 的 n 个特征值为 $\lambda_1=\cdots=\lambda_{n-1}=n,\lambda_n=0$，因而都非负，故 A 为半正定矩阵，对应的二次型是半正定的.

797. 设 A,B 都是 $n\times n$ 实对称矩阵，则 $A-B$ 与 $B-A$ 均为半正定矩阵$\Longleftrightarrow A=B$.

证 充分性 显然.

必要性 令 $C=A-B$. 设 C 的 n 个特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，那么 $-C=B-A$ 的 n 个值为 $-\lambda_1,\cdots,-\lambda_n$. 由于 C 半正定得 $\lambda_i\geqslant 0,i=1,2,\cdots,n$. 再由 $-C$ 半正定得 $-\lambda_i\geqslant 0,i=1,2,\cdots,n$. 故 $\lambda_i=0,i=1,2,\cdots,n$. 则存在正交矩阵 T，使

$$T^{-1}CT=\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=0.$$

所以 $C=A-B=0$，即 $A=B$.

798. 设 A,B 和 $A-B$ 都是半正定矩阵，则 $|A|\geqslant|B|$.

证 1) 若 $|B|=0$，结论显然成立.

2) 若 $|B|>0$，则 B 为正定矩阵，故由第 **785** 条知存在正定矩阵 G，使 $B=G^2$. 由 $A-B$ 半正定知 $G^{-1}(A-B)G^{-1}$ 半正定矩阵. 令

$$C=G^{-1}(A-B)G^{-1}=G^{-1}AG^{-1}-E. \tag{1}$$

由于 $G^{-1}AG^{-1}$ 是实对称矩阵，因此存在正交矩阵 T，使

$$T'(G^{-1}AG^{-1})T=\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n), \tag{2}$$

其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 为 $G^{-1}AG^{-1}$ 的全部特征值. 由(1)、(2)得

$$T'CT=\begin{bmatrix} \lambda_1-1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n-1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

因为 C 是半正定矩阵，由(3)得 $\lambda_i-1\geqslant 0$，即 $\lambda_i\geqslant 1, i=1,2,\cdots,n$. (2)式两边取行列式得

$$|G^{-1}||A||G^{-1}|=\lambda_1\cdots\lambda_n\geqslant 1.$$

两边乘以 $|B|$，并注意 $|B|=|G|^2$，得 $|A|\geqslant|B|$.

799. (Fisher) 设半正定矩阵 $A=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}$，其中 A_{11}, A_{22} 为方阵，则 $|A|\leqslant|A_{11}||A_{22}|$.

证 由于 A 为半正定矩阵，因此 A_{11}, A_{22} 都是半正定矩阵.

1) 若 $|A|=0$，则结论显然成立.

2) 若 $|A|\neq 0$，由 A 为半正定矩阵知 A 为正定矩阵，从而 A_{11} 为正定矩阵. 令 $T=\begin{bmatrix}E & -A_{11}^{-1}A_{12}\\ 0 & E\end{bmatrix}$，则

$$T'AT=\begin{bmatrix}A_{11} & 0\\ 0 & A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\end{bmatrix}. \tag{1}$$

两边取行列式得

$$|A|=|A_{11}|\cdot|A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}|. \tag{2}$$

由 $T'AT$ 半正定知 $A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ 半正定，若 $A_{22}-(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})=A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ 也半正定，则由第 **798** 条知 $|A_{22}|\geqslant|A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}|$，将它代入(2)式即得结论.

最后证明 $A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ 半正定. 由 A_{11} 正定知 A_{11}^{-1} 正定，即 $A_{11}^{-1}=T'T$，那么 $A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}=A'_{12}(T'T)A_{12}=C'C$ 半正定，其中 $C=TA_{12}$.

注 设 $A=\begin{bmatrix}A_{11} & \cdots & A_{1m}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ A_{m1} & \cdots & A_{mm}\end{bmatrix}$ 半正定阵，其中 $A_{ii}(i=1,2,\cdots,m)$ 都是方阵，则 $|A|\leqslant|A_{11}|\cdot|A_{22}|\cdots|A_{mm}|$. 特别地，

$$|A|\leqslant a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

800. (Hadamard) 设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶实方阵，则

$$|A|^2\leqslant\prod_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2.$$

证 令 $B=AA'$，则 B 为半正定矩阵. 在

$$B=\begin{bmatrix}\sum_{k=1}^{n}a_{1k}^2 & & & * \\ & \sum_{k=1}^{n}a_{2k}^2 & & \\ & & \ddots & \\ * & & & \sum_{k=1}^{n}a_{nk}^2\end{bmatrix}$$

的两边取行列式，再由第 **799** 条的注得

$$|A|^2=|B|\leqslant\prod_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2.$$

801. (Hadamard) 设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶实方阵，$|a_{ij}|\leqslant M$，则 $|\det A|\leqslant n^{\frac{n}{2}}M^n$，其中 $\det A$ 为 A 的行列式，$|\det A|$ 为 $\det A$ 的绝对值.

证 由第 **800** 条可知 $(\det A)^2\leqslant n^nM^{2n}$. 再两边开方得

$$|\det A|\leqslant n^{\frac{n}{2}}M^n.$$

802. 设实对称矩阵 A 的特征值全大于 a，实对称矩阵 B 的特征值全大于 b，则 $A+B$ 的特征值全大于 $a+b$.

证 设 A 的特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，则 $A-aE$ 的特征值为 $\lambda_1-a,\cdots,\lambda_n-a$. 由假设知 $A-aE$ 的特征值全为正，故 $A-aE$ 正定. 同理可证，$B-bE$ 也是正定的. 由于 $(A+B)-(a+b)E=(A-aE)+(B-bE)$，故 $(A+B)-(a+b)E$ 正定，其特征值全为正，设 λ 为 $A+B$ 的任一特征值，则 $(A+B)-(a+b)E$ 的特征值为 $\lambda-(a+b)$. 从而 $\lambda>a+b$，即 $A+B$ 的特征值全大于 $a+b$.

803. (Schur) 设 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$ 均为正定矩阵，$C=(c_{ij})$，其中 $c_{ij}=a_{ij}b_{ij}$，则 C 为正定矩阵.

证　由 B 为正定矩阵知,存在可逆矩阵 P 使 $B=P'P$. 令 $P=(p_{ij})$,则 $b_{ij}=\sum_{k=1}^{n}p_{ki}p_{kj}$. 于是对任意 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'\neq 0$,有

$$
\begin{aligned}
X'CX &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ij}x_ix_j=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\Big(\sum_{k=1}^{n}p_{ki}p_{kj}\Big)x_ix_j \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\sum_{k=1}^{n}(p_{ki}x_i)(p_{kj}x_j) \\
&= \sum_{k=1}^{n}(p_{k1}x_1,\cdots,p_{kn}x_n)A\begin{pmatrix}p_{k1}x_1\\ \vdots \\ p_{kn}x_n\end{pmatrix}=\sum_{k=1}^{n}Y'_kAY_k,
\end{aligned}
$$

其中 $Y_k=(p_{k1}x_1,\cdots,p_{kn}x_n)'$. 由 $X\neq 0$ 及 P 可逆易知 $Y_t\neq 0$. 由 A 正定知 $Y'_tAY_t>0$,从而 $X'CX>0$,故 C 是正定矩阵.

804.　设 A,B 是正定矩阵,则 AB 是正定矩阵的充分必要条件是 $AB=BA$.

证　必要性显然,下证充分性. 由于 A,B 均相似于对角矩阵,且 $AB=BA$,从而存在可逆矩阵 T,使 $T^{-1}AT=\text{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$, $T^{-1}BT=\text{diag}(\mu_1,\cdots,\mu_n)$. 由 A,B 为正定矩阵知 $\lambda_i>0,\mu_i>0,i=1,2,\cdots,n$. 但 $T^{-1}(AB)T=\text{diag}(\lambda_1\mu_1,\cdots,\lambda_n\mu_n)$,所以 AB 的特征值 $\lambda_1\mu_1,\cdots,\lambda_n\mu_n$ 都大于 0,故 AB 正定.

805.　设 A 是 n 阶正定矩阵,B 是 n 阶实对称矩阵,则必存在 n 阶可逆矩阵 T,使

$$T'AT=E,\qquad T'BT=\text{diag}(\mu_1,\cdots,\mu_n),$$

其中 $\mu_1,\cdots,\mu_n$ 是 $|\lambda A-B|=0$ 的 n 个实根.

证　因 A 合同于 E,故存在可逆矩阵 P 使 $P'AP=E$. 由于 B 是实对称矩阵,则 $P'BP$ 也是实对称矩阵. 从而存在正交矩阵 Q,使

$$Q'(P'BP)Q=\text{diag}(\mu_1,\cdots,\mu_n),$$

其中 $\mu_1,\cdots,\mu_n$ 为 $P'BP$ 的实特征值. 令 $T=PQ$,则

$$T'AT=E,\qquad T'BT=\text{diag}(\mu_1,\cdots,\mu_n),$$

$$T'(\lambda A-B)T=\mathrm{diag}(\lambda-\mu_1,\cdots,\lambda-\mu_n).$$

两边取行列式有

$$|T|^2|\lambda A-B|=(\lambda-\mu_1)\cdots(\lambda-\mu_n),$$

故 $\mu_1,\cdots,\mu_n$ 为 $|\lambda A-B|=0$ 的全部实根.

806. (Fan－Taussky) 设 A 是 n 阶正定矩阵, AB 是 n 阶实对称矩阵,则 AB 是正定矩阵 $\Longleftrightarrow B$ 的特征值全大于 0.

证 必要性 由第 **805** 条,存在可逆矩阵 T 使

$$T'AT=E,\qquad T'(AB)T=\mathrm{diag}(\mu_1,\cdots,\mu_n).\tag{1}$$

由于合同不改变正定性,故 $\mu_i>0\ (i=1,2,\cdots,n)$.

$$T'(AB)T=T'ATT^{-1}BT=T^{-1}BT$$

可知 B 的特征值全大于 0.

充分性 由必要性证明知(1)式的 $\mu_i(i=1,\cdots,n)$ 是 B 的特征值,而 $\mu_i>0(i=1,2,\cdots,n.)$,所以 $T'ABT$ 正定. 因而可知 AB 也正定.

807. (Ляпунов) 设 A 是 n 阶实矩阵, C 是 n 阶正定矩阵,若存在正定矩阵 B 使 $AB+BA'=-C$,则 A 的特征值的实部全小于 0.

证 由假设及第 **805** 条可知存在可逆矩阵 T 使

$$T'BT=E,\qquad T'CT=\mathrm{diag}(c_1,\cdots,c_n),$$

其中 $c_1,\cdots,c_n$ 都大于 0. 用 T' 左乘、T 右乘 $AB+BA'=-C$ 两边得

$$T'A(T')^{-1}T'BT+T'BT(T'AT'^{-1})'=-T'CT,$$

$$T'A(T')^{-1}+(T'AT'^{-1})'=\mathrm{diag}(-c_1,\cdots,-c_n).$$

任取 A 的一个特征值 $\lambda=a+bi$,则由第 **777** 条知

$$-\frac{1}{2}\max c_i\leqslant a\leqslant-\frac{1}{2}\min c_i<0.$$

808. 设 A 与 B 都是 n 阶正定矩阵,则

1) 多项式 $|\lambda A-B|$ 的根都是正数;

2) $|\lambda A-B|$的根都是 $1 \Longleftrightarrow A=B$.

证　1) 由第 **805** 条即得.

2) 用第 **805** 条的记号. 若 $\mu_i=1$,则 $T'AT=E=T'BT$. 所以 $A=B$. 反之,若 $A=B$,则

$$0=|\lambda A-B|=|A||\lambda E-A^{-1}B|=|A||\lambda E-E|.$$

故$|\lambda A-B|$的根与$|\lambda E-E|$的根相同,即都等于 1.

809.　设 n 阶正定矩阵 $A=(a_{ij})$,$b_1,\cdots,b_n$ 是任意 n 个不等于零的实数,令 $D=(d_{ij})$,其中 $d_{ij}=a_{ij}b_ib_j$,i、$j=1,2,\cdots,n$,则 D 是正定矩阵.

证　令 $T=\mathrm{diag}(b_1,\cdots,b_n)$,则 $T'=T$ 且为可逆矩阵. 但是 $D=T'AT$,而合同不改变正定性,故 D 为正定矩阵.

810.　设 $f(x_1,\cdots,x_n)=a\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum\limits_{i=1}^{n}x_ix_{n-i+1}$,其中 a,b 为实数,问 a,b 满足什么条件时,二次型 f 是正定的?

解　设 f 对应的矩阵为 A,Δ_k 为 A 的 k 级顺序主子式($k=1,2,\cdots,n$),由第 **735** 条知:

1) 当 $n=2m$ 时,有

$$\begin{cases}\Delta_k=a^k, k=1,2,\cdots,m;\\ \Delta_{m+k}=a^{m-k}(a^2-b^2)^k, k=1,2,\cdots,m.\end{cases}$$

故当 $a>0$,$a^2-b^2>0$ 时,f 为正定二次型.

2) 当 $n=2m+1$ 时,有

$$\begin{cases}\Delta_k=a^k, k=1,2,\cdots,m;\\ \Delta_{m+1}=(a+b)a^m;\\ \Delta_{m+1+k}=(a+b)a^{m-k}(a^2-b^2)^k, k=1,2,\cdots,m.\end{cases}$$

故当 $a>0$,$a+b>0$,$a-b>0$ 时,f 为正定二次型.

811.　设 $A'=A$,则 A 可逆$\Longleftrightarrow$存在矩阵 B 使 $AB+B'A$ 正定.

证　**必要性**　令 $B=A^{-1}$即可.

充分性　由于 $AB+B'A$ 正定，故对任意实 n 维列向量 $X_0\neq 0$，有

$$0<X'_0(AB+B'A)X_0=(AX_0)'BX_0+(BX_0)'AX_0$$
$$=2(AX_0)'BX_0.$$

由此知 $AX_0\neq 0$，这就是说 $AX=0$ 只有零解，故 A 可逆.

812.　设 A 为 n 阶半正定矩阵，则

1）当 B 是 n 阶正定矩阵时，$|A+B|\geqslant|B|$，等号当且仅当 $A=0$ 成立；

2）当 $A\neq 0$ 时，$|A+E|>1$.

证　1）由第 **805** 条，存在可逆矩阵 T 使

$$T'BT=E,\qquad T'AT=\mathrm{diag}(\mu_1,\cdots,\mu_n). \tag{1}$$

$$T'(A+B)T=\mathrm{diag}(1+\mu_1,\cdots,1+\mu_n). \tag{2}$$

由 A 半正定知 $\mu_i\geqslant 0, i=1,2,\cdots,n$. 于是在(1)、(2)两式两边取行列式可得

$$|T|^2|A+B|=\prod_{i=1}^{n}(1+\mu_i)\geqslant 1=|T|^2\cdot|B|. \tag{3}$$

消去 $|T|^2$，即得 $|A+B|\geqslant|B|$.

由于(3)式成立等号 $\Longleftrightarrow\prod\limits_{i=1}^{n}(1+\mu_i)=1\Longleftrightarrow\mu_i=0(i=1,2,\cdots,n)\Longleftrightarrow A=0$.

2）在 1）中令 $B=E$ 即可.

813.　设 n 元半正定二次型 f 的矩阵是 A，令

$$V=\{x\in R^{n\times 1}\mid x'Ax=0\},$$

则 $Ax=0$ 的解空间为 V.

证　设 W 为 $Ax=0$ 的解空间，下证 $V=W$.

任取 $x_0\in W$，则 $Ax_0=0, x'_0Ax_0=0$. 所以 $x_0\in V$，即 $W\subseteq V$.

再任取 $y_0\in V$，则 $y'_0Ay_0=0$. 由 A 半正定，故存在半正定矩阵 G，使 $A=G'G=G^2$. 所以 $0=y'_0Ay_0=(Gy_0)'(Gy_0)$. 从而 $Gy_0=$

$0, G^2 y_0 = 0$,即 $Ay_0 = 0$, $y_0 \in W$,此即 $V \subseteq W$.

综上所述,$W = V$.

814. 设 $a_1, \cdots, a_n$ 是互不相等的正数,令 $A = (a_{ij})$,其中 $a_{ij} = \dfrac{1}{a_i + a_j}$,则 A 为正定矩阵.

证 设 A 的 k 阶顺序主子式为 Δ_k,可以证明

$$\Delta_k = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant k} (a_i - a_j)^2 \Big/ \prod_{i,j=1}^{k} (a_i + a_j).$$

由假设知 $\Delta_k > 0 (k = 1, 2, \cdots, n)$. 故 A 为正定矩阵.

815. 设 A 是 n 阶正定矩阵,B 为 n 阶非零半正定矩阵,证明:$|A+B| > |A| + |B|$.

证 由第 **805** 条知存在可逆矩阵 T,使

$$T'AT = E, \qquad T'BT = \mathrm{diag}(\mu_1, \cdots, \mu_n),$$

其中 $\mu_i \geqslant 0, i = 1, 2, \cdots, n$,并至少有一个 $\mu_k > 0$(否则 $B = 0$). 于是

$$T'(A+B)T = \mathrm{diag}(1+\mu_1, \cdots, 1+\mu_n),$$

$$|T|^2 |A+B| = \prod_{i=1}^{n} (1+\mu_i) > 1 + \prod_{i=1}^{n} \mu_i = |T|^2 |A| + |T|^2 |B|.$$

两边消去 $|T|^2$,即得 $|A+B| > |A| + |B|$.

816. 设 A 是 n 阶正定矩阵,B 是 n 阶非零实反对称矩阵,则 $|A+B| > 0$.

证 由 B 是反对称矩阵及由第 **761** 条知 $X'BX = 0$,故由假设 A 为正定矩阵得

$$X'(A+B)X = X'AX > 0, \forall X \neq 0. \tag{1}$$

1) 若 $|A+B| = 0$,则 $(A+B)X = 0$ 有非零解 X_0. 于是 $X'_0(A+B)X_0 = 0$,这与(1)式矛盾.

2) 若 $|A+B| < 0$,则由第 **765** 条知存在 $X_1 \neq 0$,使 $X'_1(A+B)X_1 < 0$,这也与(1)式矛盾.

故 $|A+B| > 0$.

第十章 若当标准形

一、 λ-矩阵

817. 什么叫λ-矩阵?

答 设P是一个数域,λ是一个文字,则称以数域P上λ的多项式作为元素的矩阵为λ—矩阵.记为$A(\lambda)$,$B(\lambda)$等.

818. λ-矩阵有哪些运算?

答 类似于数字矩阵可以定义加法、减法、乘法、数乘、转置等运算.当$A(\lambda)$是方阵时可以定义$A(\lambda)$的伴随矩阵.还可以定义n阶λ—矩阵的行列式,其行列式是λ的一个多项式.

819. 什么叫做λ—矩阵的秩?

答 设$A(\lambda)$是$m\times n$的λ—矩阵.若它有r阶子式不是零多项式,而它的一切$r+1$阶子式都是零多项式,则称$A(\lambda)$的秩为r,记为秩$(A(\lambda))=r$.

当$A(\lambda)=0$时,规定秩$(A(\lambda))=0$.

820. 什么叫做可逆λ—矩阵?

答 设$A(\lambda)$为n阶λ—矩阵.如果存在n阶λ—矩阵$B(\lambda)$使

$$A(\lambda)B(\lambda)=B(\lambda)A(\lambda)=E,$$

那么称$A(\lambda)$是可逆的λ—矩阵,其中E是n阶单位矩阵.

注 ① 由于$A(\lambda)$与$B(\lambda)$地位对称,因此$B(\lambda)$也是可逆的.②可证适合$A(\lambda)B(\lambda)=B(\lambda)A(\lambda)=E$的$B(\lambda)$是唯一的.仿数字矩阵,记$B(\lambda)=A^{-1}(\lambda)$.

821. 设$A(\lambda)$为n阶λ—矩阵,则$A(\lambda)$可逆$\Longleftrightarrow |A(\lambda)|=c$,其中$c$是非零常数.

822. 1)若$A(\lambda)$可逆,则$|A(\lambda)|\neq 0$;

2)若 $n\times n$ 矩阵 $A(\lambda)$ 可逆，则秩 $(A(\lambda))=n$.

注 它们的逆命题不成立. 比如，$A(\lambda)=\text{diag}(\lambda,1)$，$|A(\lambda)|=\lambda\neq0$，且秩 $(A(\lambda))=2$，但由第 **821** 条知 $A(\lambda)$ 不可逆.

823. 设 $A(\lambda)=\begin{bmatrix}1 & \lambda\\ \lambda+1 & \lambda^2+\lambda+2\end{bmatrix}$，求 $A^{-1}(\lambda)$.

解 1

$$A^{-1}(\lambda)=\frac{1}{|A(\lambda)|}(A(\lambda))^*=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\lambda^2+\lambda+2 & -\lambda\\ -(\lambda+1) & 1\end{bmatrix}.$$

解 2 因为

$$\left[\begin{array}{cc:cc}1 & \lambda & 1 & 0\\ \lambda+1 & \lambda^2+\lambda+2 & 0 & 1\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{cc:cc}1 & \lambda & 1 & 0\\ 0 & 2 & -(\lambda+1) & 1\end{array}\right]$$

$$\longrightarrow\left[\begin{array}{cc:cc}1 & 0 & 1+\frac{1}{2}(\lambda+1)\lambda & -\frac{1}{2}\lambda\\ 0 & 2 & -(\lambda+1) & 1\end{array}\right]$$

$$\longrightarrow\left[\begin{array}{cc:cc}1 & 0 & (\lambda^2+\lambda+2)/2 & -\lambda/2\\ 0 & 1 & -(\lambda+1)/2 & 1/2\end{array}\right],$$

所以

$$A^{-1}(\lambda)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\lambda^2+\lambda+2 & -\lambda\\ -(\lambda+1) & 1\end{bmatrix}.$$

解 3 令

$$A^{-1}(\lambda)=\begin{bmatrix}a\lambda^2+b\lambda+c & a_1\lambda^2+b_1\lambda+c_1\\ a_2\lambda^2+b_2\lambda+c_2 & a_3\lambda^2+b_3\lambda+c_3\end{bmatrix},$$

由 $A(\lambda)A^{-1}(\lambda)=E$ 得 $a=b=\frac{1}{2}$，$c=1$，$a_1=0$，$b_1=-\frac{1}{2}$，$c_1=0$，$a_2=0$，$b_2=c_2=-\frac{1}{2}$，$a_3=b_3=0$，$c_3=\frac{1}{2}$.

824. 下列 λ—矩阵中，哪些是满秩的？哪些是可逆的？若可逆试求其逆，若不可逆求出它的秩.

1) $A(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda & 2\lambda+1 & 1\\ 1 & \lambda+1 & \lambda^2+1\\ \lambda-1 & \lambda & -\lambda^2\end{bmatrix}$;

2) $B(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda-1 & \lambda\\ \lambda & \lambda^2\end{bmatrix}$;

3) $C(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda^3-1 & \lambda & \lambda & 0\\ \lambda^2 & 1 & 0 & \lambda\\ 0 & 0 & \lambda^3-1 & \lambda\\ 0 & 0 & \lambda^2 & 1\end{bmatrix}$.

解　1)因为 $|A(\lambda)|=0$,而 $\begin{vmatrix}\lambda & 2\lambda+1\\ 1 & \lambda+1\end{vmatrix}=\lambda^2-\lambda-1\neq 0$,所以秩$(A(\lambda))=2$,$A(\lambda)$不是满秩的,也不可逆.

2) $|B(\lambda)|=\lambda^3-\lambda^2-1$,则 $B(\lambda)$是满秩的,即秩$(B(\lambda))=2$,但 $B(\lambda)$不可逆.

3)令 $D(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda^3-1 & \lambda\\ \lambda^2 & 1\end{bmatrix}$,则

$$C(\lambda)=\begin{bmatrix}D(\lambda) & \begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}\\ 0 & D(\lambda)\end{bmatrix},$$

$|D(\lambda)|=-1$, $|C(\lambda)|=1$,因而 $C(\lambda)$可逆.下面求 $C(\lambda)$的逆:

$$\left[\begin{array}{cc|cc}D(\lambda) & \begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix} & E & 0\\ 0 & D(\lambda) & 0 & E\end{array}\right]$$

$$\longrightarrow\left[\begin{array}{cc|cc}E & D^{-1}(\lambda)\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix} & D^{-1}(\lambda) & 0\\ 0 & E & 0 & D^{-1}(\lambda)\end{array}\right]$$

$$\longrightarrow\left[\begin{array}{cc|cc}E & 0 & D^{-1}(\lambda) & -D^{-1}(\lambda)\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}D^{-1}(\lambda)\\ 0 & E & 0 & D^{-1}(\lambda)\end{array}\right]$$

$$D^{-1}(\lambda)=\begin{bmatrix}-1 & \lambda\\ \lambda^2 & 1-\lambda^3\end{bmatrix}$$

$$D^{-1}(\lambda)\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}D^{-1}(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda^4+\lambda & -\lambda^5\\ -\lambda^6 & \lambda^7-\lambda^4+\lambda\end{bmatrix}$$

$$C^{-1}(\lambda)=\begin{bmatrix}-1 & \lambda & -\lambda^4-\lambda & \lambda^5\\ \lambda^2 & 1-\lambda^3 & \lambda^6 & -\lambda^7+\lambda^4-\lambda\\ 0 & 0 & -1 & \lambda\\ 0 & 0 & \lambda^2 & 1-\lambda^3\end{bmatrix}.$$

二、 λ—矩阵的等价

825. 什么叫做 λ—矩阵的初等变换？

答 下面的三种变换叫做 λ—矩阵的初等变换：

1) 互换两行(或列)；

2) 用一个非零常数乘某一行(或列)；

3) 用某一行(或列)的 $\psi(\lambda)$ 倍，加到另一行(或列)，其中 $\psi(\lambda)\in P[\lambda]$.

注 ① 交换 i,j 两行(列)，相当于左(右)乘 $P(i,j)$.

② 用非零常数 c 乘第 i 行(列)，相当于左(右)乘 $P(i(c))$.

③ 用第 j 行(列)的 $\psi(\lambda)$ 倍加到第 i 行(列)，相当于左(右)乘 $P(i,j(\psi(\lambda)))$.

④ $P(i,j)$，$P(i(c))$，$P(i,j(\psi(\lambda)))$ 统称为初等矩阵，它们都是可逆矩阵，且

$$P(i,j)^{-1}=P(i,j),$$

$$P(i(c))^{-1}=P(i(\frac{1}{c})),$$

$$P(i,j(\psi(\lambda)))^{-1}=P(i,j(-\psi(\lambda))).$$

826. 什么叫做两个 λ—矩阵等价？

答 设 $A(\lambda)$ 和 $B(\lambda)$ 都是 $n\times m$ 的 λ—矩阵，若可以经过一系

列行和列的初等变换将 $A(\lambda)$ 变为 $B(\lambda)$，则称 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 等价，记为 $A(\lambda)\simeq B(\lambda)$.

注 $A(\lambda)\simeq B(\lambda)\Longleftrightarrow$ 存在可逆矩阵 $P(\lambda)$ 和 $Q(\lambda)$，使得

$$P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda)=B(\lambda).$$

827. “$\simeq$”是等价关系.

828. 两个 $\lambda-$矩阵的秩相等，它们是否等价？

答 不一定. 比如，$A(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}$，$B(\lambda)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}$，秩$(A(\lambda))=$秩$(B(\lambda))$，但它们不等价.

三、 行列式因子与不变因子

829. 什么叫做行列式因子？

答 设 $m\times n$ 的 $\lambda-$矩阵 $A(\lambda)$ 的秩为 r，对于正整数 k，$1\leqslant k\leqslant r$，在 $A(\lambda)$ 中所有 k 级子式的首项系数为 1 的最大公因式称为 $A(\lambda)$ 的 k 级行列式因子，记为 $D_k(\lambda)$.

注 当秩$(A(\lambda))=r$ 时，$A(\lambda)$ 有 r 个行列式因子 $D_1(\lambda),\cdots,D_r(\lambda)$.

830. 秩为 $r(\geqslant 1)$ 的 $m\times n$ 的 $\lambda-$矩阵 $A(\lambda)$，则 $A(\lambda)\simeq\begin{bmatrix}H(\lambda) & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，其中 $H(\lambda)=\mathrm{diag}(d_1(\lambda),\cdots,d_r(\lambda))$，$r\geqslant 1$，$d_i(\lambda)(i=1,2,\cdots,r)$ 是首项系数为 1 的多项式，且 $d_i(\lambda)\mid d_{i+1}(\lambda)\ (i=1,2,\cdots,r-1)$.

注 ① 上面的 $\begin{bmatrix}H(\lambda) & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ 称为 $A(\lambda)$ 的标准形.

② 上面的 $d_1(\lambda),\cdots,d_r(\lambda)$ 称为 $A(\lambda)$ 的不变因子.

831. $\lambda-$矩阵经初等变换后哪些量保持不变？

答 秩、行列式因子、不变因子保持不变.

832. $\lambda-$矩阵的标准形是唯一的.

833.　试叙述λ—矩阵等价的充要条件.

答　设$A(\lambda)$与$B(\lambda)$都是$n\times m$的λ—矩阵,则$A(\lambda)\simeq B(\lambda)$ $\Longleftrightarrow P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda)=B(\lambda)$,其中$P(\lambda)$和$Q(\lambda)$都是可逆矩阵$\Longleftrightarrow$ $A(\lambda)$与$B(\lambda)$有相同的标准形$\Longleftrightarrow A(\lambda)$与$B(\lambda)$有相同的行列式因子$\Longleftrightarrow A(\lambda)$与$B(\lambda)$有相同的不变因子.

834.　行列式因子与不变因子之间有什么关系?

答　设秩$(A(\lambda))=r$,$A(\lambda)$的行列式因子为$D_1(\lambda),\cdots,D_r(\lambda)$,不变因子为$d_1(\lambda),\cdots,d_r(\lambda)$,则

$$D_k(\lambda)=d_1(\lambda)\cdots d_k(\lambda),k=1,2,\cdots,r;$$

$$d_1(\lambda)=D_1(\lambda),d_k(\lambda)=\frac{D_k(\lambda)}{D_{k-1}(\lambda)},k=2,3,\cdots,r.$$

注　两者相互唯一决定.

835.　求矩阵

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix}1-\lambda & \lambda^2 & \lambda\\ \lambda & \lambda & -\lambda\\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2\end{bmatrix}$$

的标准形.

解　因为

$$A(\lambda)\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & \lambda^2 & \lambda\\ 0 & \lambda & -\lambda\\ 1 & \lambda^2 & -\lambda^2\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & \lambda^2 & \lambda\\ 0 & \lambda & -\lambda\\ 0 & 0 & -\lambda^2-\lambda\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & \lambda^2+\lambda\\ 0 & \lambda & -\lambda\\ 0 & 0 & \lambda^2+\lambda\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda^2+\lambda\end{bmatrix},$$

所以,$A(\lambda)$的标准形为$\mathrm{diag}(1,\lambda,\lambda^2+\lambda)$.

836.　设n阶λ—矩阵$A(\lambda)$中有一个$n-1$阶子式等于非零常数,则$A(\lambda)$的n个不变因子为$1,\cdots,1,c|A(\lambda)|$,即$A(\lambda)$的标准形为$\mathrm{diag}(1,\cdots,1,c|A(\lambda)|)$,其中$c$为$|A(\lambda)|$的首项系数的倒

数.

证　由假设知 $D_{n-1}(\lambda)=1=d_1(\lambda)=\cdots=d_{n-1}(\lambda)$.

由于 $A(\lambda)$ 仅有一个 n 阶子式为 $|A(\lambda)|$，但 $D_n(\lambda)$ 的首项系数为 1，故取 c 为 $|A(\lambda)|$ 的首项系数的倒数得

$$D_n(\lambda)=d_n(\lambda)=c|A(\lambda)|.$$

837.　设两 λ—矩阵为

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix} f_1(\lambda)g_1(\lambda) & 0 \\ 0 & f_2(\lambda)g_2(\lambda) \end{bmatrix},$$

$$B(\lambda)=\begin{bmatrix} f_2(\lambda)g_1(\lambda) & 0 \\ 0 & f_1(\lambda)g_2(\lambda) \end{bmatrix},$$

如果 $f_1(\lambda),f_2(\lambda)$ 都与 $g_1(\lambda),g_2(\lambda)$ 互素，那么 $A(\lambda)\simeq B(\lambda)$.

注　这一结论可以推广如下：设

$$A(\lambda)=\mathrm{diag}(f_1(\lambda)g_1(\lambda),f_2(\lambda)g_2(\lambda),\cdots,f_n(\lambda)g_n(\lambda)),$$

$$B(\lambda)=\mathrm{diag}(f_{i_1}(\lambda)g_1(\lambda),f_{i_2}(\lambda)g_2(\lambda),\cdots f_{i_n}(\lambda)g_n(\lambda)),$$

$f_1(\lambda),\cdots,f_n(\lambda)$ 都与 $g_1(\lambda),\cdots,g_n(\lambda)$ 互素，则 $A(\lambda)\simeq B(\lambda)$，其中 $f_{i_1}(\lambda),\cdots,f_{i_n}(\lambda)$ 为 $f_1(\lambda),\cdots,f_n(\lambda)$ 的任一排列.

838.　如果 $f_1(\lambda),\cdots,f_n(\lambda)$ 两两互素，那么

$$\mathrm{diag}(f_1(\lambda),\cdots,f_n(\lambda))\simeq\mathrm{diag}(1,\cdots,1,f_1(\lambda)f_2(\lambda)\cdots f_n(\lambda)).$$

证　用数学归纳法，当 $n=2$ 时，令

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix} f_1(\lambda) & 0 \\ 0 & f_2(\lambda) \end{bmatrix},B(\lambda)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f_1(\lambda)f_2(\lambda) \end{bmatrix},$$

则由假设及第 837 条得 $A(\lambda)\simeq B(\lambda)$.

归纳假定命题对 $n-1$ 成立，于是

$$\mathrm{diag}(f_1(\lambda),\cdots,f_{n-1}(\lambda),f_n(\lambda))\simeq$$
$$\mathrm{diag}(1,\cdots,1,f_1(\lambda)\cdots f_{n-1}(\lambda),f_n(\lambda))\simeq$$
$$\mathrm{diag}(1,\cdots,1,1,f_1(\lambda)\cdots f_{n-1}(\lambda)f_n(\lambda))$$

归纳法完成.

839. 设 $A(\lambda)=\mathrm{diag}(x-a_1,\cdots,x-a_n)$，其中 $a_1,\cdots,a_n$ 互不相同，则 $A(\lambda)$的不变因子为 $1,\cdots,1,(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$.

证 由第 838 条可得.

840. 求矩阵

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix} 2\lambda & 3 & 0 & 1 & \lambda \\ 4\lambda & 3\lambda+6 & 0 & \lambda+2 & 2\lambda \\ 0 & 6\lambda & \lambda & 2\lambda & 0 \\ \lambda-1 & 0 & \lambda-1 & 0 & 0 \\ 3\lambda-3 & 1-\lambda & 2\lambda-2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

的标准形.

解 因为

$$A(\lambda)\longrightarrow\begin{bmatrix} 2\lambda & 3 & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 3\lambda & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 6\lambda & \lambda & 2\lambda & 0 \\ \lambda-1 & 0 & \lambda-1 & 0 & 0 \\ 3\lambda-3 & 1-\lambda & 2\lambda-2 & 0 & 0 \end{bmatrix}\longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 2\lambda & 0 \\ \lambda-1 & 0 & \lambda-1 & 0 & 0 \\ 3\lambda-3 & 1-\lambda & 2\lambda-2 & 0 & 0 \end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda-1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda-1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \lambda^2 & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \lambda-1 & \\ & & & & \lambda-1 \end{bmatrix}\longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \lambda(\lambda-1) & \\ & & & & \lambda^2(\lambda-1) \end{bmatrix},$$

所以 $A(\lambda)$的标准形为 $\mathrm{diag}(1,1,1,\lambda(\lambda-1),\lambda^2(\lambda-1))$.

841. 设 A,B 是两个 n 阶方阵,A 与 B 合同,则 $\lambda A-A'$ 与 $\lambda B-B'$ 等价.

证 由假设知存在可逆矩阵 T 使 $B=TAT'$,从而 $\lambda B-B'=\lambda TAT'-TA'T'=T(\lambda A-A')T'$. 所以 $\lambda B-B'\simeq\lambda A-A'$.

842. 设 $A(\lambda)=\mathrm{diag}(\lambda-\alpha,\lambda-\alpha,\lambda-\alpha)$,

$$B(\lambda)=\begin{bmatrix} \beta^2 & 1 & 0 \\ 0 & \beta^2 & 1 \\ 0 & 0 & \beta^2 \end{bmatrix},$$

$$C(\lambda)=\begin{bmatrix} (\lambda-\alpha)^2+\beta^2 & 1 & 0 \\ 0 & (\lambda-\alpha)^2+\beta^2 & 1 \\ 0 & 0 & (\lambda-\alpha)^2+\beta^2 \end{bmatrix},$$

$$M(\lambda)=\begin{bmatrix} A(\lambda) & -E \\ B(\lambda) & A(\lambda) \end{bmatrix},H(\lambda)=\begin{bmatrix} -E & 0 \\ 0 & C(\lambda) \end{bmatrix},$$

则

1) $M(\lambda)\simeq H(\lambda)$;

2) $M(\lambda)$的不变因子为:

$$d_i(\lambda)=1(1\leqslant i\leqslant 5),d_6(\lambda)=[(\lambda-\alpha)^2+\beta^2]^3.$$

解 1)

$$M(\lambda)=\begin{bmatrix} A(\lambda) & -E \\ B(\lambda) & A(\lambda) \end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix} E & -A(\lambda) \\ A(\lambda) & B(\lambda) \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix} E & -A(\lambda) \\ 0 & B(\lambda)+A^2(\lambda) \end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & B(\lambda)+A^2(\lambda) \end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix} -E & 0 \\ 0 & C(\lambda) \end{bmatrix}$$

即　$M(\lambda)\simeq H(\lambda)$.

2) 在 $C(\lambda)$ 中有一个 2 阶子式等于 -1，从而 $H(\lambda)$ 中有一个 5 阶子式等于 -1. 这样 $M(\lambda)$ 的 5 阶行列式因子 $D_5(\lambda)=1$，故它的 5 个不变因子为 $d_1(\lambda)=\cdots=d_5(\lambda)=1$，最后一个不变因子 $d_6(\lambda)=|M(\lambda)|=[(\lambda-\alpha)^2+\beta^2]^3$.

843.　求矩阵

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ -1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & -1 & \lambda & \cdots & 0 & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda+a_1 \end{bmatrix}$$

的不变因子与行列式因子.

解　由于 $A(\lambda)$ 的左下角有一个 $n-1$ 阶子式等于非零常数 $(-1)^{n-1}$，故 $D_{n-1}(\lambda)=1$. 从而

$$d_1(\lambda)=\cdots=d_{n-1}(\lambda)=1.$$

而 $|A(\lambda)|=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=f(\lambda)$，故

$$d_n(\lambda)=D_n(\lambda)=f(\lambda).$$

844.　设

$$A(\lambda)\simeq\mathrm{diag}(1,\lambda^2(\lambda^2+1)(\lambda^2-2),\lambda^2(\lambda^2+1)(\lambda-2)^2,0),$$

求秩$(A(\lambda))$与 $A(\lambda)$ 的标准形.

解　由假设知秩$(A(\lambda))=3$. 再由第 837 条知 $A(\lambda)$ 的标准形为 $\mathrm{diag}(1,\lambda^2(\lambda^2+1),\lambda^2(\lambda^2+1)(\lambda^2-2)(\lambda-2)^2,0)$

845.　求矩阵

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix} \lambda-3 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & \lambda+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

的标准形.

解 令

$$B(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda-3 & -1\\ 4 & \lambda+1\end{bmatrix},C(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda+2 & -1\\ 1 & \lambda\end{bmatrix}.$$

先求得 $B(\lambda)$的标准形为 $\mathrm{diag}(1,|B(\lambda)|)=\mathrm{diag}(1,(\lambda-1)^2)$，$C(\lambda)$的标准形为 $\mathrm{diag}(1,(\lambda+1)^2)$. 于是 $A(\lambda)\simeq\mathrm{diag}(1,(\lambda-1)^2,1,(\lambda+1)^2)$. 从而 $A(\lambda)$的标准形为 $\mathrm{diag}(1,1,1,(\lambda^2-1)^2)$.

846. 求矩阵

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & \lambda+2\\ 0 & 1 & \lambda+2 & 0\\ 1 & \lambda+2 & 0 & 0\\ \lambda+2 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

的标准形.

解 因为左上角有一个三阶子式等于-1，所以 $D_3(\lambda)=1$，从而 $d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=d_3(\lambda)=1$. 易见 $D_4(\lambda)=(\lambda+2)^4=|A(\lambda)|$. 这样 $A(\lambda)$的标准形为 $\mathrm{diag}(1,1,1,(\lambda+2)^4)$.

四、 方阵的初等因子

847. 什么叫做方阵的初等因子?

答 设 A 为 $n\times n$ 矩阵，把 A 的每个次数大于零的不变因子分解成互不相同的一次因式之方幂的乘积，所有这些一次因式的方幂(相同的按出现的次数计算)称为 A 的初等因子.

注 ① A 的特征矩阵 $\lambda E-A$ 的 n 个不变因子 $d_1(\lambda),\cdots,d_n(\lambda)$称为 A 的不变因子.

② A 的初等因子与不变因子相互唯一决定(如果不计初等因子的秩序).

③ $\sum_{i=1}^{n}\partial(d_i(\lambda))=$所有初等因子的次数和$=n$.

848. 求矩阵

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix}3 & 0 & 8\\ 3 & -1 & 6\\ -2 & 0 & -5\end{bmatrix}$$

的初等因子.

解　因为

$$\lambda E-A=\begin{bmatrix}\lambda-3 & 0 & -8\\ -3 & \lambda+1 & -6\\ 2 & 0 & \lambda+5\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}\lambda-3 & 0 & -8\\ -1 & \lambda+1 & \lambda-1\\ 2 & 0 & \lambda+5\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}0 & (\lambda-3)(\lambda+1) & (\lambda-1)(\lambda-3)-8\\ -1 & \lambda+1 & \lambda-1\\ 0 & 2\lambda+2 & 3\lambda+3\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & (\lambda-3)(\lambda+1) & (\lambda-1)(\lambda-3)-8\\ 0 & 2(\lambda+1) & 3(\lambda+1)\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & (\lambda-3)(\lambda+1) & -\frac{1}{2}\lambda^2-\lambda-\frac{1}{2}\\ 0 & \lambda+1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda^2+2\lambda+1\\ 0 & \lambda+1 & 0\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & & \\ & \lambda+1 & \\ & & (\lambda+1)^2\end{bmatrix},$$

故 $d_1(\lambda)=1, d_2(\lambda)=\lambda+1, d_3(\lambda)=(\lambda+1)^2$. A 的初等因子为 $\lambda+1,(\lambda+1)^2$.

849.　求矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & -3 & 6\\ 2 & -2 & 4\end{bmatrix}$$

的初等因子.

解 容易算得 $\lambda E-A\simeq \mathrm{diag}(1,\lambda,\lambda(\lambda-2))$. 故 A 的初等因子为 $\lambda,\lambda,\lambda-2$.

850. 设 $\lambda E-A\simeq \mathrm{diag}(f_1(\lambda),\cdots,f_n(\lambda))$. 将次数大于 0 的 $f_i(\lambda)$ 分成首项系数为 1 的一次方幂之积. 这些一次方幂的全体(相同的要计重复数)就是 A 的全部初等因子.

851. 设 A 的不变因子为 $d_1(\lambda),\cdots,d_n(\lambda)$, 则

$$|\lambda E-A|=\prod_{i=1}^{n} d_i(\lambda).$$

证 $\lambda E-A\simeq \mathrm{diag}(d_1(\lambda),\cdots,d_n(\lambda))$, 即存在可逆矩阵 $P(\lambda)$, $Q(\lambda)$, $P(\lambda)(\lambda E-A)Q(\lambda)=\mathrm{diag}(d_1(\lambda),\cdots,d_n(\lambda))$. 两边取行列式即得结论.

852. 设 A 为 n 阶方阵, 它的初等因子为 $\lambda,\lambda+1,\lambda-1,\lambda^2,\lambda+2i,(\lambda-2i)^2$, 求 n、$\lambda E-A$ 的标准形与特征多项式 $|\lambda E-A|$.

解 1) $n=$ 所有初等因子的次数和 $=8$, 即 A 为 8 阶矩阵.

2) $\lambda E-A$ 的 8 个不变因子为 $d_1(\lambda)=\cdots=d_6(\lambda)=1, d_7(\lambda)=\lambda, d_8(\lambda)=\lambda^2(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda+2i)(\lambda-2i)^2$.

故 $\lambda E-A$ 的标准形为 $\mathrm{diag}(1,\cdots,1,\lambda,\lambda^2(\lambda^2-1)(\lambda^2+4)(\lambda-2i))$.

3) $|\lambda E-A|=$ 所有初等因子之积 $=\prod\limits_{i=1}^{8} d_i(\lambda)$

$$=\lambda^3(\lambda^2-1)(\lambda^2+4)(\lambda-2i).$$

853. 设若当块

$$J_0=\begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 & & & \\ & \lambda_0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_0 \end{bmatrix}_{n\times n},$$

则

1) J_0 的初等因子为$(\lambda-\lambda_0)^n$;

2) J_0 的不变因子为 $1,1,\cdots,1,(\lambda-\lambda_0)^n$.

854. 设 $n\times n$ 矩阵 $A=\mathrm{diag}(J_1,J_2,\cdots,J_s)$，其中

$$J_i=\begin{bmatrix}\lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i\end{bmatrix}_{n_i\times n_i},i=1,2,\cdots,s;\sum_{i=1}^{s}n_i=n,$$

则 A 的初等因子为$(\lambda-\lambda_1)^{n_1},\cdots,(\lambda-\lambda_s)^{n_s}$.

注 ① 初等因子所含一次方幂的个数与若当块的个数相等，或者说每一个初等因子对应一个若当块.

② 初等因子相同的方阵相似，且具有相同的 Jordan 标准形.

五、 矩阵相似的条件

855. 设 A,B 都是 n 阶方阵，则下面几条等价：

1) $A\sim B$;

2) $\lambda E-A\simeq\lambda E-B$;

3) A 与 B 有相同的初等因子;

4) A 与 B 有相同的不变因子;

5) $\lambda E-A$ 与 $\lambda E-B$ 有相同的标准形;

6) A,B 是 n 维线性空间中，同一个线性变换在两组基下所对应的矩阵.

注 $A\sim B\Longleftrightarrow$存在可逆矩阵 T，使 $B=T^{-1}AT$. 然而找 T 非常困难，因此证明 $A\sim B$，常常分别求出 $\lambda E-A$ 与 $\lambda E-B$ 的标准形，如果标准形一致，那么 $A\sim B$，否则 A 与 B 不相似.

856. A 与 B 相似的常用的必要但不是充分的条件有哪些?

答 设 $A\sim B$，则

1) $|A|=|B|$;　　　　2) $\mathrm{tr}A=\mathrm{tr}B$;

3) $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$;　　　4) $A\simeq B$;

5) 秩 $A=$ 秩 B;　　　6) $m_A(\lambda)=m_B(\lambda)$.

857. 下列 B,C,D 中,哪些与 $A=\text{diag}(1,2,-1)$ 相似?其中

$$B=\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&2&0\\0&0&3\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&2\end{bmatrix},D=\text{diag}(-2,1,1).$$

解1 $\lambda E-A\simeq\text{diag}(\lambda-1,\lambda-2,\lambda+1)$,$A$ 的初等因子为

$$\lambda-1,\lambda-2,\lambda+1.$$

$\lambda E-B\simeq\text{diag}(1,\lambda^2-3\lambda+1,\lambda-3)$,$B$ 的不变因子为

$$1,1,(\lambda-3)(\lambda^2-3\lambda+1).$$

$\lambda E-C\simeq\text{diag}(1,\lambda^2-1,\lambda-2)$,$C$ 的初等因子为

$$\lambda+1,\lambda-1,\lambda-2.$$

$\lambda E-D\simeq\text{diag}(\lambda+2,\lambda-1,\lambda-1)$,$D$ 的初等因子为

$$\lambda-1,\lambda-1,\lambda+2.$$

故仅有 $A\sim C$.

解2 由于 $\text{tr}B=6,\text{tr}D=0,\text{tr}A=2$,因此 B,D 都与 A 不相似.再求 $\lambda E-A$ 与 $\lambda E-C$ 的不变因子可知 $A\sim C$.

858. 1) n 阶方阵 A 与 $cE+A$ 不相似,其中常数 $c\neq0$;

2) 对任意 n 阶方阵 $A,B,AB-BA$ 不相似于 cE　$(c\neq0)$.

证 1) 用反证法.若 $A\sim cE+A$,则 $\text{tr}A=\text{tr}(cE+A)=nc+\text{tr}A$,所以 $c=0$,矛盾.

2) 若 $AB-BA\sim cE$,则 $\text{tr}(AB-BA)=\text{tr}cE$.所以 $nc=0,c=0$,矛盾.

859. 若 $A\sim B$,则 $A'\sim B'$.

证 $A\sim B$,由第 **214** 条知 $A\sim A',B\sim B'$.由于相似关系是等价关系,故 $A'\sim B'$.

860. 设 $AP=PA,BT=TB$,其中 A,P 为 $n\times n$ 矩阵,B,T 为 $m\times m$ 矩阵,P,T 都是可逆矩阵,则 $\text{diag}(A,B)\sim\text{diag}(B,A)$.

证 令 $H=\begin{bmatrix}0 & P\\ T & 0\end{bmatrix}$，则 $\begin{bmatrix}A & \\ & B\end{bmatrix}H=H\begin{bmatrix}B & \\ & A\end{bmatrix}$.

故 $H^{-1}\begin{bmatrix}A & \\ & B\end{bmatrix}H=\begin{bmatrix}B & \\ & A\end{bmatrix}$.

861. 同时交换方阵 A 的第 i,j 两行及第 i,j 两列所得的矩阵 B 与 A 相似.

862. 设 $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$， $B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，问 A 是否与 B 相似？若相似，求 T 使 $B=T^{-1}AT$.

解 由于 $\lambda E-A\simeq\text{diag}(1,(\lambda-1)^2)$，

$$\lambda E-B\simeq\text{diag}(1,(\lambda-1)^2).$$

故 $A\sim B$.

令 $T=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix}$，由 $AT=TB$ 得方程组

$$\begin{cases}x_1 + x_3 = 0,\\ x_1 - x_2 - x_4 = 0,\\ x_2 + x_3 + x_4 = 0.\end{cases}$$

令 $x_3=-1, x_4=1$，得 $x_1=1, x_2=0$. 从而得

$$T=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}.$$

注 T 不是唯一的. 令 $x_3=1, x_4=0$，得 $x_2=-1, x_1=-1$. 从而又得 $T=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$.

863. 线性变换 ψ 在三维线性空间 V 的基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵为 A. 问 B,C 是否为 ψ 在 V 的其它基下的矩阵？其中

$$A=\begin{bmatrix}1 & 4 & 3\\ -1 & 1 & -1\\ 0 & 5 & 0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 4 & 1 & 5\\ 3 & -1 & 0\end{bmatrix}.$$

解 由于

$$\lambda E-A\simeq \mathrm{diag}(1,1,\lambda(\lambda^2-2\lambda+10)),$$

$$\lambda E-B\simeq \mathrm{diag}(1,1,(\lambda-1)^3),$$

故 A,B 不相似. 因而 B 不是 ψ 在 V 的另一组基下的矩阵.

因为 $C=A'$,所以 $A\sim C$. 故 C 是 ψ 在 V 的某一组基下的矩阵.

864. 设 A,B 是两个 $n\times n$ 实矩阵. 如果存在可逆实矩阵 P 使 $A=P^{-1}BP$,那么称 A 与 B 是实相似的. 如果存在可逆复矩阵 Q 使 $A=Q^{-1}BQ$,那么称 A 与 B 是复相似的. 则 A 和 B 实相似 $\Longleftrightarrow A$ 和 B 复相似.

证 必要性 显然.

充分性 设存在 $Q=C+Di$,使 $A=Q^{-1}BQ$,其中 C,D 均为实方阵,那么由 $QA=BQ$ 得 $CA=BC,DA=BD$. 因为 $|C+iD|\neq 0$,所以 $|C+\lambda D|$ 不是零多项式,因而仅有有限个根,故存在实数 a 使 $|C+aD|\neq 0$. 令 $T=C+aD$,则 T 为实可逆矩阵,且 $TA=BT$,即 $A=T^{-1}BT$.

六、 最小多项式

865. 什么叫做零化多项式?

答 设 A 是数域 P 上一个 n 阶方阵,若存在非零多项式 $g(x)\in P[x]$,使 $g(A)=0$,则称 $g(x)$ 为 A 的一个零化多项式,并且称 $g(x)$ 以 A 为根.

866. A 是 n 阶方阵,则 A 的零化多项式一定存在.

证 1 设 A 的特征多项式为 $f(\lambda)=|\lambda E-A|$,则由 Cayley-Hamilton 定理得 $f(A)=0$.

证 2 设数域 P 上一切 n 阶方阵所成的线性空间为 M_n,则 $\dim M_n=n^2$. M_n 的 n^2+1 个方阵 $E,A,A^2,\cdots,A^{n^2}$ 必线性相关,即存

在不全为零的 $k_1,\cdots,k_{n^2+1}$ 使

$$k_1E+k_2A+\cdots+k_{n^2+1}A^{n^2}=0.$$

令 $\qquad g(x)=k_1+k_2x+\cdots+k_{n^2+1}x^{n^2}$，则 $g(x)$ 即为所求。

注　零化多项式不是唯一的. 比如，若 $h(x)$ 是 A 的一个零化多项式，则 $h(x)g(x)$ 也是，其中 $g(x)$ 是任意非零多项式.

867. 什么叫做最小多项式？

答　方阵 A 的次数最低的且首项系数为 1 的零化多项式称为 A 的最小多项式，记为 $m_A(x)$. 在不引起混淆时也记为 $m(x)$.

868. 若 $m(x)$ 为 A 的最小多项式，则对 A 的任意一个零化多项式 $g(x)$ 都有 $m(x)\mid g(x)$.

注　设 A 的特征多项式为 $f(x)=|xE-A|$，则

$$m(x)\mid f(x).$$

869.　矩阵 A 的最小多项式是唯一的.

870.　设 $A=\mathrm{diag}(A_1,A_2)$，设 A,A_1,A_2 的最小多项式分别为 $m(x),m_1(x),m_2(x)$，则

$$m(x)=[m_1(x),m_2(x)]=\frac{m_1(x)m_2(x)}{(m_1(x),m_2(x))}.$$

871.　若 $A\sim B$，则 $m_A(x)=m_B(x)$.

证　设 $m_A(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$. 由假设知 $B=T^{-1}AT$，所以 $B^k=T^{-1}A^kT$. 于是

$$\begin{aligned}m_A(B)&=T^{-1}A^nT+a_{n-1}T^{-1}A^{n-1}T+\cdots+a_1T^{-1}AT+a_0E\\&=T^{-1}(m_A(A))T=0,\end{aligned}$$

故 $m_B(x)\mid m_A(x)$.

类似地可得 $m_A(x)\mid m_B(x)$，从而 $m_A(x)=m_B(x)$.

注　此命题之逆不成立. 比如，

$$A=\begin{bmatrix}1&1&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&1&&\\&1&&\\&&1&1\\&&&1\end{bmatrix},$$

$m_A(x)=m_B(x)=(x-1)^2$，但 A 与 B 不相似.

872. 设 $J=\begin{bmatrix} a & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & a \end{bmatrix}_{n\times n}$ 为若当块，则

$m_J(x)=(x-a)^n$.

873. n 阶方阵 A 的最小多项式等于它的最后一个不变因子 $d_n(\lambda)$.

证 设 A 的全部初等因子为

$$\begin{cases} (\lambda-\lambda_1)^{n_{11}},\cdots,(\lambda-\lambda_1)^{n_{1r_1}}, & n_{11}\leqslant\cdots\leqslant n_{1r_1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ (\lambda-\lambda_s)^{n_{s1}},\cdots,(\lambda-\lambda_s)^{n_{sr_s}}, & n_{s1}\leqslant\cdots\leqslant n_{sr_s}, \end{cases}$$

其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 互不相同，则 $d_n(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{n_{1r_1}}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{n_{sr_s}}$.

另一方面，由若当定理知 $A\sim J=\mathrm{diag}(J_{1n_{11}},\cdots,J_{sn_{sr_s}})$，

其中

$$J_{ij}=\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{j\times j},\quad i=1,2,\cdots,s;\ j=1,2,\cdots,n_{ir_i},$$

而　$m_{J_{ij}}(\lambda)=(\lambda-\lambda_i)^j$. 由第 **870** 及第 **871** 条，则

$$m_A(\lambda)=[(\lambda-\lambda_1)^{n_{11}},\cdots,(\lambda-\lambda_1)^{n_{1r_1}},\cdots,(\lambda-\lambda_s)^{n_{s1}},\cdots,(\lambda-\lambda_s)^{n_{sr_s}}]$$
$$=(\lambda-\lambda_1)^{n_{1r_1}}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{n_{sr_s}}=d_n(\lambda).$$

874. 求矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

的最小多项式.

解 1　由于 $\lambda E-A\simeq \mathrm{diag}(1,1,\lambda,\lambda^2(\lambda-1))$，故

$$m_A(\lambda)=\lambda^2(\lambda-1).$$

解 2　由于 $f(\lambda)=|\lambda E-A|=\lambda^3(\lambda-1)$，而 $m(\lambda)\mid f(\lambda)$，且 $m(\lambda)$ 与 $f(\lambda)$ 有相同的根，因此 $m(\lambda)$ 有三种可能情形，即 $\lambda(\lambda-1)$，$\lambda^2(\lambda-1)$，$\lambda^3(\lambda-1)$. 从次数较低的验算起，得 $m(\lambda)=\lambda^2(\lambda-1)$.

875.　设 A,B 都是 $2n$ 阶方阵，$a\neq 0$，求它们的最小多项式 $m_A(\lambda)$ 和 $m_B(\lambda)$，其中

$$A=\begin{bmatrix} & & & a\\ & & a & \\ & \iddots & & \\ a & & & \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} b & & & & & a\\ & b & & & a & \\ & & \ddots & \iddots & & \\ & & \iddots & \ddots & & \\ a & & & & & b\end{bmatrix}$$

解　易得 $A^2=a^2E$. 因此 $g(\lambda)=\lambda^2-a^2$ 为 A 的零化多项式. 由 $m_A(\lambda)\mid g(\lambda)$ 知 $m_A(\lambda)=\lambda-a$ 或 $\lambda+a$ 或 λ^2-a^2，经验算 $m_A(\lambda)=\lambda^2-a^2$.

因为　$B-bE=A$，$(B-bE)^2=A^2=a^2E$，所以

$$\psi(\lambda)=(\lambda-b)^2-a^2$$

为 B 的零化多项式. 于是 $\psi(\lambda)$ 的首项系数为 1 的因式为 1，$\lambda-b+a$，$\lambda-b-a$，$(\lambda-b)^2-a^2$. 经验算知 $m_B(\lambda)=(\lambda-b)^2-a^2$.

876.　n 阶方阵 A 的元素均为 1，求它的最小多项式.

解　因为 $A^2=nA$，所以 $g(\lambda)=\lambda^2-n\lambda$ 为其零化多项式. 于是 $g(\lambda)$ 的首项系数为 1 的因式为 $1,\lambda,\lambda-n$ 和 $\lambda^2-n\lambda$. 经验算 $m_A(\lambda)=\lambda^2-n\lambda$.

877.　求矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

的最小多项式.

解 令 $B=\begin{bmatrix}2&3\\0&2\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}4&2\\1&3\end{bmatrix}$, 则 $A=\mathrm{diag}(B,C)$. $m_B(\lambda)=(\lambda-2)^2$, $m_C(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-5)$. 由第 **870** 条,

$$m_A(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda-5).$$

878. 设

$$A=\begin{bmatrix}2&&\\&2&\\&&2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2&1&\\&2&\\&&2\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}2&1&\\&2&1\\&&2\end{bmatrix}.$$

求 A,B,C 的特征多项式和最小多项式.

解 $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|=|\lambda E-C|=(\lambda-2)^3$.

$$m_A(\lambda)=\lambda-2, m_B(\lambda)=(\lambda-2)^2, m_C(\lambda)=(\lambda-2)^3.$$

879. 已知 3 阶方阵 A 的特征值为 $1,-1,2$, $B=A^3-5A^2$, 试求 B 的最小多项式.

解 易算得 B 的三个特征值为 $-4,-6,-12$, 且互异. 因此 $m_B(\lambda)=(\lambda+4)(\lambda+6)(\lambda+12)$.

880. 求矩阵

$$A=\begin{bmatrix}3&-1&-3&1\\-1&3&1&-3\\3&-1&-3&1\\-1&3&1&-3\end{bmatrix}$$

的最小多项式.

解 1 令 $B=\begin{bmatrix}3&-1\\-1&3\end{bmatrix}$, 则 $A=\begin{bmatrix}B&-B\\B&-B\end{bmatrix}$.

又 $A^2=0$, λ^2 是 A 的零化多项式. 但 $A\neq 0$, 故 $m_A(\lambda)=\lambda^2$.

解 2 $|\lambda E-A|=\lambda^4$. A 的最小多项式为 $\lambda,\lambda^2,\lambda^3,\lambda^4$ 之一. 经验算 $m_A(\lambda)=\lambda^2$.

解 3 由 $\lambda E-A\simeq\mathrm{diag}(1,1,\lambda^2,\lambda^2)$ 得 $m_A(\lambda)=\lambda^2$.

881.　设 A 的特征多项式与最小多项式分别为 $f(\lambda)=|\lambda E-A|$ 与 $m(\lambda)$. 又设 $f(\lambda)$ 的根集（不计重数）为 M_1，$m(\lambda)$ 的根集（不计重数）为 M_2，则 $M_1=M_2$.

证　由 $m(\lambda)|f(\lambda)$ 得 $M_2\subseteq M_1$.

设 $\lambda E-A$ 的不变因子为 $d_1(\lambda),\cdots,d_n(\lambda)$，

$$f(\lambda)=|\lambda E-A|=d_1(\lambda)\cdots d_n(\lambda).$$

任取 $\alpha\in M_1$，$o=f(\alpha)=d_1(\alpha)\cdots d_n(\alpha)$，不妨设 $d_i(\alpha)=0$，但 $d_i(\lambda)$ 整除 $d_n(\lambda)$，故 $d_n(\alpha)=0$. 但 $d_n(\lambda)=m(\lambda)$，所以 $\alpha\in M_2$，即 $M_1\subseteq M_2$. 故 $M_1=M_2$.

注　$f(\lambda)$ 与 $m(\lambda)$ 的根集相同，但根的重数可能不同.

882.　设 A 的特征多项式和最小多项式分别为 $f(\lambda)$ 与 $m(\lambda)$，则 $f(\lambda)=m(\lambda)\Longleftrightarrow d_{n-1}(\lambda)=1$.

证　必要性　$f(\lambda)=d_1(\lambda)\cdots d_n(\lambda)=m(\lambda)=d_n(\lambda)$，故 $d_1(\lambda)=\cdots=d_{n-1}(\lambda)=1$.

充分性　由 $d_i(\lambda)|d_{n-1}(\lambda)$，$(i=1,2,\cdots,n-2)$ 知 $d_1(\lambda)=\cdots=d_{n-1}(\lambda)=1$，故 $f(\lambda)=d_1(\lambda)\cdots d_{n-1}(\lambda)d_n(\lambda)=d_n(\lambda)=m(\lambda)$.

注　当 $f(\lambda)=m(\lambda)$ 时，$\lambda E-A\simeq\mathrm{diag}(1,\cdots,1,|\lambda E-A|)$.

883.　若 $|\lambda E-A|$ 的根互不相同，则 A 的特征多项式等于 A 的最小多项式.

证　$|\lambda E-A|=(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_n)$，其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 互不相同，故由第 **881** 条知 $m_A(\lambda)=|\lambda E-A|$.

884.　求矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\3&4&5&6\\4&5&6&7\end{bmatrix}\text{和 }B=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\\3&4&1&2\\2&3&4&1\end{bmatrix}$$

的最小多项式.

解　因为 $\lambda E-A\simeq\mathrm{diag}(1,1,\lambda,\lambda^3-16\lambda^2-20\lambda)$，所以

$$m_A(\lambda)=\lambda^3-16\lambda^2-20\lambda.$$

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & -3 & 4\\ 4 & \lambda-1 & -2 & -3\\ -3 & 4 & \lambda-1 & -2\\ -2 & -3 & -4 & \lambda-1\end{vmatrix}$$

是循环行列式. 令 $g(x)=(\lambda-1)-2x-3x^2-4x^3$,则

$$\begin{aligned}|\lambda E-B|&=g(1)g(-1)g(i)g(-i)\\&=(\lambda-10)(\lambda+2)(\lambda+2+2i)(\lambda+2-2i);\end{aligned}$$

由第 **883** 条知

$$m_B(\lambda)=(\lambda-10)(\lambda+2)(\lambda+2+2i)(\lambda+2-2i).$$

885.

设 $A=\begin{bmatrix}1 & \alpha & 1\\ \alpha & 1 & \beta\\ 1 & \beta & 1\end{bmatrix}$ 相似于 $B=\begin{bmatrix}0 & & \\ & 1 & \\ & & 2\end{bmatrix}$,求 α,β.

解 因为 $A\sim B$,所以 $|A|=|B|$,解得 $\alpha=\beta$. 再由 $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$,得 $\alpha=0$,从而 $\beta=0$.

886. 1) 设 A,B 都是 3 阶幂零矩阵,则 $A\sim B\Longleftrightarrow$ 它们有相同的最小多项式.

2) 当 A,B 是 4 阶幂零矩阵时,上述结论是否成立?

解 1) 必要性 由第 **855** 条及第 **873** 条可得.

充分性 由于 A,B 是幂零矩阵,因此不妨假定

$$m_A(\lambda)=m_B(\lambda)=\lambda^k.$$

i) 当 $k=3$ 时,A,B 的不变因子都是 $1,1,\lambda^3$,所以 $A\sim B$.

ii) 当 $k=2$ 时,A,B 的不变因子都是 $1,\lambda,\lambda^2$,所以 $A\sim B$.

iii) 当 $k=1$ 时,A,B 的不变因子都是 λ,λ,λ,故 $A\sim B$.

2) 当 A,B 都是 4 阶方阵时,由 $A\sim B$ 可得 A,B 有相同的最小多项式. 反之不然. 比如,$m_A(\lambda)=m_B(\lambda)=\lambda^2$,但可能 A 的不变因子为 $1,1,\lambda^2,\lambda^2$,而 B 的不变因子为 $1,\lambda,\lambda,\lambda^2$,这时 A 与 B 就不

相似了.

887. 设 A,B 都是 n 阶方阵,它们有相同的特征多项式 $f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}\cdots(\lambda-\lambda_k)^{r_k}$,其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ 互不相同,$r_i\geqslant 1$ $(i=1,2,\cdots,k)$.并且 A,B 的最小多项式相同,如果 $r_i\leqslant 3$ $(i=1,2,\cdots,k)$,那么 $A\sim B$.

证 因为 A,B 都只有 k 个不同的特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$,由若当定理知

$$A\sim \mathrm{diag}(A_1,\cdots,A_k),B\sim \mathrm{diag}(B_1,\cdots,B_k),$$

其中 A_i,B_i 的特征多项式为 $(\lambda-\lambda_i)^{r_i}$,$(i=1,2,\cdots,k)$.由于 $r_i\leqslant 3$,因此 A_i,B_i 的阶数 $\leqslant 3$ $(i=1,2,\cdots,k)$.因为 A,B 的最小多项式相同,所以 A_i 与 B_i 的最小多项式相同.注意到 A_i,B_i 均为幂零矩阵,由第 **886** 条得 $A_i\sim B_i(i=1,2,\cdots,k)$,从而 $A\sim B$.

888. 设 A 是方阵,$m(x)$ 是 A 的最小多项式,$g(x)$ 与 $m(x)$ 互素,则 $g(A)$ 可逆,且 $g^{-1}(A)$ 是 A 的多项式.

证 由 $g(x)$ 与 $m(x)$ 互素知存在 $s(x)$ 与 $t(x)$,使

$$m(x)s(x)+g(x)t(x)=1.$$

将 A 代入,并注意到 $m(A)=0$,得 $g(A)t(A)=E$,从而 $g(A)$ 可逆,因此 $g^{-1}(A)$ 是 A 的多项式.

889. 设 $A=\mathrm{diag}(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)$,$B=\begin{pmatrix}0 & E_{n-1}\\ 1 & 0\end{pmatrix}$,其中 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 为全部 n 次单位根,则 $A\sim B$.

证 $|\lambda E-A|=(\lambda-\varepsilon_1)\cdots(\lambda-\varepsilon_n)=\lambda^n-1$,由第 **883** 条知 $m_A(\lambda)=\lambda^n-1$,A 有不变因子 $1,\cdots,1,\lambda^n-1$.由 $|\lambda E-B|=\lambda^n-1$ 可知 B 有不变因子 $1,\cdots,1,\lambda^n-1$.从而 A,B 有相同的不变因子,故 $A\sim B$.

890. 设 $g(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 有 n 个互不相同的根 $x_1,\cdots,x_n$,则

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1\end{bmatrix}\sim \mathrm{diag}(x_1,\cdots,x_n)=B.$$

证 因为$|\lambda E-A|=g(\lambda)$，且$g(\lambda)$的根互异，由第**883**条知$\lambda E-A\simeq \mathrm{diag}(1,\cdots,1,g(\lambda))$，同理，$\lambda E-B\simeq \mathrm{diag}(1,\cdots,1,g(\lambda))$，故$\lambda E-A\simeq\lambda E-B$. 因而$A\sim B$.

七、 若当标准形

891. 设A是n阶复方阵，则$A\sim \mathrm{diag}(J_1,\cdots,J_s)=J$，其中

$$J_i=\begin{bmatrix}\lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1\\ & & & & \lambda_i\end{bmatrix}_{n_i\times n_i},$$

$i=1,\cdots,s$；$\sum_{i=1}^{s}n_i=n$. 在不计$J_1,\cdots,J_s$的排列秩序的意义下，J是唯一的.

注 ① J_i称为若当块，J称为A的若当标准形.

② 上面的A有初等因子

$$(\lambda-\lambda_1)^{n_1},(\lambda-\lambda_2)^{n_2},\cdots,(\lambda-\lambda_s)^{n_s}.$$

所以A的若当标准形由初等因子唯一决定.

892. (Schur) 任何一个复方阵都相似于一个上(或下)三角矩阵.

证 由第**891**条知$A\sim J$，而J为上(或下)三角矩阵.

注 ① 如果把每个若当块写成

$$J_i=\begin{bmatrix}\lambda_i & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_i\end{bmatrix}_{n_i\times n_i},i=1,2,\cdots,s,$$

那么 A 相似于 $J=\mathrm{diag}(J_1,\cdots,J_s)$，$J$ 为下三角矩阵.

② 若当块的两种写法互为转置，彼此相似.

893. 设 A 有初等因子 $\lambda^3,\lambda-1,(\lambda-i)^2$，求 A 的若当标准形.

解 由假设知 A 的若当标准形为

$$J=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&\\&0&1\\&&0\end{bmatrix}&&\\&1&\\&&\begin{bmatrix}i&1\\&i\end{bmatrix}\end{bmatrix}.$$

894. 求下列矩阵的若当标准形：

1) $A=\begin{bmatrix}3&1&0&0\\-4&-1&0&0\\7&1&2&1\\-7&-6&-1&0\end{bmatrix}$；

2) $B=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$；

3) $C=\begin{bmatrix}0&E_{n-1}\\1&0\end{bmatrix}$.

解 1) 由于

$$\lambda E-A=\begin{bmatrix}\lambda-3 & -1 & 0 & 0\\ 4 & \lambda+1 & 0 & 0\\ -7 & -1 & \lambda-2 & -1\\ 7 & 6 & 1 & \lambda\end{bmatrix}\simeq\begin{bmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & (\lambda-1)^4\end{bmatrix},$$

故 A 的初等因子为$(\lambda-1)^4$，因此 A 的若当标准形为

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & 1\\ & & & 1\end{bmatrix}.$$

$$2)\ \lambda E-B=\begin{bmatrix}\lambda-1 & -2 & -3 & -4\\ 0 & \lambda-1 & -2 & -3\\ 0 & 0 & \lambda-1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1\end{bmatrix},$$

其中有一个 3 阶子式为$(\lambda-1)^3=g(\lambda)$，一个 3 阶子式

$$\begin{vmatrix}-2 & -3 & -4\\ \lambda-1 & -2 & -3\\ 0 & \lambda-1 & -2\end{vmatrix}=-4(\lambda-2)(\lambda+3)=h(\lambda).$$

而$(g(\lambda),h(\lambda))=1$，故 $D_3(\lambda)=1$，所以 $d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=d_3(\lambda)=1$. $d_4(\lambda)=|\lambda E-B|=(\lambda-1)^4$. 从而 B 的若当标准形为

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & 1\\ & & & 1\end{bmatrix}.$$

$$3)\ \lambda E-C=\begin{bmatrix}\lambda & -1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & -1\\ -1 & & & \lambda\end{bmatrix},$$

其中[illegible]有一个 $n-1$ 阶子式为$(-1)^{(n-1)}$. 所以 $D_{n-1}(\lambda)=1$. 因而 $d_1(\lambda)=\cdots=d_{n-1}(\lambda)=1$. 由于

$$d_n(\lambda)=|\lambda E-C|=\lambda^n-1=(\lambda-1)(\lambda-\varepsilon)\cdots(\lambda-\varepsilon^{n-1}),$$

其中 $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$，因此 A 的若当标准形为

$$\mathrm{diag}(1,\varepsilon,\cdots,\varepsilon^{n-1}).$$

895. 求下列矩阵的若当标准形：

$$A=\begin{bmatrix}-1&-2&-1&0\\2&-1&0&-1\\0&0&-1&-2\\0&0&2&-1\end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}-a&-b&-1&0\\b&-a&0&-1\\0&0&-a&-b\\0&0&b&-a\end{bmatrix},$$

其中 a,b 为实数.

解　先求 $\lambda E-B$ 的标准形.

当 $b=0$ 时，

$$\lambda E-B=\begin{bmatrix}\lambda+a&0&1&0\\0&\lambda+a&0&1\\0&0&\lambda+a&0\\0&0&0&\lambda+a\end{bmatrix}.$$

可以算出 $D_2(\lambda)=1$，$D_3(\lambda)=(\lambda+a)^2$，

而 $D_4(\lambda)=|\lambda E-B|=(\lambda+a)^4$.

故　　$d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=1,d_3(\lambda)=d_4(\lambda)=(\lambda+a)^2$.

这时 B 的若当标准形为

$$\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}-a&1\\&-a\end{bmatrix}&\\&\begin{bmatrix}-a&1\\0&-a\end{bmatrix}\end{bmatrix}.$$

当 $b\neq0$ 时，

$$\lambda E-B=\begin{bmatrix}\lambda+a&b&1&0\\-b&\lambda+a&0&1\\0&0&\lambda+a&b\\0&0&-b&\lambda+a\end{bmatrix}$$

$$\simeq\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & \lambda+a & 0 & 1\\ -(\lambda+a)^2 & -b(\lambda+a) & 0 & b\\ b(\lambda+a) & b^2 & 0 & \lambda+a\end{bmatrix}. \tag{1}$$

(1)式右端有两个 3 阶子式

$$\begin{vmatrix}0 & 1 & 0\\ \lambda+a & 0 & 1\\ -b(\lambda+a) & 0 & b\end{vmatrix}=2b(\lambda+a),$$

$$\begin{vmatrix}0 & 1 & 0\\ -b(\lambda+a) & 0 & b\\ b^2 & 0 & \lambda+a\end{vmatrix}=-b[(\lambda+a)^2+b^2],$$

互素，故 $D_3(\lambda)=1$. 所以 $d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=d_3(\lambda)=1$. 由于

$$d_4(\lambda)=|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda+a & b\\ -b & \lambda+a\end{vmatrix}^2=[(\lambda+a)^2+b^2]^2$$

$$=(\lambda+a+bi)^2(\lambda+a-bi)^2,$$

因此 B 的初等因子为 $(\lambda+a+bi)^2$, $(\lambda+a-bi)^2$. 故 B 的若当标准形为

$$\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}-a-bi & 1\\ & -a-bi\end{bmatrix} & \\ & \begin{bmatrix}-a+bi & 1\\ & -a+bi\end{bmatrix}\end{bmatrix}.$$

再求 A 的若当标准形. 在 B 中令 $a=1,b=2$ 即得 A，故 A 的若当标准形为

$$\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}-1-2i & 1\\ & -1-2i\end{bmatrix} & \\ & \begin{bmatrix}-1+2i & 1\\ & -1+2i\end{bmatrix}\end{bmatrix}.$$

896. 设

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_1 \end{bmatrix},$$

其中 $a_1a_2\cdots a_n\neq 0$,则

1) $m_A(\lambda)=(\lambda-a_1)^n=|\lambda E-A|$;

2) A 的若当标准形为

$$\begin{bmatrix} a_1 & 1 & & \\ & a_1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & a_1 \end{bmatrix}.$$

证 1) 由 $f(\lambda)=|\lambda E-A|=(\lambda-a_1)^n$ 知

$m_A(\lambda)=(\lambda-a_1)^k(1\leqslant k\leqslant n)$. 令 $g(\lambda)=(\lambda-a_1)^{n-1}$,

$$g(A)=(A-a_1E)^{n-1}=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & a_2^{n-1} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 0 \end{bmatrix}\neq 0.$$

故 $m_A(\lambda)=(\lambda-a_1)^n$.

2)由 1)知 $\lambda E-A\simeq\mathrm{diag}(1,\cdots,1,(\lambda-a_1)^n)$,$A$ 的初等因子为 $(\lambda-a_1)^n$,故 A 的若当标准形为

$$\begin{bmatrix} a_1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & a_1 \end{bmatrix}_{n\times n}.$$

897. 设

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

1) 求 A 的不变因子与初等因子；

2) 求 A 的若当标准形.

解 1) 由第 **896** 条知 A 的不变因子为 $1,\cdots,1,(\lambda-1)^4$. A 的初等因子为$(\lambda-1)^4$.

2) 由 1)知 A 的若当标准形为

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

898. 设 $A=\begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$为准对角矩阵，其中 B,C 分别为 n_1 和 n_2 阶方阵，$n_1+n_2=n$. 若 B 的初等因子为$(\lambda-a_1)^{r_1},\cdots,(\lambda-a_s)^{r_s}$，其中 $r_1+\cdots+r_s=n_1$；C 的初等因子为$(\lambda-b_1)^{t_1},\cdots,(\lambda-b_m)^{t_m}$，其中 $t_1+\cdots+t_m=n_2$. 则

1) A 的初等因子组为$(\lambda-a_1)^{r_1},\cdots,(\lambda-a_s)^{r_s},(\lambda-b_1)^{t_1},\cdots,(\lambda-b_m)^{t_m}$；

2) A 的若当标准形为

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & a_1 \end{bmatrix} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \begin{bmatrix} a_s & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & a_s \end{bmatrix} & & \\ & & & \begin{bmatrix} b_1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & b_1 \end{bmatrix} & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \begin{bmatrix} b_m & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & b_m \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

证 若能证得 1),则 2)是显然的.下证 1).

易得:

$$\lambda E-B\simeq \text{diag}(1,\cdots,1,(\lambda-a_1)^{r_1},\cdots,(\lambda-a_s)^{r_s}),$$

$$\lambda E-C\simeq \text{diag}(1,\cdots,1,(\lambda-b_1)^{t_1},\cdots,(\lambda-b_m)^{t_m}).$$

故

$$\lambda E-A=\begin{bmatrix}\lambda E-B & 0\\ 0 & \lambda E-C\end{bmatrix}\simeq \text{diag}(1,\cdots,1,(\lambda-a_1)^{r_1},\cdots,(\lambda-a_s)^{r_s},1,\cdots,1,(\lambda-b_1)^{t_1},\cdots,(\lambda-b_m)^{t_m}).$$

从而 A 的初等因子为

$$(\lambda-a_1)^{r_1},\cdots,(\lambda-a_s)^{r_s},(\lambda-b_1)^{t_1},\cdots,(\lambda-b_m)^{t_m}.$$

899. 求矩阵

$$A=\begin{bmatrix}4 & -5 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 5 & -7 & 3 & 0 & 0 & 0\\ 6 & -9 & 4 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -4 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

的若当标准形.

解 令

$$B=\begin{bmatrix}4 & -5 & 2\\ 5 & -7 & 3\\ 6 & -9 & 4\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -4 & 4 & 0\\ -2 & 1 & 2\end{bmatrix},$$

则 $A=\begin{bmatrix}B & 0\\ 0 & C\end{bmatrix}$. 由 $\lambda E-B\simeq \text{diag}(1,1,\lambda^2(\lambda-1))$, $\lambda E-C\simeq \text{diag}(1,\lambda-2,(\lambda-2)^2)$ 知 A 的初等因子为 $\lambda^2,\lambda-1,\lambda-2,(\lambda-2)^2$. 故 A 的若当标准形为

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & & & \\ & 1 & & \\ & & 2 & \\ & & & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

900. 设复矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & 2 & 0 \\ b & c & -1 \end{bmatrix},$$

问矩阵 A 可能有什么样的若当标准形?并求 A 相似于对角矩阵的充要条件.

解 $|\lambda E-A|=(\lambda-2)^2(\lambda+1)$. 分三点讨论如下:

1) 当 $a\neq 0$ 时,易验算 $(A-2E)(A+E)\neq 0$. 故 A 的最小多项式 $m(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda+1)=d_3(\lambda)$. A 的初等因子为 $(\lambda-2)^2$, $\lambda+1$. A 的若当标准形为

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & \\ 0 & 2 & \\ & & -1 \end{bmatrix}.$$

2) 当 $a=0$ 时,可得 $(A-2E)(A+E)=0$. 故 A 的最小多项式 $m(\lambda)=d_3(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda+1)$. 而

$$|\lambda E-A|=(\lambda-2)^2(\lambda+1)=d_1(\lambda)\cdot d_2(\lambda)\cdot d_3(\lambda),$$

所以 $d_2(\lambda)=\lambda-2$. 这时 A 的若当标准形为 $\mathrm{diag}(2,2,-1)$.

3) A 与对角矩阵相似 $\Longleftrightarrow d_3(\lambda)$ 无重根 $\Longleftrightarrow d_3(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda+1)$ ($\because |\lambda E-A|=(\lambda-2)^2(\lambda+1)$) $\Longleftrightarrow a=0$.

901. 设 A 的特征多项式为 $f(\lambda)=|\lambda E-A|=(\lambda-2)^4(\lambda-3)^3$ 及最小多项式为 $m(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda-3)^2$,试写出 A 的可能的若当标准形.

解 首先由假设知 A 是 7 阶方阵，$d_7(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda-3)^2$.

1) 当 $d_6(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda-3)$ 时，$d_1(\lambda)=\cdots=d_5(\lambda)=1$. 因此 A 的初等因子为 $(\lambda-2)^2,(\lambda-3)^2,(\lambda-2)^2,(\lambda-3)$. 故而 A 的若当标准形为

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & & \\ & 2 & & & & & \\ & & 2 & 1 & & & \\ & & & 2 & & & \\ & & & & 3 & 1 & \\ & & & & & 3 & \\ & & & & & & 3 \end{bmatrix}.$$

2) 当 $d_6(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-3)$ 时，$d_5(\lambda)=\lambda-2$，$d_1(\lambda)=\cdots=d_4(\lambda)=1$. 因此 A 的初等因子为 $(\lambda-2)^2,(\lambda-3)^2,(\lambda-2),(\lambda-2),(\lambda-3)$. 从而 A 的若当标准形为

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & & \\ & 2 & & & & & \\ & & 3 & 1 & & & \\ & & & 3 & & & \\ & & & & 2 & & \\ & & & & & 2 & \\ & & & & & & 3 \end{bmatrix}.$$

902. 设 $\lambda(\lambda-1)^2$ 为 4 阶方阵 A 的最小多项式，求 A 的所有可能的若当标准形.

解 $d_4(\lambda)=\lambda(\lambda-1)^2$.

1) 若 $d_3(\lambda)=\lambda$，则 $d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=1$. 这时 A 的初等因子为 λ，λ，$(\lambda-1)^2$，A 的若当标准形为

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

2）当 $d_3(\lambda)=\lambda-1$ 时，则 $d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=1$，因此 A 的若当标准形为

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}.$$

903. 设 A 为 n 阶方阵，$A^2=A$，求 A 的所有可能的若当标准形.

解 由假设知 A 的零化多项式为 $\lambda^2-\lambda$. 设 A 的最小多项式为 $m(\lambda)$.

1）当 $m(\lambda)=\lambda$ 时，$A=0$；

2）当 $m(\lambda)=\lambda-1$ 时，$A=E$；

3）当 $m(\lambda)=\lambda(\lambda-1)=d_n(\lambda)$ 时，

1° 若 $d_{n-1}(\lambda)=\lambda$，则 $d_1(\lambda)=1,d_2(\lambda)=\cdots=d_{n-1}(\lambda)=\lambda$. 这时 A 的若当标准形为 $\mathrm{diag}(0,0,\cdots,0,1)$；

2° 若 $d_{n-1}(\lambda)=\lambda-1$，则 $d_1(\lambda)=1,d_2(\lambda)=\cdots=d_{n-1}(\lambda)=\lambda-1$. 这时 A 的若当标准形为 $\mathrm{diag}(1,\cdots,1,0)$.

904. 设

$$A=\begin{bmatrix} -5 & 1 & 4 \\ -12 & 3 & 8 \\ -6 & 1 & 5 \end{bmatrix},$$

求 A 的若当标准形 J 及 P 使 $A=PJP^{-1}$.

解 1 $|\lambda E-A|=(\lambda-1)^3$. 经验算知 A 的最小多项式 $m(\lambda)=d_3(\lambda)=(\lambda-1)^2$. 于是 $d_1(\lambda)=1,d_2(\lambda)=\lambda-1$，故

$$J=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & 1 \\ & & 1\end{bmatrix},$$

求得 $\lambda=1$ 的一个特征向量为 $(1,6,0)$. 令

$$P=\begin{bmatrix}1 & x_1 & x_4 \\ 6 & x_2 & x_5 \\ 0 & x_3 & x_6\end{bmatrix},$$

则由 $AP=PJ$ 解出

$$x_1=x_3=x_4=x_6=1,\ x_2=2,\ x_5=3.$$

于是

$$P=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}.$$

解 2　设 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，则由 $P^{-1}AP=J$ 得

$$(A-E)\alpha_1=0,\ (A-E)\alpha_2=0,\ (A-E)\alpha_3=\alpha_2.$$

解方程组　$(A-E)x=0$，得基础解系：

$$\beta_1=(1,6,0)',\ \beta_2=(0,-4,1)'.$$

为了使 $(A-E)x=\alpha_2$ 有解，适当选取 α_2，这时设

$$\alpha_2=k_1\beta_1+k_2\beta_2=(k_1,6k_1-4k_2,k_2)',$$

其中 k_1,k_2 是待定常数.

当 $k_1=k_2=1$ 时，秩 $(A-E)=$ 秩 $(A-E,\alpha_2)=1$，因而线性方程组 $(A-E)x=\alpha_2$ 有解. 求得一解为 $x_1=(-\frac{1}{6},0,0)'$.

于是，取 $\alpha_1=\beta_1$, $\alpha_2=(1,2,1)'$, $\alpha_3=x_1$，则

$$P=\begin{bmatrix}1 & 1 & -\frac{1}{6} \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

即为所求.

905. 设 A 是 n 阶复矩阵,则 $f_A(A)=0$.(不用哈密尔顿—凯莱定理)

证 设 $J=\mathrm{diag}(J_1,\cdots,J_s)$,其中

$$J_k=\begin{bmatrix}\lambda_k & 1 & & \\ & \lambda_k & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_k\end{bmatrix}_{n_k\times n_k},$$

$k=1,2,\cdots,s,\sum\limits_{i=1}^{s}n_i=n$;

再设 $A=T^{-1}JT$,则

$$f(\lambda)=|\lambda E-A|=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{n_s},$$

$$(A-\lambda_1E)^{n_1}=T^{-1}\mathrm{diag}(0,*,\cdots,*)T,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(A-\lambda_sE)^{n_s}=T^{-1}\mathrm{diag}(*,*,\cdots,*,0)T.$$

那么

$$\begin{aligned}f(A)&=(A-\lambda_1E)^{n_1}\cdots(A-\lambda_sE)^{n_s}\\&=T^{-1}\mathrm{diag}(0,0,\cdots,0)T=0.\end{aligned}$$

906. 设 A 是 n 阶复矩阵,则 $A=B+C$,且 $BC=CB$,其中 B 可对角化,C 为幂零矩阵.

证 设 A 的初等因子为

$$\lambda-\lambda_1,\cdots,\lambda-\lambda_s,(\lambda-\mu_1)^{r_1},\cdots,(\lambda-\mu_t)^{r_t},$$

其中 $r_i>1(i=1,2,\cdots,t)$,$s+r_1+\cdots+r_t=n$,那么 A 的若当标准形为

$$J=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_s & & & & \\ & & & \begin{pmatrix} u_1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & u_1 \end{pmatrix} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \begin{pmatrix} u_t & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & u_t \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

$A=T^{-1}JT$. 令

$$B=T^{-1}\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_s,u_1,\cdots,u_1,\cdots,u_t,\cdots,u_t)T,$$

$$C=T^{-1}\begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}T,$$

则易见 $A=B+C$，B 是可对角化的，C 是幂零矩阵，且

$$BC=T^{-1}\begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & \begin{bmatrix} 0 & u_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & u_1 \\ & & & 0 \end{bmatrix} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \begin{bmatrix} 0 & u_t & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & u_t \\ & & & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}T=CB.$$

907. 设 A 为 n 阶矩阵，A 的特征多项式与最小多项式分别为

$$f(\lambda)=|\lambda E-A|=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s},$$
$$d_n(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{t_1}(\lambda-\lambda_2)^{t_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{t_s}, \qquad (1)$$

其中 $r_i\geqslant t_i\geqslant 1\ (i=1,2,\cdots,s)$，$\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 互不相同，$\sum\limits_{i=1}^{s}r_i=n$，记

$$J_k(\lambda_i)=\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{k\times k},$$

则

1) 在 A 的若当标准形中至少有一个若当块 $J_{t_i}(\lambda_i)\ (i=1,2,\cdots,s)$；

2) 如果还有 $J_k(\lambda_i)$ 存在，那么 $k\leqslant t_i$；

3) 若一切主对角线为 λ_i 的若当块有 $N(\lambda_i)$ 个：

$$J_{t_i}(\lambda_i),J_{k_1}(\lambda_i),\cdots,J_{k_{N(\lambda_i)-1}}(\lambda_i),$$

则 $t_i+k_1+\cdots+k_{N(\lambda_i)-1}=r_i$；

4) $N(\lambda_i)=\dim(V_{\lambda_i})$，

其中 $V_{\lambda_i}=\{\alpha\in\mathbb{C}^{n\times 1}\mid A\alpha=\lambda_i\alpha\}$.

证　1) 由(1)，A 至少有一个初等因子$(\lambda-\lambda_i)^{t_i}$，从而在 A 的若当标准形中至少有一个若当块 $J_{t_i}(\lambda_i)$.

2) 若 $t_i=r_i$，则 $d_{n-1}(\lambda)$中不再含因子$(\lambda-\lambda_i)^k$. 因而 A 的若当标准形中以 λ_i 为主对角线元的若当块是唯一的.

若 $t_i<r_i$，则 $d_{n-1}(\lambda)$中还含有因子$(\lambda-\lambda_i)^k$，但 $d_{n-1}(\lambda)\mid d_n(\lambda)$. 因此 $k\leqslant t_i$. 这时 $J_k(\lambda_i)$存在.

3) 由假设，A 的初等因子中有

$$(\lambda-\lambda_i)^{t_i},(\lambda-\lambda_i)^{k_1},\cdots,(\lambda-\lambda_i)^{k_{N(\lambda_i)-1}}.$$

但它们之积应等于$(\lambda-\lambda_i)^{r_i}$，故得 3).

4) 记 A 的若当标准形为 J. 不妨假定

$$J=\dim(J_1,J_2),$$

其中 J_1 是准对角矩阵，主对角线元素等于 λ_i，它由 $N(\lambda_i)$个若当块构成，且 J_1 为 r_i 阶方阵；J_2 是准对角矩阵，主对角线元素不是 λ_i，且 J_2 为 $n-r_i$ 阶方阵.

考虑线性方程组

$$(\lambda_iE-A)X=0,$$

其解空间为 V_{λ_i}，则 $\dim V_{\lambda_i}=n-$秩(λ_iE-A).

因为 $A=T^{-1}JT$，$\lambda E-A=T^{-1}(\lambda E-J)T$，所以

秩$(\lambda_iE-A)=$秩(λ_iE-J)，

$$\lambda_iE-J=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&&\\&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&0\end{bmatrix}&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&\begin{bmatrix}0&1&&\\&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&0\end{bmatrix}&&&\\&&&\lambda_i-\lambda_i&&*\\&&&&\ddots&\\&&&&&\lambda_i-\lambda_n\end{bmatrix}.$$

由上式右端看出

$$\text{秩}(\lambda_i E-J)=r_i-N(\lambda_i)+(n-r_i)=n-N(\lambda_i).$$

$$\therefore \dim V(\lambda_i)=N(\lambda_i).$$

908. 已知 A 有初等因子：$(\lambda-\lambda_1)^2,(\lambda-\lambda_1)^3,(\lambda-\lambda_2),(\lambda-\lambda_2)^2,(\lambda-\lambda_2)^3$，其中 $\lambda_1\neq\lambda_2$. 求 $\dim V_{\lambda_1}$ 和 $\dim V_{\lambda_2}$，其中 V_{λ_i} 为 A 属于特征值 λ_i 的特征子空间．

解 1 由第 **907** 条知 $\dim V_{\lambda_1}=2,\dim V_{\lambda_2}=3$.

解 2

$$A\sim J=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1 \\ & \lambda_1 \\ & & \lambda_1 & 1 \\ & & & \lambda_1 & 1 \\ & & & & \lambda_1 \\ & & & & & \lambda_2 \\ & & & & & & \lambda_2 & 1 \\ & & & & & & & \lambda_2 \\ & & & & & & & & \lambda_2 & 1 \\ & & & & & & & & & \lambda_2 & 1 \\ & & & & & & & & & & \lambda_2\end{bmatrix},$$

$$\lambda_1 E-J=\begin{bmatrix}0 & -1 \\ & 0 \\ & & 0 & -1 \\ & & & 0 & -1 \\ & & & & 0 \\ & & & & & \lambda_1-\lambda_2 \\ & & & & & & \lambda_1-\lambda_2 & -1 \\ & & & & & & & \lambda_1-\lambda_2 \\ & & & & & & & & \lambda_1-\lambda_2 & -1 \\ & & & & & & & & & \lambda_1-\lambda_2 & -1 \\ & & & & & & & & & & \lambda_1-\lambda_2\end{bmatrix},$$

秩$(\lambda_1 E-J)=9$，而 $n=11$. 由此有

$\dim V_{\lambda_1}=n-$秩$(\lambda_1 E-A)=n-$秩$(\lambda_1 E-J)=11-9=2$. 类似地有 $\dim V_{\lambda_2}=3$.

909. 1）设

$$J=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda\end{bmatrix}_{n\times n},$$

求可逆矩阵 T，使 $J'=T^{-1}JT$.

2）$J=\mathrm{diag}(J_1,J_2)$，求 T，使 $J'=T^{-1}JT$，其中

$$J_1=\begin{bmatrix}a & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & a\end{bmatrix}_{m\times m},\quad J_2=\begin{bmatrix}b & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & b\end{bmatrix}_{n\times n}.$$

证 1）令

$$T=\begin{bmatrix} & & & 1\\ & & 1 & \\ & \iddots & & \\ 1 & & & \end{bmatrix}_{n\times n}.$$

则 $TJ'=JT$. 所以 $J'=T^{-1}JT$.

2）令 $T=\mathrm{diag}(T_1,T_2)$，其中

$$T_1=\begin{bmatrix} & & 1\\ & \iddots & \\ 1 & & \end{bmatrix}_{m\times m},\quad T_2=\begin{bmatrix} & & 1\\ & \iddots & \\ 1 & & \end{bmatrix}_{n\times n}.$$

则 $J'=T^{-1}JT$.

910. 设 A 为幂零矩阵，满足 $A^m=0$ 的最小自然数称为 A 的幂零指数.

1）幂零指数等于其阶数的幂零矩阵都相似，且相似于

$$J_0=\begin{bmatrix}0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0\end{bmatrix}_{n\times n}$$

2)幂零指数相等的幂零矩阵能否相似?

解　1)设 n 阶幂零矩阵 A,B 的幂零指数都为 n,那么 λ^n 为 A,B 的零化多项式,但 λ^{n-1} 不是 A,B 的零化多项式,因此它们的最小多项式 $m_A(\lambda)=m_B(\lambda)=\lambda^n$. 由此可知 A,B 的不变因子都是 $1,\cdots,1,\lambda^n$,故 $A\sim B$.

其次 J_0 的幂零指数为 n,所以 $A\sim J_0$.

2)设

$$C=\begin{bmatrix}0 & 1 & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}0 & 1 & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0\end{bmatrix},$$

则它们幂零指数都等于 2,但 C,D 不相似.

911.　设

$$J=\begin{bmatrix}0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0\end{bmatrix}_{n\times n}$$

为若当块,则秩 $J=$ 秩$(J^2)\Longleftrightarrow n=1$.

证　充分性　显然.

必要性　用反证法.　若 $n\neq 1$,即 $n>1$,则秩 $J^2=n-2$. 但秩 $J=n-1$,矛盾.

八、 方阵与对角矩阵相似的条件

912.　方阵 A 与对角矩阵相似的充要条件是 A 有 n 个线性

无关的特征向量.

注 ① 若 $A\sim \mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$，则 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的全部特征值.

② 若 $A=T^{-1}\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)T$，且 $T=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，则 $A\alpha_i=\lambda_i\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$，即 n 个线性无关的特征向量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 组成可逆矩阵 T.

913. 方阵 A 与对角矩阵相似的充要条件是 A 的最小多项式无重根.

914. 方阵 A 与对角矩阵相似的充要条件是 A 的不变因子都没有重根.

915. 方阵 A 与对角矩阵相似的充要条件是 A 的初等因子全为一次的.

916. 设 A 的特征多项式

$$|\lambda E-A|=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s},$$

其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 互不相同，$\sum\limits_{i=1}^{s}r_i=n$，则 A 与对角阵相似的充要条件是 $\sum\limits_{i=1}^{s}\dim V_{\lambda_i}=n$，其中

$$V_{\lambda_i}=\{\alpha|A\alpha=\lambda_i\alpha\},i=1,2,\cdots,s$$

为特征子空间.

917. 方阵 A 与对角矩阵相似的充要条件是每一个特征值的代数重数等于它的几何重数.

918. 设 A 的特征多项式如第 916 条所给，则 A 与对角矩阵相似的充要条件是

$$\text{秩}(\lambda_i E-A)=n-r_i,\ i=1,2,\cdots,s.$$

919. 方阵 A 相似于对角矩阵 $\Longleftrightarrow$ 秩 $(cE-A)=$ 秩 $(cE-A)^2$，其中 c 为任意常数.

证 必要性 设 $A=T^{-1}\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)T$，则

$$cE-A=T^{-1}\mathrm{diag}(c-\lambda_1,\cdots,c-\lambda_n)T,$$

$$(cE-A)^2=T^{-1}\mathrm{diag}((c-\lambda_1)^2,\cdots,(c-\lambda_n)^2)T.$$

故秩$(cE-A)=$秩$(cE-A)^2$.

充分性 设 $A=T^{-1}JT$,其中 $J=\mathrm{diag}(J_1,\cdots,J_s)$,

$$J_i=\begin{bmatrix}\lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i\end{bmatrix}_{n_i\times n_i}$$

$i=1,\cdots,s;\sum_{i=1}^{s}n_i=n$.

下证 $n_i=1$ $(i=1,2,\cdots,s)$. 用反证法,不失一般性,设 $n_1>1$,则由假设取 $c=\lambda_1$,有

$$\text{秩}(\lambda_1E-A)=\text{秩}(\lambda_1E-A)^2,$$

从而

$$\text{秩}(\lambda_1E-J_i)=\text{秩}(\lambda_1E-J_i)^2,i=1,\cdots,s.$$

而

$$\lambda_1E-J_1=\begin{bmatrix}0 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ & & & 0\end{bmatrix},\quad (\lambda_1E-J_1)^2=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 0\end{bmatrix},$$

所以秩$(\lambda_1E-J_1)\neq$秩$(\lambda_1E-J_1)^2$,矛盾. 故 $n_i=1$ $(i=1,\cdots,s)$.

920. 方阵 A 相似于对角矩阵 $\Longleftrightarrow$ 秩$(\lambda E-A)=$秩$(\lambda E-A)^2$,其中 λ 为 A 的任一特征值.

证 仿第 **919** 条可证.

921. 方阵 A 相似于对角矩阵$\Longleftrightarrow W_1=W_2$,其中 W_1,W_2 分别为$(cE-A)X=0$ 与$(cE-A)^2X=0$ 的解空间,c 为任意常数.

证 因为 $W_1=W_2\Longleftrightarrow$秩$(cE-A)=$秩$(cE-A)^2$,从而由 **919** 条即可得证.

922.　方阵 A 相似于对角矩阵$\Longleftrightarrow V_1=V_2$，其中 V_1,V_2 分别为$(\lambda E-A)X=0$ 与$(\lambda E-A)^2X=0$ 的解空间，而 λ 为 A 的任一特征值.

证　仿第 **921** 条可证.

923.　设 V 为 n 维列向量空间，A 是 n 阶复矩阵，a 是任一复数. 令

$$W_1=\{(aE-A)\beta \mid \beta\in V\},$$
$$W_2=\{\beta\in V \mid (aE-A)\beta=0\},$$

则 A 相似于对角矩阵$\Longleftrightarrow W_1\cap W_2=\{0\}$.

证　必要性　$\forall X_0\in W_1\cap W_2$，有 $X_0=(aE-A)\beta$ 和$(aE-A)X_0=0$. 由第 **921** 条有

$$0=(aE-A)\beta^2\quad 和\ 0=(aE-A)\beta=X_0，所以\ W_1\cap W_2=\{0\}.$$

充分性　下证$(cE-A)X=0$ 与$(cE-A)^2X=0$ 同解. 只要证明$(cE-A)^2X=0$ 的解是$(cE-A)X=0$ 的解即可.

对于$(cE-A)^2X=0$ 的任一解 Y_0，

$$0=(cE-A)^2Y_0=(cE-A)[(cE-A)Y_0].$$

所以$(cE-A)Y_0\in W_1\cap W_2=\{0\}$. 从而$(cE-A)Y_2=0$. 再由第 **921** 条即知 A 相似于对角矩阵.

924.　方阵 A 相似于对角矩阵$\Longleftrightarrow$对 A 的每一特征值 λ，有 $W_1\cap W_2=\{0\}$，其中

$$W_1=\{(\lambda E-A)\beta \mid \beta\ 为列向量\},$$
$$W_2=\{\beta \mid (\lambda E-A)\beta=0,\beta\ 为列向量\}.$$

证　类似于第 **923** 条可证.

925.　设 A 是 n 阶方阵，A 有 n 个不同的特征值，则 A 相似于对角矩阵.

证　由于有 n 个不同的特征值必有 n 个线性无关的特征向量，故由第 **912** 条即可得证.

注　① 令$|\lambda E-A|=f(\lambda)$，故当$(f(\lambda),f'(\lambda))=1$ 时，A 相似

于对角矩阵.

② 此命题之逆不成立. 比如, $A=E$, A 相似于对角矩阵, 但特征值都相同.

926. 设 $g(\lambda)$ 为 A 的零化多项式, $(g(\lambda),g'(\lambda))=1$, 则 A 相似于对角矩阵.

证 设 A 的最小多项式为 $m(\lambda)$. 则 $m(\lambda)\mid g(\lambda)$. 由假设知 $(m(\lambda),m'(\lambda))=1$. 再由第 **913** 条即可得证.

927. 矩阵

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & -3 & 3\\ -1 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

是否相似于对角矩阵? 为什么?

解 1

$$\lambda E-A=\begin{bmatrix}\lambda-2 & 1 & -2\\ -5 & \lambda+3 & -3\\ 1 & 0 & \lambda+2\end{bmatrix},$$

有二阶子式 $\begin{vmatrix}\lambda-2 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1$, 故 $D_2(\lambda)=1$. 从而 $d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=1$. 由于 A 的最小多项式 $d_3(\lambda)=(\lambda+1)^3$ 有重根, 因此 A 不相似于对角矩阵.

解 2 由于 $|\lambda E-A|=(\lambda+1)^3$, 但 $(A+E)^2\neq 0$, 故最小多项式为 $(\lambda+1)^3$. 因而 A 不相似于对角矩阵.

解 3 $|\lambda E-A|=(\lambda+1)^3$. 特征值 -1 的代数重数为 3. 而

$$\text{秩}(-1E-A)=2,$$

设 -1 的特征子空间为 V_{-1}, 则 $\dim V_{-1}=3-\text{秩}(-1E-A)=1$. 即特征值 -1 的几何重数为 1, 与代数重数不等, 故 A 不相似于对角矩阵.

928. 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 是线性空间 V 的一组基, 线性变换 σ 在

这组基下的矩阵为 A,其中

$$A=\begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 & 3 \\ 3 & -1 & -3 & 2 \\ -3 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} & -\frac{5}{2} \\ -10 & 3 & 11 & -7 \end{bmatrix}.$$

1) 求 σ 在基

$$\begin{cases} \eta_1=\varepsilon_1+2\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4, \\ \eta_2=2\varepsilon_1+3\varepsilon_2+\varepsilon_3, \\ \eta_3=\varepsilon_3, \\ \eta_4=\varepsilon_4 \end{cases} \tag{1}$$

下的矩阵;

2) 求 σ 的特征值与特征向量;

3) 求可逆矩阵 T,使 $T^{-1}AT$ 成对角矩阵.

解 1) (1)式即$(\eta_1\ \eta_2\ \eta_3\ \eta_4)=(\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3\ \varepsilon_4)X$,这里

$$X=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

故 σ 在基 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 下的矩阵为

$$B=X^{-1}AX=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

2) $|\lambda E-B|=\lambda^2(\lambda-1)(\lambda-\frac{1}{2})$,故 σ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=0$, $\lambda_3=\frac{1}{2}$, $\lambda_4=1$.

属于特征值 0 的线性无关特征向量为

$$\alpha_1=2\varepsilon_1+3\varepsilon_2+\varepsilon_3,\alpha_2=-\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_4.$$

属于特征值 1/2 的线性无关的特征向量为

$$\alpha_3=-4\varepsilon_1-2\varepsilon_2+\varepsilon_3+6\varepsilon_4.$$

属于特征值 1 的线性无关特征向量为

$$\alpha_4=3\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3-2\varepsilon_4.$$

3) 因 $(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4)=(\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3\ \varepsilon_4)T$，其中

$$T=\begin{pmatrix}2&-1&-4&3\\3&-1&-2&1\\1&0&1&1\\0&1&6&-2\end{pmatrix},$$

所以 $T^{-1}AT=\mathrm{diag}(0,0,\frac{1}{2},1)$.

929. 设 A 是 n 阶复方阵，且有正整数 m 使 $A^m=E$，则

1) A 与对角矩阵相似；

2) A 的所有特征值都是 m 次单位根.

证 1) 由假设知 $g(\lambda)=\lambda^m-1$ 为 A 的零化多项式，$g(\lambda)$ 无重根，故 A 相似于对角矩阵.

2) 设 $m(\lambda)$ 是 A 的最小多项式，λ_0 为 A 的任一特征值，则 $m(\lambda_0)=0$. 但 $m(\lambda)\mid g(\lambda)$，故 $\lambda_0^m=1$.

930. 设 $P[x]_n(n>1)$ 为数域 P 上次数小于 n 的多项式及零多项式的全体，则微分变换 τ 在 $P[x]_n$ 的任何一组基下的矩阵都不会是对角矩阵.

证 取 $P[x]_n$ 的一组基 $1,x,\frac{x^2}{2!},\cdots,\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$，则 τ 在这组基下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}0&E_{n-1}\\0&0\end{pmatrix},$$

所以 $|\lambda E-A|=\lambda^n$.

若 τ 在某一组基下的矩阵 B 为对角矩阵，则由 τ 的特征值全为 0 知 $B=0$. 但 $A\sim B$，故 $A=T^{-1}BT=0$. 这不可能.

931. 设 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 为下三角矩阵.

1）若 $a_{ii}\neq a_{jj}, i\neq j, i,j=1,2,\cdots n$，则 A 相似于对角矩阵；

2）若 $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}$，而至少有一个 $a_{ij}\neq 0(i>j)$，则 A 不相似于对角矩阵.

证 1）由假设知 A 有 n 个不相同的特征值 $a_{11}, a_{22}\cdots, a_{nn}$，故 A 相似于对角矩阵.

2）当 $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}$ 时，特征值 a_{11} 的代数重数等于 n. 但秩$(a_{11}E-A)\geqslant 1$，故 a_{11} 的几何重数$=n-$秩$(a_{11}E-A)\leqslant n-1$. 因而 A 不相似于对角矩阵.

注 2)的另一证明. 若 $T^{-1}AT=\mathrm{diag}(a_{11},\cdots,a_{11})=a_{11}E$，则 $A=a_{11}E$，这与 $a_{ij}\neq 0$ 矛盾.

932. A 是 2 阶实方阵，$|A|<0$，则存在 2 阶实矩阵 T，使 $T^{-1}AT$ 为对角矩阵.

证 $|\lambda E-A|=\lambda^2+a_1\lambda+a_2=\lambda^2-trA\lambda+|A|$. 由判别式$\triangle=(\mathrm{tr}A)^2-4|A|>0$ 知 A 有两个不同的实特征值 λ_1, λ_2，故 A 与对角矩阵相似，即存在实可逆矩阵 T，使 $T^{-1}AT=\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$.

933. 设 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 是一实矩阵，且 $ad-bc=1$，则

1）当 $|\mathrm{tr}A|>2$ 时，存在可逆实矩阵 T，使 $T^{-1}AT=\mathrm{diag}(\lambda, \lambda^{-1})$，其中 $\lambda\neq 0,1,-1$；

2）当 $|\mathrm{tr}A|=2$，且 $A\neq\pm E$ 时，存在可逆实矩阵 T，使

$$T^{-1}AT=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{或} T^{-1}AT=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

证 1）$|\lambda E-A|=\lambda^2-(\mathrm{tr}A)\lambda+|A|=\lambda^2-(\mathrm{tr}A)\lambda+1$. 由于判别式 $\Delta=(\mathrm{tr}A)^2-4>0$，故 A 有两个不相等的实特征值 λ_1, λ_2. 又 $\lambda_1\lambda_2=|A|=1$，所以 $\lambda_2=\lambda_1^{-1}$. 这样设 A 的两个特征值为 λ, λ^{-1}.

因为 $\lambda_1\neq\lambda_2$,所以 $\lambda\neq0,1,-1$.

2) 因为 $|\mathrm{tr}A|=2$,所以判别式 $\Delta=0$. 分两种情况讨论如下:

① 当 $\mathrm{tr}A=2$ 时,

$$|\lambda E-A|=\lambda^2-2\lambda+1=(\lambda-1)^2.$$

因为 $A\neq E$,所以最小多项式为 $(\lambda-1)^2$. 故

$$T^{-1}AT=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}.$$

② 当 $\mathrm{tr}A=-2$ 时,

$$|\lambda E-A|=\lambda^2+2\lambda+1=(\lambda+1)^2.$$

因为 $A\neq-E$,所以最小多项式为 $(\lambda+1)^2$. 故

$$T^{-1}AT=\begin{bmatrix}-1&1\\0&-1\end{bmatrix}.$$

934. 设 n 阶方阵 A 的零化多项式为

$$g(\lambda)=(\lambda-a_1)^{m_1}(\lambda-a_2)^{m_2}\cdots(\lambda-a_s)^{m_s},$$

其中 $a_1,\cdots,a_s$ 互不相同,$m_i\geqslant0$,$\sum\limits_{i=1}^{s}m_i=n$,再令

$$f(\lambda)=(\lambda-a_1)(\lambda-a_2)\cdots(\lambda-a_s).$$

1) 若 $f(A)=0$,则 A 与对角矩阵相似;

2) 若 $f(A)\neq0$,则 A 不与对角矩阵相似.

证 设 A 的最小多项式为 $m(\lambda)$.

1) 若 $f(A)=0$,则 $m(\lambda)\mid f(\lambda)$. 从而 $m(\lambda)$ 无重根,A 相似于对角矩阵.

2) 由于 $m(\lambda)\mid g(\lambda)$,但 $f(A)\neq0$,因此

$$m(\lambda)=(\lambda-a_1)^{t_1}\cdots(\lambda-a_s)^{t_s},$$

其中 $t_i\geqslant1\ (i=1,2,\cdots,s)$,且至少有一个 $t_i>1$. 即 $m(\lambda)$ 有重根,A 不相似于对角矩阵.

935. 若 $A^2=E$,则 $A\sim\mathrm{diag}(E_s,-E_{n-s})$.

证 令 $g(\lambda)=\lambda^2-1$,则 $g(\lambda)$ 为 A 的零化多项式,且无重根,

故 A 相似于对角矩阵. 设 λ 为 A 的任一特征值,则 $\lambda^2=1,\lambda=\pm1$. 所以　$A\sim\mathrm{diag}(1,\cdots,1,-1,\cdots,-1)$.

注　若秩$(A-E)=r$,则 1 的个数为 $n-r$,即

$$A\sim\mathrm{diag}(E_{n-r},-E_r).$$

936.　若 $A^2=A$,则 $A\sim\mathrm{diag}(E_r,0)$,其中 $r=$秩 A.

证　由假设知 A 有零化多项式 $g(\lambda)=\lambda^2-\lambda$,且无重根,故 A 相似于对角矩阵. 又 A 的特征值为 0 或 1,故 $A\sim\mathrm{diag}(E_r,0)$,且秩 $A=r$.

九、　两个矩阵同时相似于对角矩阵

937.　设 A 相似于对角矩阵,B 相似于对角矩阵,且 $AB=BA$,则存在可逆矩阵 T,使 $T^{-1}AT$ 与 $T^{-1}BT$ 为对角矩阵.

证　设 $P^{-1}AP=\mathrm{diag}(\lambda_1E_1,\cdots,\lambda_sE_s)$,其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 互不相同,E_i 为单位矩阵$(i=1,2,\cdots,s)$.

由 $AB=BA$,得

$$\mathrm{diag}(\lambda_1E_1,\cdots,\lambda_sE_s)P^{-1}BP=P^{-1}BP\mathrm{diag}(\lambda_1E_1,\cdots,\lambda_sE_s).\quad(1)$$

由第 **71** 条知

$$P^{-1}BP=\mathrm{diag}(B_1,\cdots,B_s),\quad(2)$$

其中 B_i 与 E_i 为同阶方阵.

因为 B 可对角化,所以 B 的初等因子都是一次的. 因而由(2)知 B_i 的初等因子都是一次的. 故存在可逆矩阵 $Q_i(i=1,2,\cdots,s)$,使 $Q_i^{-1}B_iQ_i$ 为对角矩阵. 令 $Q=\mathrm{diag}(Q_1,\cdots,Q_s)$,则

$Q^{-1}(P^{-1}BP)Q=\mathrm{diag}(Q_1^{-1}B_1Q_1,\cdots,Q_s^{-1}B_sQ_s)$为对角矩阵. 令 $T=PQ$,则 $T^{-1}BT$ 为对角矩阵,

$$\begin{aligned}T^{-1}AT&=Q^{-1}\mathrm{diag}(\lambda_1E_1,\cdots,\lambda_sE_s)Q\\&=\mathrm{diag}(Q_1^{-1},\cdots,Q_s^{-1})\mathrm{diag}(\lambda_1E_1,\cdots,\lambda_sE_s)\mathrm{diag}(Q_1,\cdots,Q_s)\\&=\mathrm{diag}(\lambda_1E_1,\cdots,\lambda_sE_s)\end{aligned}$$

也是对角矩阵.

938. 设 A,B 是实对称矩阵，$AB=BA$，则存在正交矩阵 Q，使 $Q^{-1}AQ$ 和 $Q^{-1}BQ$ 同时为对角矩阵.

证 把第 937 条中的 P,Q_i 都取正交矩阵即可证得.

939. 设 A,B 是 n 阶复方阵，$A^2=B^2=E$，$AB=BA$，则存在可逆矩阵 P，使

$$P^{-1}AP=\mathrm{diag}(c_1,\cdots,c_n),P^{-1}BP=\mathrm{diag}(d_1,\cdots,d_n), \quad (1)$$

其中 $c_i=\pm1,d_i=\pm1,i=1,\cdots,n$.

证 由第 937 条可证(1)式.

另外，由 $A^2=E,B^2=E$ 可知，对 $1\leqslant i\leqslant n,c_i^2=1,d_i^2=1$. 故 $c_i=\pm1,d_i=\pm1,i=1,\cdots,n$.

940. 设$\{A_i\}$是一组两两可换的 n 阶复方阵，且每一个相似于对角矩阵，则存在可逆矩阵 T，使 $T^{-1}A_iT$ 都为对角矩阵.

证 因为秩$\{A_i\}\leqslant n^2$，所以只对有限个证明即可. 即设$\{A_1,\cdots,A_m\}$中 $A_iA_j=A_jA_i$ $(i、j=1,2,\cdots,m)$，且每个 A_i 相似于对角矩阵，则存在可逆矩阵 T，使 $T^{-1}A_iT$ 为对角矩阵 $(i=1,2,\cdots,m)$.

对 m 用数学归纳法，显然当 $m=1,2$ 时，命题成立. 归纳假定命题对 $m-1$ 成立. 再证命题对 m 也成立. 取 A_1，由假设存在可逆矩阵 P，使 $P^{-1}A_1P=\mathrm{diag}(\lambda_1E_1,\cdots,\lambda_sE_s)$，其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 互不相同. 再由 $A_iA_j=A_jA_i$，得

$$P^{-1}A_iP=\mathrm{diag}(D_{i1},\cdots,D_{is}),\ i=2,\cdots,m, \quad (2)$$

其中 D_{ij}与 E_j 为同阶方阵. 考虑

$$D_{21},D_{31},\cdots;D_{m1}.$$

因为 $A_iA_j=A_jA_i$，所以 $D_{j1}D_{k1}=D_{k1}D_{j1},k、j=2,\cdots,m$. 而 A_i 相似于对角矩阵，从而 D_{k1}相似于对角矩阵. 由归纳假定存在可逆矩阵 Q_1，使 $Q_1^{-1}D_{k1}Q_1$ 为对角矩阵，$k=2,\cdots,m$.

类似地可证：对 $D_{2k},\cdots,D_{mk},(k=2,\cdots,m)$，分别存在 $Q_2,\cdots,Q_s$ 使它们同时相似于对角矩阵.

令 $Q=\mathrm{diag}(Q_1,\cdots,Q_s)$，则 $Q^{-1}\mathrm{diag}(D_{i1},\cdots,D_{is})Q$ 为对角矩阵($i=2,\cdots,m$).

再令 $T=PQ$，则 $T^{-1}A_iT$ 为对角矩阵($i=2,\cdots,m$)，

$$
\begin{aligned}
T^{-1}A_1T&=Q^{-1}(P^{-1}A_1P)Q=Q^{-1}\mathrm{diag}(\lambda_1E_1,\cdots,\lambda_sE_s)Q\\
&=\mathrm{diag}(Q_1^{-1}\cdots,Q_s^{-1})\mathrm{diag}(\lambda_1E_1,\cdots,\lambda_sE_s)\mathrm{diag}(Q_1,\cdots,Q_s)\\
&=\mathrm{diag}(\lambda_1E_1,\cdots,\lambda_sE_s)
\end{aligned}
$$

也是对角矩阵，归纳法完成.

941. (Laffey) 设 A,B 是 n 阶复矩阵，秩$(AB-BA)\leqslant1$，则存在可逆矩阵 T，使 $T^{-1}AT$ 与 $T^{-1}BT$ 为上三角矩阵.

证　用归纳法于阶 n.

当 $n=1$ 时结论自然成立，假定对于小于 n 的自然数结论成立.

对于 n 阶矩阵 A、B，由第 **960** 条知存在 $X_1\in C^n$，$X_1\neq0$，使得 $AX_1=\lambda_aX_1$，$BX_1=\lambda_bX_1$. 将 X_1 扩充成 C^n 的一组基 $\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$. 令 $P=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，则

$$
P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_a & * \\ 0 & A_1\end{bmatrix},\quad P^{-1}BP=\begin{bmatrix}\lambda_b & * \\ 0 & B_1\end{bmatrix}.
$$

所以

$$
P^{-1}(AB-BA)P=\begin{bmatrix}0 & * \\ 0 & A_1B_1-B_1A_1\end{bmatrix}.
$$

但由秩$(AB-BA)\leqslant1$ 知秩$(A_1B_1-B_1A_1)\leqslant1$，故由归纳假定知存在 $n-1$ 阶可逆矩阵 P_1，使得 $P_1^{-1}AP_1$ 与 $P_1^{-1}B_1P_1$ 均为上三角矩阵. 于是，类似于第 **940** 条后半部分的作法可知结论对于 n 成立. 归纳法完成.

第十一章 特征值与特征向量

一、 定义与求法

942. 什么叫做方阵的特征值与特征向量?

答 设$A\in P^{n\times n}$,如果存在$\lambda\in P$与非零向量$X\in P^n$使得$AX=\lambda X$成立,那么称λ为A的一个特征值,X称为A属于特征值λ的一个特征向量.

943. 什么叫做特征矩阵与特征多项式?

答 设$A\in P^{n\times n}$,λ—矩阵$\lambda E-A$称为A的特征矩阵,它的行列式$|\lambda E-A|$称为A的特征多项式,记为$f_A(\lambda)$,有时简记为$f(\lambda)$.

944. 设n阶方阵$A=(a_{ij})$,则

$$f_A(\lambda)=|\lambda E-A|=\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^k s_k\lambda^{n-k}+\cdots+(-1)^n|A|,$$

其中s_k是A的所有k阶主子式的和.

证 将$f_A(\lambda)$分解为2^n个n阶行列式之和

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & 0-a_{12} & \cdots & 0-a_{1n}\\ 0-a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & 0-a_{2n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ 0-a_{n1} & 0-a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=|\lambda E|+\sum_{k=1}^{n}\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}D(i_1,\cdots,i_k), \qquad (1)$$

其中$D(i_1,\cdots,i_k)$表示n阶行列式,它的第$i_1,\cdots,i_k$列分别取$-A$的第$i_1,\cdots,i_k$列,其余$n-k$个列分别取相应λE中的列.而

$$D(i_1,\cdots,i_k)=(-1)^k\lambda^{n-k}\Delta(i_1,\cdots,i_k),$$

这里 $\Delta(i_1,\cdots,i_k)$ 是 A 取第 $i_1,\cdots,i_k$ 行和第 $i_1,\cdots,i_k$ 列所成的 k 阶主子式，于是

$$|\lambda E-A|=\lambda^n+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k s_k\lambda^{n-k}.$$

945. 方阵 A 的特征多项式 $f_A(\lambda)=|\lambda E-A|$ 在数域 P 中的全部根就是 A 的全部特征值．

注 n 阶方阵 A 在复数域 C 里一定有 n 个特征值，但在其它数域里却不一定，甚至可能连一个特征值也没有，比如，$A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ 在实数域 R 里无特征值．

946. 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的全部特征值，则

$$trA=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}, \quad (1)$$

$$|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n. \quad (2)$$

注 A 为非奇异矩阵 $\Longleftrightarrow A$ 的特征值都不等于 0.

947. 相似矩阵具有相同的特征多项式，从而有相同的特征值．

注 此命题之逆不成立，即当 A 与 B 有相同的特征值时，A 与 B 不一定相似，比如 $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.

948. 设 λ_0 为 n 阶方阵 A 的某一特征值，则齐次线性方程组 $(\lambda_0E-A)X=0$ 的所有非零解都是 A 属于 λ_0 的特征向量．

注 当秩 $(\lambda_0E-A)=r$ 时，设 $(\lambda_0E-A)X=0$ 的基础解系为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$，则 A 属于 λ_0 的所有特征向量为

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{n-r}\alpha_{n-r},$$

其中 $k_1,\cdots,k_{n-r}$ 是不全为零的任意常数．即 $V_{\lambda_0}=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r})$.

949. 设

$$A=\begin{bmatrix}5 & 6 & -3\\ -1 & 0 & -1\\ 1 & 2 & -1\end{bmatrix}.$$

在复数域上求 A 的特征值与相应的特征向量.

解　因为

$f_A(\lambda)=|\lambda E-A|=(\lambda-2)(\lambda-1-\sqrt{3})(\lambda-1+\sqrt{3})$,所以 A 的三个特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=1+\sqrt{3},\lambda_3=1-\sqrt{3}$.

属于 λ_1 的特征向量为 $k(2,-1,0),k\neq0$.

属于 λ_2 的特征向量为 $k(3,-1,2-\sqrt{3}),k\neq0$.

属于 λ_3 的特征向量为 $k(3,-1,2+\sqrt{3}),k\neq0$.

950.　设 a,b,c 为复数,令

$$A=\begin{bmatrix}b&c&a\\c&a&b\\a&b&c\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}c&a&b\\a&b&c\\b&c&a\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}a&b&c\\b&c&a\\c&a&b\end{bmatrix},$$

则

1) A,B,C 彼此相似;

2) 当 $BC=CB$ 时,A,B,C 的特征值至少有两个等于零.

证　1) 因为

$$\lambda E-A=\begin{bmatrix}\lambda-b&-c&-a\\-c&\lambda-a&-b\\-a&-b&\lambda-c\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}-a&-b&\lambda-c\\-c&\lambda-a&-b\\\lambda-b&-c&-a\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}\lambda-c&-b&-a\\-b&\lambda-a&-c\\-a&-c&\lambda-b\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}\lambda-c&-b&-a\\-a&-c&\lambda-b\\-b&\lambda-a&-c\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}\lambda-c&-a&-b\\-a&\lambda-b&-c\\-b&-c&\lambda-a\end{bmatrix}=\lambda E-B,$$

即　$\lambda E-A\simeq\lambda E-B$,所以 $A\sim B$.

类似地可证 $A\sim C,B\sim C$.

2) 由 $BC=CB$,比较对应位置上的元素可得

$$a^2+b^2+c^2=ac+ab+bc.$$

因为

$$|\lambda E-C|=\lambda^3-(a+b+c)\lambda^2+(ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2)\lambda$$
$$+a^3+b^3+c^3-3abc.$$

又

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0,$$

所以 $|\lambda E-C|=\lambda^3-(a+b+c)\lambda^2$. 故 C 有三个特征值 $\lambda_1=\lambda_2=0$, $\lambda_3=a+b+c$. 由此即得 2).

951. 令 $A=\begin{bmatrix}0 & E_{n-1}\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, 其中 E_{n-1} 为 $n-1$ 阶单位矩阵.

1) 计算 $A^2, A^3, \cdots, A^{n-1}$;

2) 求 A 在复数域 C 里的全部特征值.

解 1) $A^2=\begin{bmatrix}0 & E_{n-2}\\ E_2 & 0\end{bmatrix}$. 用数学归纳法可证

$$A^k=\begin{bmatrix}0 & E_{n-k}\\ E_k & 0\end{bmatrix},\quad k=1,2,\cdots,n-1.$$

2) 因为 $|\lambda E-A|=\lambda^n-1$, 所以 A 在复数域 C 里的特征值为全部 n 次单位根, 即 $\varepsilon, \varepsilon^2, \cdots, \varepsilon^{n-1}, \varepsilon^n=1$, 其中 $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$.

952. 设 n 阶方阵 A 的任意一行元素的和都是 a, 则 $\lambda=a$ 是 A 的一个特征值, 并且 $\beta'=(1,1,\cdots,1)$ 是 A 的属于 $\lambda=a$ 的一个特征向量.

证 由 $A\beta=a\beta$ 即知.

953. 设 $A=\begin{bmatrix}4 & 6 & 0\\ -3 & -5 & 0\\ -3 & -6 & 1\end{bmatrix}$, 求 A^{10}.

解 因为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-4 & -6 & 0\\ 3 & \lambda+5 & 0\\ 3 & 6 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+2),$$

故 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-2$. 求出属于 λ_1 的特征向量为 $k_1(-2,1,0)+k_2(0,0,1)$, k_1,k_2 不全为 0. 属于 λ_3 的特征向量为 $k(-1,1,1)$, $k\neq 0$.

取 $T=\begin{bmatrix}-2 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$, 则 $T^{-1}AT=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$.

于是

$$A^{10}=T\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}^{10}T^{-1}=\begin{bmatrix}-1022 & -2046 & 0\\ 1023 & 2047 & 0\\ 1023 & 2046 & 1\end{bmatrix}.$$

954. 方阵 A 与 B 有相同的特征值,它们同一特征值的特征向量是否也相同?

答 不一定. 比如, $A=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-2 & -2\\ 6 & 5\end{bmatrix}$, 它们有相同的特征值 1 和 2, A 属于 1 的特征向量为 $k(-2,1)$, $k\neq 0$, 而 B 属于 1 的特征向量为 $l(-2,3)$, $l\neq 0$.

955. 设 A 是 $n(\geqslant 2)$ 阶矩阵,则

1) A 属于不同特征值的特征向量是线性无关的;

2) 当 A 为实对称矩阵时,在 R^n 中属于不同特征值的特征向量是正交的.

956. 1) 设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的全部特征值,那么 $\overline{\lambda}_1,\cdots,\overline{\lambda}_n$ 是 $\overline{A}$ 与 $\overline{A'}$ 的全部特征值.

2) 若 β 与 ξ 分别是 A 与 A' 属于特征值 λ_0 的特征向量,则 $\overline{\beta}$ 与 $\overline{\xi}$ 分别是 $\overline{A}$ 与 $\overline{A'}$ 的属于特征值 $\overline{\lambda}_0$ 的特征向量.

证 1) 设 $A\alpha_i=\lambda_i\alpha_i$, $i=1,2,\cdots,n$, 其中 α_i 为属于 λ_i 的特征向量,那么 $\overline{A}\,\overline{\alpha}_i=\overline{\lambda}_i\overline{\alpha}_i$, $i=1,2,\cdots,n$, 即 $\overline{\lambda}_1,\cdots,\overline{\lambda}_n$ 为 $\overline{A}$ 的特征值. 由 $\overline{A}$ 与 $\overline{A'}$ 有相同的特征值即得 1).

2) 因为 $A\beta=\lambda_0\beta$, 所以 $\overline{A}\,\overline{\beta}=\overline{\lambda}_0\overline{\beta}$, 即 $\overline{\beta}$ 为 $\overline{A}$ 属于 $\overline{\lambda}_0$ 的特征向

量.

因为 $A'\zeta=\lambda_0\zeta$，所以 $\overline{A'}\bar{\zeta}=\bar{\lambda}_0\bar{\zeta}$，即 $\bar{\zeta}$ 是 $\overline{A'}$ 属于 $\bar{\lambda}_0$ 的特征向量.

957. 设 α_i 为矩阵 A 的属于不同特征值 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,s)$ 的特征向量，当 $k_i(i=1,2,\cdots,s)$ 中至少有两个不为零时，$\sum_{i=1}^{s}k_i\alpha_i$ 不是 A 的特征向量.

证 用反证法. 若 $A(\sum_{i=1}^{s}k_i\alpha_i)=\lambda(\sum_{i=1}^{s}k_i\alpha_i)$，则

$$\sum_{i=1}^{s}k_iA\alpha_i=\sum_{i=1}^{s}\lambda k_i\alpha_i.$$

于是

$$\sum_{i=1}^{s}k_i(\lambda-\lambda_i)\alpha_i=0.$$

由于属于不同特征值的特征向量线性无关，故

$$k_i(\lambda-\lambda_i)=0,i=1,2,\cdots,s.$$

而 k_i 中至少有两个不为零，不妨设 $k_j\neq0,k_t\neq0,j\neq t$. 这就导致 $\lambda-\lambda_j=0$ 及 $\lambda-\lambda_t=0$，因而 $\lambda_j=\lambda=\lambda_t$，矛盾.

958. 如果数域 P 上 n 阶矩阵 A 以 P^n 中的每个非零向量作为它的特征向量，那么 A 是数量矩阵.

证 取 P^n 的一组标准基

$$\varepsilon_1=\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\quad \varepsilon_2=\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix},\quad \varepsilon_n=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}.$$

并设 $A\varepsilon_i=\lambda_i\varepsilon_i,i=1,2,\cdots,n$，则

$$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n.$$

否则，如果存在某两个例如 λ_i 和 λ_j，$\lambda_i\neq\lambda_j$，则由第 **957** 条知 $\varepsilon_i+\varepsilon_j$ 不是 A 的特征向量，与已知矛盾. 令 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=k$，则 $A\varepsilon_i=k\varepsilon_i$，于是

$$A(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix}k & & & \\ & k & & \\ & & \ddots & \\ & & & k\end{pmatrix},$$

即

$$AE=E\begin{pmatrix}k & & & \\ & k & & \\ & & \ddots & \\ & & & k\end{pmatrix},\quad A=kE.$$

959. 设 A,B 为复数域 C 上两个 n 阶矩阵，且 $AB=BA$，则 A 与 B 至少有一个公共的特征向量.

证 设 λ 为 A 在复数域内的任一特征值，属于 λ 的特征子空间 V_λ 的维数为 s，设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是 V_λ 的一组基，则 $A\alpha_t=\lambda\alpha_t,t=1,2,\cdots,s$. 因 $AB=BA$，故对于 V_λ 的任一基向量 $\alpha_j,j=1,2,\cdots,s$，有

$$A(B\alpha_j)=B(A\alpha_j)=B(\lambda\alpha_j)=\lambda(B\alpha_j).$$

从而 $B\alpha_j\in V_\lambda,j=1,2,\cdots,s$. 于是存在 $c_{1j},c_{2j},\cdots,c_{sj}\in C$，使

$$B\alpha_j=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\begin{pmatrix}c_{1j}\\ c_{2j}\\ \vdots\\ c_{sj}\end{pmatrix},j=1,2,\cdots,s.$$

因而

$$B(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)D$$

这里 $D=(c_{ij})_{s\times s}$. 设 μ 是 D 的一个特征值，$(m_1,\cdots,m_s)'$ 为 D 属于 μ 的特征向量，令

$$0\neq\alpha_0=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\begin{pmatrix}m_1\\m_2\\\vdots\\m_s\end{pmatrix}\in V_\lambda,$$

则

$$B\alpha_0=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)D\begin{pmatrix}m_1\\m_2\\\vdots\\m_s\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\mu\begin{pmatrix}m_1\\m_2\\\vdots\\m_s\end{pmatrix}=\mu\alpha_0.$$

又 $A\alpha_0=\lambda\alpha_0$,故 α_0 就是所求的 A 与 B 的公共的特征向量.

960. (Choi)设 A, B 是 n 阶复矩阵,秩$(AB-BA)\leqslant 1$,则 A,B 有公共的特征向量.

证 由于 $A=0$ 时结论自然成立,因此无妨假定 $A\neq 0$;又由于秩$(AB-BA)=$秩$((A-\lambda E)B-B(A-\lambda E))$,故而可假定 A 为奇异矩阵.

令矩阵 A 的列向量张成的向量空间为 $C(A)$,而 $Z(A)=\{x|Ax=0\}$,则 $1\leqslant \dim C(A)$,$\dim Z(A)<n$,且 $C(A)$或 $Z(A)$为 A、B 的不变子空间,故而 A、B 有公共的特征向量.下证 $C(A)$或 $Z(A)$为 A、B 的不变子空间:

若 $Z(A)$不是 A、B 的不变子空间,则存在 $x_0\in Z(A)$,因而 $Bx_0\overline{\in} Z(A)$.所以$(AB-BA)x_0\neq 0$.因而 $\dim C(AB-BA)>0$,$\dim C(AB-BA)=$秩$(AB-BA)=1$.所以 ABx_0 可张成 $C(AB-BA)$.于是对于任意复 n 维列向量 x,存在 a_x,有$(AB-BA)x=a_xABx_0$,$BAx=AB(x-a_xx_0)$,即 $C(A)$是 A、B 的不变子空间.

961. 设多项式 $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 的根为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$.

$$A=\begin{bmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

求 A 的特征值和特征向量.

解　因为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda+a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ -1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & & -1 & \lambda \end{vmatrix}=f(\lambda),$$

所以 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的特征值.

设　$AX=\lambda_i X$，　$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)',i=1,\cdots,n$.

则

$$\begin{bmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda_i x_1 \\ \lambda_i x_2 \\ \vdots \\ \lambda_i x_n \end{bmatrix},$$

即

$$\begin{cases} -a_{n-1}x_1-a_{n-2}x_2-\cdots-a_1x_{n-1}-a_0x_n=\lambda_i x_1, \\ x_k=\lambda_i x_{k+1}, \quad k=1,2,\cdots,n-1. \end{cases}$$

由后一式递推可得 $x_k=\lambda_i^{n-k}x_n$，代入上一式移项得

$$(\lambda_i^n+a_{n-1}\lambda_i^{n-1}+\cdots+a_1\lambda_i+a_0)x_n=0.$$

即

$$f(\lambda_i)x_n=0x_n=0.$$

可见 x_n 是独立未知量. 令 $x_n=1$ 得属于 λ_i 的一个特征向量

$$\alpha_i=(\lambda_i^{n-1},\lambda_i^{n-2},\cdots,\lambda_i,1)'.$$

962. 设 α_1 是矩阵 A 的属于特征值 λ 的特征向量，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 满足 $(A-\lambda E)\alpha_{i+1}=\alpha_i,i=1,2,\cdots,s-1$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关.

证 设

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0, \tag{1}$$

则

$$(A-\lambda E)(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s)=0.$$

利用 $(A-\lambda E)\alpha_1=0,(A-\lambda E)\alpha_{i+1}=\alpha_i,i=1,2,\cdots,s-1$，得

$$k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_{s-1}=0. \tag{2}$$

再用 $A-\lambda E$ 左乘(2)式两端，这样继续下去可得

$$k_s\alpha_1=0.$$

因为 $\alpha_1\neq0$，故 $k_s=0$. 然后将 $k_s=0$ 代入(1)式，重复上述步骤可得 $k_{s-1}=k_{s-2}=\cdots=k_1=0$. 从而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关.

963. 设 A 为 n 阶矩阵，则存在一个 n 维向量 α，使 $\alpha,A\alpha,\cdots,A^{n-1}\alpha$ 线性无关的充要条件是 A 的每个特征值恰有一个线性无关的特征向量.

证 必要性. 设 $\alpha,A\alpha,\cdots,A^{n-1}\alpha$ 线性无关，则它们构成 n 维空间 V 的一组基. 于是 $A^n\alpha$ 可表示为：

$$A^n\alpha=b_0\alpha+b_1A\alpha+\cdots+b_{n-1}A^{n-1}\alpha.$$

设 λ 是 A 的任一特征值，$\beta=x_0\alpha+x_1A\alpha+\cdots+x_{n-1}A^{n-1}\alpha$ 为属于它的任一特征向量，则 $A\beta=\lambda\beta$ 给出

$$\begin{aligned}&x_{n-1}b_0\alpha+(x_0+b_1x_{n-1})A\alpha+\cdots+(x_{n-2}+b_{n-1}x_{n-1})A^{n-1}\alpha\\&=\lambda x_0\alpha+\lambda x_1A\alpha+\cdots+\lambda x_{n-1}A^{n-1}\alpha.\end{aligned}$$

由此推出 $x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}$ 是线性方程组

$$\begin{bmatrix}\lambda & & & & -b_0\\ -1 & \lambda & & & -b_1\\ & -1 & \lambda & & -b_2\\ & & \ddots & \ddots & \vdots\\ & & & -1\quad\lambda & -b_{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_0\\x_1\\x_2\\\vdots\\x_{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$$

的解．因上式的系数矩阵有一个 $n-1$ 级子式不等于零，故它的秩为 $n-1$．因而方程组只有一个线性无关的解，这说明 A 的每个特征值恰有一个线性无关的特征向量．

充分性． 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 为 A 的全部不同的特征值，且每个特征值恰有一个线性无关的特征向量，从而对每个 λ_i 恰有一个若当块，A 的全部初等因子为

$$(\lambda-\lambda_1)^{r_1},(\lambda-\lambda_2)^{r_2},\cdots,(\lambda-\lambda_s)^{r_s},\quad \sum_{i=1}^{s}r_i=n.$$

这样 A 的最小多项式为

$$d_n(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s}=|\lambda E-A|=\lambda^n+b_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+b_0.$$

A 的不变因子为 $1,1,\cdots,1,d_n(\lambda)$．令

$$B=\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & b_0\\ 1 & & & b_1\\ & \ddots & & \vdots\\ & & 1 & -b_{n-1}\end{bmatrix},$$

则 B 的不变因子也是 $1,\cdots,1,d_n(\lambda)$．从而 $A\sim B$，即存在可逆矩阵 $T=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，使 $T^{-1}AT=B$．那么

$$A(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)B.$$

所以，$\alpha_1,\alpha_2=A\alpha_1,\cdots,\alpha_n=A^{n-1}\alpha_1$ 是线性无关的．

964. 1）设 A 是一个偶数阶实方阵，$|A|<0$，则 A 既有正特征值又有负特征值．

2）设 A 是一个奇数阶实方阵，若 $|A|>0$，则 A 必有正特征值．若 $|A|<0$，则 A 必有负特征值．

证 (1) 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的所有特征值，由于 $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|<0$，而复根成对出现并且 $\lambda\bar{\lambda}>0$．因此 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 中有偶数个复根与偶数个实根，且一定有负实根及负根的个数为奇数．因而至少有一个正根．

2）设 A 的阶为 n，则

$$f(\lambda)=|\lambda E-A|=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n.$$

因 n 为奇数,故 $f(0)=a_n=(-1)^n|A|=-|A|$.

若$|A|>0$,则 $f(0)=-|A|<0$,而对充分大的正数 N,$f(N)>0$. 因此 $f(\lambda)$在$(0,N)$内有正根,即 A 有正特征值. 若$|A|<0$,则 $f(0)=-|A|>0$,而对于充分大的正数 N,$f(-N)<0$. 从而 $f(\lambda)$在$(-N,0)$内有负根,即 A 有负特征值.

965. 设 A 为幂零矩阵,则它的特征值全为 0.

966. 设 A,B 分别是 $n\times m$ 和 $m\times n$ 矩阵,其中 $m\leqslant n$,则 AB 与 BA 的特征多项式只差因子 λ^{n-m}. 从而它们有相同的非零特征值.

证 由第 **208** 条知

$$|\lambda E_n-AB|=\lambda^{n-m}|\lambda E_m-BA|,$$

从而它们有相同的非零特征值.

注 当 A,B 都是 $n\times n$ 矩阵时,AB 与 BA 有相同的特征多项式.

967. 设非零实行向量 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,求 $A'A$ 的特征值与特征向量.

解 由第 **966** 条得

$$|\lambda E-A'A|=\lambda^{n-1}|\lambda E-AA'|=\lambda^{n-1}\cdot[\lambda-(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)].$$

故 $A'A$ 的所有特征值为

$$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=0,\lambda_n=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2.$$

令 $B=A'A=\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}(a_1,\cdots,a_n)$. 求 B 的属于 $\lambda=0$ 的特征向量. 由于 $BX=0X=0$,得

$$\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}(a_1,\cdots,a_n)\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}.$$

左乘$(a_1,\cdots,a_n)$，并注意$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\neq 0$，所以$BX=0$与下面方程同解：

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=0.$$

不失一般性设$a_1\neq 0$，则得$\lambda=0$的特征向量

$$k_1\begin{bmatrix} a_2\\ -a_1\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix} a_3\\ 0\\ -a_1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}+\cdots+k_{n-1}\begin{bmatrix} a_n\\ 0\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ -a_1\end{bmatrix},$$

其中$k_1,k_2,\cdots,k_{n-1}$不全为零．

再求B属于$\lambda_n=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$的特征向量．由$BX=\lambda_nX$知

$$k\begin{bmatrix} a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix},\quad k\neq 0$$

为B的特征向量．

968. 设n阶矩阵A的n个特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，相应的特征向量为$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$，$A^*$为$A$的伴随矩阵，设$A^*$的$n$个特征值为$\mu_1,\cdots,\mu_n$那么

1）当A可逆时，A^*的n个特征值为

$$\mu_i=\frac{|A|}{\lambda_i}=\lambda_1\cdots\lambda_{i-1}\lambda_{i+1}\cdots\lambda_n,\quad i\neq 1,2,\cdots,n;\tag{1}$$

$$A^*\alpha_i=\mu_i\alpha_i,i=1,2,\cdots,n.\tag{2}$$

2）当A不可逆时，$\mu_1=\cdots=\mu_{n-1}=0$，$\mu_n=A_{11}+\cdots+A_{nn}$，并求相应的特征向量．

证 1) 因为 $A^*=|A|A^{-1}$，A^{-1}的 n 个特征值为$\frac{1}{\lambda_1},\cdots,\frac{1}{\lambda_n}$，故 A^*的 n 个特征值为$\frac{|A|}{\lambda_1},\cdots,\frac{|A|}{\lambda_n}$. 由$|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$ 即得(1)式.

$$A\alpha_i=\lambda_i\alpha_i，左乘\frac{|A|}{\lambda_i}A^{-1}得\frac{|A|}{\lambda_i}\alpha_i=|A|A^{-1}\alpha_i=A^*\alpha_i.$$

所以 α_i 既是 A 属于 λ_i 的特征向量，也是 A^*属于特征值$\frac{|A|}{\lambda_i}$的特征向量，得证.

2) 当$|A|=0$ 时，秩$(A^*)\leqslant 1$，若 $A^*=0$，则 $\mu_1=\cdots=\mu_{n-1}=0$，$\mu_n=A_{11}+A_{22}+\cdots+A_{nn}=0$. 这时任意非零向量均为 A^*的特征向量.

若秩$(A^*)=1$，则 A^*的一切二阶主子式都等于零. 由第 **944** 条知

$$|\mu E-A^*|=\mu^n-s_1\mu^{n-1}=\mu^{n-1}[\mu-(A_{11}+A_{22}+\cdots+A_{nn})].$$

所以 $\mu_1=\cdots=\mu_{n-1}=0$，$\mu_n=A_{11}+A_{22}+\cdots+A_{nn}\neq 0$.

为了求特征向量，不失一般性设 $A_{11}\neq 0$.

对于 $\mu=0$，秩$(A^*)=1$. 求解$(-A^*)X=0$：

$$-A^*\longrightarrow\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{bmatrix}.$$

所以相应的特征向量为：

$$k_1\begin{bmatrix}A_{21}\\-A_{11}\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}+\cdots+k_{n-1}\begin{bmatrix}A_{n1}\\0\\0\\\vdots\\-A_{11}\end{bmatrix}，k_1,\cdots,k_{n-1}不全为零.$$

对于 $\mu_n=A_{11}+A_{22}+\cdots+A_{nn}$，解方程组

$$A^*\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=(A_{11}+A_{22}+\cdots+A_{nn})\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}. \tag{3}$$

设

$$A^*=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ b_2A_{11} & b_2A_{21} & \cdots & b_2A_{n1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b_nA_{11} & b_nA_{21} & \cdots & b_nA_{n1}\end{bmatrix},$$

令 $c=A_{11}+A_{22}+\cdots+A_{nn}$,则由(3)式得

$$\begin{cases}A_{11}x_1+A_{21}x_2+\cdots+A_{n1}x_n=cx_1,\\ b_2(A_{11}x_1+A_{21}x_2+\cdots+A_{n1}x_n)=cx_2,\\ \cdots\cdots\\ b_n(A_{11}x_1+A_{21}x_2+\cdots+A_{n1}x_n)=cx_n.\end{cases} \tag{4}$$

由(4)知,$b_i(cx_1)=cx_i$,所以 $b_ix_1=x_i$, $i=2,\cdots,n$.

令 $x_1=1$,则 $x_i=b_i,i=2,\cdots,n$. 这样得出属于 c 的特征向量为 $k(1,b_2,\cdots,b_n)',k\neq0$.

969. 设 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})$,其中 $a_{ij}=\begin{cases}a, & i=j;\\ b, & i\neq j.\end{cases}$ 求 A 的特征值与相应的特征向量.

解 1) 当 $a=b=0$ 时,$A=0$,A 的特征值全为 0,且任意非零向量都是 A 的特征向量.

2) 当 $a=b\neq0$ 时,$|\lambda E-A|=\lambda^{n-1}(\lambda-na)$,$A$ 的 n 个特征值为 $\lambda_1=\cdots=\lambda_{n-1}=0,\lambda_n=na$.

当 $\lambda=0$ 时,相应的特征向量为:

$$k_1\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}+\cdots+k_{n-1}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\\vdots\\-1\end{bmatrix},k_1,k_2,\cdots,k_{n-1}\text{不全为零}.$$

当 $\lambda_n=na$ 时，相应的特征向量为 $k(1,1,\cdots,1)$， $k\neq0$.

3) 当 $a\neq b$ 时，$|\lambda E-A|=(\lambda-a+b)^{n-1}(\lambda-a-(n-1)b)$，$A$ 的 n 个特征值为 $\lambda_1=\cdots=\lambda_{n-1}=a-b$， $\lambda_n=a+(n-1)b$.

当 $\lambda=a-b$ 时，相应的特征向量为

$$k_1\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\\vdots\\0\end{bmatrix}+\cdots+k_{n-1}\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\\-1\end{bmatrix},k_1,k_2,\cdots,k_{n-1}\text{不全为零}.$$

当 $\lambda=a+(n-1)b$ 时，相应的特征向量为 $k(1,1,\cdots,1)$，$k\neq0$.

970. 设

$$A=\begin{bmatrix}1&2&\cdots&n\\2&3&\cdots&n+1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\n&n+1&\cdots&2n-1\end{bmatrix},$$

则

$$|\lambda E-A|=\lambda^{n-2}\left[\lambda^2-n^2\lambda-\frac{1}{12}(n^4-n^2)\right].$$

证 容易看出，秩 $A=2$，即 A 的一切 3 阶子式都为 0，由第 **944** 条知

$$|\lambda E-A|=\lambda^n-s_1\lambda^{n-1}+s_2\lambda^{n-2}. \tag{1}$$

而

$$s_1=1+3+\cdots+(2n-1)=n^2,$$

$$s_2=\sum_{i=1}^{n-1}i^2+\sum_{i=1}^{n-2}i^2+\cdots+1^2=\frac{1}{12}n^2(n-1)(n+1)=\frac{1}{12}n^2(n^2-1),$$

代入(1)即得欲证的等式.

971. 求矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a_1^2+1 & a_1a_2+1 & \cdots & a_1a_n+1 \\ a_2a_1+1 & a_2^2+1 & \cdots & a_2a_n+1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_na_1+1 & a_na_2+1 & \cdots & a_n^2+1 \end{bmatrix}$$

的特征值.

解 令 $B=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$, $\sum_{i=1}^{n}a_i=d$, $\sum_{i=1}^{n}a_i^2=m$, 则 $A=B'B$, 于是

$$|\lambda E-A|=|\lambda E-B'B|=\lambda^{n-2}|\lambda E-BB'|$$

$$=\lambda^{n-2}\begin{vmatrix} \lambda-m & -d \\ -d & \lambda-n \end{vmatrix}=\lambda^{n-2}[\lambda^2-(n+m)\lambda+(nm-d^2)].$$

所以

$$\lambda_1=\cdots=\lambda_{n-2}=0,\lambda_{n-1}=t_1,\lambda_n=t_2,$$

其中 t_1,t_2 为 $\lambda^2-(n+m)\lambda+(nm-d^2)$ 的两个根.

972. 设 n 阶矩阵 A 的 n 个特征值互异, B 与 A 有完全相同的特征值, 则存在矩阵 Q 及可逆矩阵 P, 使 $A=PQ$, $B=QP$.

证 由于 A 与 B 有完全相同的特征值, 而且所有特征值互异, 因此 $A\sim B$, 从而存在可逆矩阵 P, 使 $P^{-1}AP=B$. 令 $P^{-1}A=BP^{-1}=Q$, 则 $A=PQ$, $B=QP$.

973. 设 n 阶矩阵 A 的行列式的值为 d, 而且 A 的特征值全是实数. 如果矩阵 $E-A$ 的特征值的绝对值都小于 1, 那么

$$0<d<2^n.$$

证 设 A 的全部特征值是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$, 则 $E-A$ 的全部特征

值是 $1-\lambda_1, 1-\lambda_2, \cdots, 1-\lambda_n$. 因为这些特征值全是实数，且 $|1-\lambda_i|<1$，从而 $-1<1-\lambda_i<1, 0<\lambda_i<2, i=1,2,\cdots,n$. 于是

$$0<d=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n<2^n.$$

974.　如果 A,B 都是实正定矩阵，那么 AB 的特征值全是正实数；如果 A 是实正定矩阵，而 B 是实半正定矩阵，那么 AB 的特征值全是非负实数．

证　设 A,B 全是实正定矩阵，则存在实可逆矩阵 P 与 Q，使 $A=PP', B=QQ'$. 因为

$$AB=(PP')(QQ')=(Q')^{-1}[(P'Q)'(P'Q)]Q',$$

所以 $AB\sim(P'Q)'(P'Q)$. 又相似矩阵的特征值相同，故 AB 与 $(P'Q)'(P'Q)$ 有相同的特征值．而后者为实正定矩阵，其特征值全是正数，因而 AB 的特征值全是正实数．

如果 A 是实正定矩阵，而 B 是实半正定矩阵，那么存在实正定矩阵 D，使 $A=D^2$. 这样 $AB=D^2B$. 从而

$D^{-1}(AB)D=D^{-1}(D^2B)D=DBD=D'BD$，故 $AB\sim D'BD$.
而 $D'BD$ 合同于 B，由 B 半正定推知 $D'BD$ 半正定，则 $D'BD$ 的特征值全为非负实数，从而 AB 的特征值亦然．

975.　什么叫做线性变换 σ 的特征值与特征向量？

答　设 V 是数域 P 上 n 维线性空间，σ 是 V 的一个线性变换，若存在 $\lambda_0\in P$，非零向量 $\xi\in V$，使 $\sigma\xi=\lambda_0\xi$，则称 λ_0 为 σ 的一个特征值，ξ 为 σ 属于 λ_0 的一个特征向量．

976.　怎样求线性变换 σ 的特征值与特征向量？

答　先取线性空间 V 的一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$，再求 σ 在这组基下的矩阵 A，即

$$\sigma(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)A.$$

则 A 在 P 中的特征值就是 σ 的特征值．

设 λ_0 是 A 的特征值，求出 A 属于 λ_0 的一组线性无关的特征向量：

$$b_1=\begin{bmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{1n} \end{bmatrix}, \cdots, b_r=\begin{bmatrix} b_{r1} \\ \vdots \\ b_{rn} \end{bmatrix}. \qquad (1)$$

令

$$\beta_1=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\begin{bmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{1n} \end{bmatrix}, \cdots, \beta_r=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\begin{bmatrix} b_{r1} \\ \vdots \\ b_{rn} \end{bmatrix}, \qquad (2)$$

则 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 就是 σ 属于特征值 λ_0 的一组线性无关的特征向量.

977. 在复数域上求下列线性变换的特征值与相应的特征向量：

1）设 σ 是 3 维线性空间 V 的线性变换，它在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下矩阵为

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix};$$

2）设线性变换 τ 在线性空间 V 一组基 β_1,β_2,β_3 下矩阵为

$$B=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{bmatrix}.$$

解 1）$|\lambda E-A|=\lambda(\lambda-\sqrt{14}i)(\lambda+\sqrt{14}i)$，$\sigma$ 的特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=\sqrt{14}i,\lambda_3=-\sqrt{14}i$.

A 属于 $0,\sqrt{14}i$ 和 $-\sqrt{14}i$ 的特征向量分别为

$$k_1\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, k_2\begin{bmatrix} 6+\sqrt{14}i \\ -2+3\sqrt{14}i \\ -10 \end{bmatrix}, k_3\begin{bmatrix} 6-\sqrt{14}i \\ -2-3\sqrt{14}i \\ -10 \end{bmatrix}, k_1,k_2,k_3 \text{ 全不为零}.$$

从而 σ 属于 $0,\sqrt{14}i,-\sqrt{14}i$ 的特征向量分别为

$$\alpha_1=k_1(3\varepsilon_1-\varepsilon_2+2\varepsilon_3),$$

$$\alpha_2=k_2[(6+\sqrt{14}i)\varepsilon_1+(-2+3\sqrt{14}i)\varepsilon_2-10\varepsilon_3],$$

$$\alpha_3=k_3(6-\sqrt{14}i)\varepsilon_1+(-2-3\sqrt{14}i)\varepsilon_2-10\varepsilon_3,$$

k_1,k_2,k_3 全不为零.

2) $|\lambda E-B|=(\lambda-1)^2(\lambda+2)$, τ 的全部特征值

$$\lambda_1=\lambda_2=1, \lambda_3=-2.$$

B 属于 1, −2 的特征向量分别为

$$k_1\begin{bmatrix}3\\-6\\20\end{bmatrix},\quad k_2\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, k_1,k_2 \text{ 全不为零}.$$

因此 τ 属于 1, −2 的特征向量分别为

$$r_1=k_1(3\beta_1-6\beta_2+20\beta_3),\quad r_2=k_2\beta_3,\quad k_1,k_2 \text{ 全不为零}.$$

978. 什么叫做谱半径?

答 n 阶矩阵 A 在复数域上的 n 个特征值的集合 $\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$ 称为 A 的谱. $\rho(A)=\max\{|\lambda_1|,|\lambda_2|,\cdots,|\lambda_n|\}$ 称为 A 的谱半径.

979. 求矩阵

$$A=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-7&1\\0&-2&-5\end{bmatrix}$$

的谱半径.

解 因为 $|\lambda E-A|=(\lambda+1)(\lambda+6-i)(\lambda+6+i)$, 所以

$\lambda_1=-1, \lambda_2=-6+i, \lambda_3=-6-i.$

故 $\rho(A)=\max\{|\lambda_1|,|\lambda_2|,|\lambda_3|\}=\sqrt{37}.$

980. 设 $A=(a_{ij})$ 是复数域上的 n 阶矩阵, 则 $\rho(A)\leqslant R$, 其中 $\rho(A)$ 为 A 的谱半径, $R=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|$.

证 设 λ_0 为 A 的任一特征值, 由圆盘定理知, 存在 k 使 $|\lambda_0-a_{kk}|\leqslant\sum\limits_{j\neq k}|a_{kj}|$. 所以 $|\lambda_0|\leqslant|a_{kk}|+\sum\limits_{j\neq k}|a_{kj}|\leqslant R$. 由 λ_0 的任

意性即得 $\rho(A)\leqslant R$.

二、 三对角矩阵的特征值

981. 什么叫做三对角矩阵？什么叫做 Jacobi 矩阵？

答 $n\times n$ 实矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & \\ c_1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ & & c_{n-1} & a_n \end{bmatrix}$$

称为三对角矩阵.

若 $b_ic_i>0\ (i=1,2,\cdots,n-1)$，则称 A 为 Jacobi 矩阵.

982. 设

$$A=\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & \\ a_1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ & & a_{n-1} & b_n \end{bmatrix}.$$

为三对角矩阵，A_k 为 A 的第 k 阶顺序主子阵($k=1,2,\cdots,n$)，$\psi_k(\lambda)=|\lambda E-A_k|$，则

1) A_k 仍为三对角矩阵；

2) $A_1=b_1$，$A_n=A$；

3) 令 $\psi_0(\lambda)=1$，有

$$\psi_k(\lambda)=(\lambda-b_k)\psi_{k-1}(\lambda)-a_{k-1}c_{k-1}\psi_{k-2}(\lambda),\quad k=2,\cdots,n;\quad (1)$$

4) 当 A 为 Jacobi 矩阵时，A 的特征多项式序列

$$\psi_n(\lambda),\psi_{n-1}(\lambda),\cdots,\psi_1(\lambda),\psi_0(\lambda)\qquad(2)$$

是 Sturm 序列；

5) 令 $R=\max(|a_{i-1}|+|b_i|+|c_i|)$，$i=1,2,\cdots,n$，其中 $a_0=0=c_n$，有 $\rho(A)\leqslant R$；

6) A 的特征值都在区间$[-R,R]$中.

证 1)，2)显然.

3) $Q_k(\lambda)=|\lambda E-A_k|=\begin{vmatrix} \lambda-b_1 & -c_1 & & & \\ -a_1 & \lambda-b_2 & -c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & -c_{k-1} \\ & & & -a_{k-1} & \lambda-b_k \end{vmatrix}$

按最后一行展开即得

$$\psi_k(\lambda)=(\lambda-b_k)\psi_{k-1}(\lambda)-a_{k-1}c_{k-1}\psi_{k-2}(\lambda).$$

4) 因 $\psi_0(\lambda)=1$,所以无实根.

下证(2)相邻的两个多项式没有公共根.用反证法,若 $\psi_i(\lambda)$ 与 $\psi_{i-1}(\lambda)$ 有公共根 β,由(1)式知 β 也是 $\psi_{i-2}(\lambda)$的根,这样继续推下去,可证 β 也是 $\psi_0(\lambda)$的根,矛盾.即(2)中任意两个相邻多项式无公共根.

最后证明,若 $\psi_i(\beta)=0$,则 $\psi_{i+1}(\beta)\cdot\psi_{i-1}(\beta)<0$.事实上,由(2)式知

$$\psi_{i+1}(\beta)=(\beta-b_{i+1})\psi_i(\beta)-a_ic_i\psi_{i-1}(\beta)=-a_ic_i\psi_{i-1}(\beta).$$

因为 $a_ic_i>0$,所以 $\psi_{i-1}(\beta)$ 与 $\psi_{i-1}(\beta)$ 反号.

综上三条,即证得(2)为 Sturm 序列.

5) 由第 **980** 条可知.

6) 由 4) 知(2)是 Sturm 序列.因此由 Sturm 定理,如果 a,b 不是 $\psi_n(\lambda)$的根,那么 $\psi_n(\lambda)$在(a,b)中根的个数为 V_a-V_b,其中 V_c 表示序列

$$\psi_n(c),\psi_{n-1}(c),\cdots,\psi_1(c),\psi_0(c)$$

的变号数.

这样由 5)即知 A 的特征值均在区间$[-R,R]$中.

注 由第 **982** 条利用对分法,可以把 A 的特征值不断分细隔离开来.

983. 求下列三对角矩阵的全部特征值.

$$1)\ A=\begin{bmatrix}0 & -1 & & \\ 1 & 0 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & 1 & 0\end{bmatrix};$$

$$2)\ A=\begin{bmatrix}0 & -1 & & \\ -1 & 0 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 0\end{bmatrix}.$$

解 1) 令 $\alpha+\beta=\lambda,\alpha\beta=-1$，由 α,β 异号知 $\alpha\neq\beta$.

$$|\lambda E-A|=|(\lambda E-A)'|=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & & \\ 1 & \lambda & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & 1 & \lambda\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\alpha+\beta & \alpha\beta & & & \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ & & & 1 & \alpha+\beta\end{vmatrix}=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}.$$

令 $|\lambda E-A|=0$ 得 $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n+1}=1,\frac{\alpha}{\beta}=e^{i\frac{2k\pi}{n+1}},1\leqslant k\leqslant n$. ($\because\frac{\alpha}{\beta}\neq1,\therefore k\neq0$). 又 $\alpha\beta=-1,-\alpha^2=e^{i\frac{2k\pi}{n+1}}$，解之得

$$\begin{cases}\alpha=\pm i(\cos\frac{k\pi}{n+1}+i\sin\frac{k\pi}{n+1}),\\ \beta=\pm i(\cos\frac{k\pi}{n+1}-i\sin\frac{k\pi}{n+1}).\end{cases}$$

$\lambda=\beta+\alpha=\pm2i\cos\frac{k\pi}{n+1},1\leqslant k\leqslant n$. 去掉其中相同的(因为 $\cos\frac{k\pi}{n+1}=-\cos\frac{(n+1-k)\pi}{n+1}$)，$A$ 的 n 个互异特征值为

$\lambda_k=2i\cos\dfrac{k\pi}{n+1},1\leqslant k\leqslant n.$

2）令 $\alpha+\beta=\lambda,\alpha\beta=1$，则

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & & \\ 1 & \lambda & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & \lambda\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\alpha+\beta & \alpha\beta & & \\ 1 & \alpha+\beta & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \alpha\beta \\ & & 1 & \alpha+\beta\end{vmatrix}.$$

当 $\alpha\neq\beta$ 时，令 $|\lambda E-A|=\dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}=0$，得 $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{n+1}=1$.

所以 $\dfrac{\alpha}{\beta}=e^{i\frac{2k\pi}{n+1}},1\leqslant k\leqslant n$（$\because \dfrac{\alpha}{\beta}\neq 1,\therefore k\neq 0$）.

又 $\alpha\beta=1$，于是 $\alpha^2=e^{i\frac{2k\pi}{n+1}}$，解之得

$$\begin{cases}\alpha=\cos\dfrac{k\pi}{n+1}+i\sin\dfrac{k\pi}{n+1},\\ \beta=\cos\dfrac{k\pi}{n+1}-i\sin\dfrac{k\pi}{n+1},\end{cases}1\leqslant k\leqslant n.$$

$\lambda_k=\alpha+\beta=2\cos\dfrac{k\pi}{n+1}$（$1\leqslant k\leqslant n$）为 A 的特征值．当 $\alpha=\beta$ 时，有 $\alpha=\beta=1$ 或 $\alpha=\beta=-1$．这时 $\lambda=2$ 或 $\lambda=-2$．但 $|2E-A|\neq 0$，$|(-2)E-A|\neq 0$，故 $\lambda_k=2\cos\dfrac{k\pi}{n+1}$（$1\leqslant k\leqslant n$）为 A 的全部特征值．

三、 矩阵多项式的特征值

984. 什么叫做矩阵多项式？它与原方阵阶数有什么关系？

答 设 A 为数域 P 上 n 阶矩阵，

$$g(x)=a_mx^m+\cdots+a_1x+a_0\quad \in P[x], a_m\neq 0,$$

则 $a_mA^m+\cdots+a_1A+a_0E$ 称为 A 的多项式，记为 $g(A)$.

如果 A 为 n 阶方阵，则 $g(A)$ 也是 n 阶方阵. 如果 A 为 $m\times n$ 矩阵，$m\neq n$，那么 $g(A)$ 无意义.

985. 设 A 为方阵.

1) 若 $f(x)=k_1g_1(x)+\cdots+k_mg_m(x)$,

$$h(x)=[k_1g_1(x)][k_2g_2(x)]\cdots[k_mg_m(x)],$$

则
$$f(A)=\sum_{i=1}^{m}k_ig_i(A), h(A)=\prod_{i=1}^{m}k_ig_i(A);$$

2) $\forall\ h(x),t(x)\in P[x]$，都有 $h(A)t(A)=t(A)h(A)$;

3) 若 $(g(x),s(x))=1$，则存在 $u(x),v(x)$，使

$$g(A)u(A)+s(A)v(A)=E.$$

证　1)、2)显然，下证 3).

由假设知，存在 $u(x),v(x)$ 使 $g(x)u(x)+s(x)v(x)=1$. 将 A 代入上式即得 3).

986. 设 A 的最小多项式为 $m(\lambda)$，而 $g(\lambda)$ 是任意多项式，则 $g(A)$ 可逆 $\Longleftrightarrow (g(\lambda),m(\lambda))=1$.

证　充分性　设 $(g(\lambda),m(\lambda))=1$，存在 $u(\lambda),v(\lambda)$，使 $u(\lambda)g(\lambda)+v(\lambda)m(\lambda)=1$，所以

$$E=u(A)g(A)+v(A)m(A)=u(A)g(A).$$

故 $g(A)$ 可逆.

必要性　用反证法. 设 $(g(\lambda),m(\lambda))=d(\lambda)\neq 1$ 那么 $g(\lambda)=d(\lambda)g_1(\lambda)$，$m(\lambda)=d(\lambda)m_1(\lambda)$. 于是

$$g(\lambda)m_1(\lambda)=g_1(\lambda)m(\lambda).$$

故 $g(A)m_1(A)=0$. 因为 $g(A)$ 可逆，所以 $m_1(A)=0$，而 $\partial m_1(\lambda)<\partial m(\lambda)$，这与 $m(\lambda)$ 是 A 的最小多项式假设矛盾.

987. 设

$$A=\begin{bmatrix}A_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m\end{bmatrix}$$

为准对角矩阵，$f(\lambda)\in P[\lambda]$，则

$$f(A)=\begin{bmatrix}f(A_1) & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(A_m)\end{bmatrix}.$$

988. 设 n 阶矩阵 A 的全部特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，而 $g(\lambda)$ 是任意一个复系数多项式，那么

1) $g(A)$ 的 n 个特征值为 $g(\lambda_1),\cdots,g(\lambda_n)$；

2) $g(A)$ 可逆 $\Longleftrightarrow g(\lambda_1)g(\lambda_2)\cdots g(\lambda_n)\neq 0$.

证 1) 因为存在可逆阵 T，使

$$T^{-1}AT=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{bmatrix},$$

$$\therefore \quad T^{-1}g(A)T=\begin{bmatrix}g(\lambda_1) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & g(\lambda_n)\end{bmatrix},$$

即 $g(A)$ 有特征值 $g(\lambda_1),\cdots,g(\lambda_n)$.

2) 由 $|g(A)|=g(\lambda_1)g(\lambda_2)\cdots g(\lambda_n)$ 即知．

989. 设 $g(\lambda)=\lambda^2-\lambda+1$，$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$.

1) 求 $g(A)$；　2) 求 $(g(A))^{-1}$.

解 1) $g(A)=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}^2-\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 2\\ 2 & 5\end{bmatrix}$.

2) $(g(A))^{-1}=\begin{bmatrix}5 & 2\\ 2 & 5\end{bmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{21}\begin{bmatrix}5 & -2\\ -2 & 5\end{bmatrix}$.

990. 设 $A'=A$，对任意多项式 $g(\lambda)$，那么 $g(A)$ 也是对称矩阵．

证 设 $g(\lambda)=a_m\lambda^m+\cdots+a_1\lambda+a_0$，则

$$(g(A))'=(a_mA^m+\cdots+a_1A+a_0E)'$$
$$=(a_mA^m)'+\cdots+(a_1A)'+(a_0E)'=g(A).$$

991. 设

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & & A_{mm} \end{bmatrix},$$

其中 A_{ii} 为 $n_i\times n_i$ 矩阵，$g(\lambda)$ 为任意多项式，则

$$|g(A)|=\prod_{i=1}^{m}|g(A_{ii})|.$$

证 容易算得

$$A^k=\begin{bmatrix} A_{11}^k & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{mm}^k \end{bmatrix}$$

设 $g(\lambda)=a_s\lambda^s+\cdots+a_1\lambda+a_0$，那么

$$g(A)=\begin{bmatrix} g(A_{11}) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & g(A_{mm}) \end{bmatrix}.$$

两边取行列式即得结论．

992. 设 $A=T^{-1}BT$，$g(\lambda)$ 为任意多项式，则

$$g(A)=T^{-1}g(B)T.$$

证 由假设可证 $A^k=T^{-1}B^kT$ $(k=1,2,\cdots)$．再设

$$g(\lambda)=a_m\lambda^m+\cdots+a_1\lambda+a_0,$$

于是 $g(A)=a_m(T^{-1}B^mT)+\cdots+a_1(T^{-1}BT)+a_0(T^{-1}ET)$

$$=T^{-1}(a_mB^m+\cdots+a_1B+a_0E)T=T^{-1}g(B)T.$$

注 此即：若 $A\sim B$，则对任意多项式 $g(x)$，有 $g(A)\sim g(B)$.

993. 已知 3 阶矩阵 A 的特征值是 $-2,1,-1$. 设 $B=2A^3-3A^2$，求 B 的特征值，并计算行列式 $|B|$ 及 $|3E-2A|$.

解 设 B 的三个特征值是 λ_1,λ_2 和 λ_3，则由第 **988** 条知

$$\lambda_1=2\cdot(-2)^3-3\cdot(-2)^2=-28,$$

$$\lambda_2=2\times1^3-3\times1^2=-1,$$

$$\lambda_3=2\cdot(-1)^3-3\cdot(-1)^2=-5.$$

故 $|B|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=(-28)\cdot(-1)\cdot(-5)=-140.$

$$|A|=(-2)\cdot1\cdot(-1)=2,$$

$$-140=|B|=|A|^2\cdot|2A-3E|=4|2A-3E|=-4|3E-2A|,$$

所以 $|3E-2A|=35$.

994. 设 α 是数域 P 上 n 阶矩阵 A 属于特征值 λ_0 的特征向量，$\forall\ g(\lambda)\in P[\lambda]$，则 α 是 $g(A)$ 属于特征值 $g(\lambda_0)$ 的特征向量.

证 由第 **988** 条知 $g(\lambda_0)$ 是 $g(A)$ 的特征值. 由假设可以知道 $A\alpha=\lambda_0\alpha$. 于是 $A^k\alpha=\lambda_0^k\alpha,k=1,2,\cdots$

设 $g(\lambda)=b_m\lambda^m+\cdots+b_1\lambda+b_0$，则

$$g(A)\alpha=(b_mA^m+\cdots+b_1A+b_0E)\alpha=b_mA^m\alpha+\cdots+b_1A\alpha+b_0\alpha$$

$$=(b_m\lambda_0^m+\cdots+b_1\lambda_0+b_0)\alpha=g(\lambda_0)\alpha.$$

995. 设 $A=\begin{bmatrix}0 & B\\ B & 0\end{bmatrix}$，其中 $B=\begin{bmatrix}a & b\\ b & a\end{bmatrix}$，$a,b$ 都是非零实数，$|a|\neq|b|$.

1) 求 A 的特征值与相应的长度为 1 的特征向量；

2) 令 $\varepsilon=(1,0,0,0)$，求 $\varepsilon A^n\varepsilon'$，其中 n 是自然数.

解 1) $|\lambda E-A|=[(\lambda-a)^2-b^2]\cdot[(\lambda+a)^2-b^2]$. 于是 A 的特征值为 $\lambda_1=a+b,\lambda_2=a-b,\lambda_3=-a+b,\lambda_4=-a-b$. 它们相应的长度为 1 的特征向量分别为

$$\alpha'_1=\frac{k}{2}(1,1,1,1),\alpha'_2=\frac{k}{2}(1,-1,1,1),$$

$$\alpha'_3=\frac{k}{2}(1,-1,-1,1),\alpha'_4=\frac{k}{2}(1,1,-1,-1),$$

这里$|k|=1$.

2) 令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$,则

$$P^{-1}AP=\mathrm{diag}(a+b,a-b,-a+b,-a-b),$$

$$P^{-1}A^nP=\mathrm{diag}((a+b)^n,(a-b)^n,(-a+b)^n,(-a-b)^n),$$

$$A^n=P\mathrm{diag}((a+b)^n,(a-b)^n,(-a+b)^n,(-a-b)^n)P^{-1}.$$

所以

$$\varepsilon A^n\varepsilon'=\frac{1}{4}[(a+b)^n+(a-b)^n+(-a+b)^n+(-a-b)^n].$$

996. 设 $A=\begin{bmatrix}1-a & a\\ b & 1-b\end{bmatrix}$,其中 $a,b\in(0,1)$,令 $B_m=A^m$,求 $\lim\limits_{m\to+\infty}B_m$.

解 $|\lambda E-A|=(\lambda-1)(\lambda-1+a+b)$,于是 A 的特征值为

$$\lambda_1=1,\lambda_2=1-a-b.$$

$\beta_1'=(1,1)$是 λ_1 的一个特征向量,$\beta_2'=(a,-b)$是 λ_2 的一个特征向量.

由 $A\beta_1=\beta_1,A\beta_2=(1-a-b)\beta_2$ 可得

$$A^m\beta_1=\beta_1,A^m\beta_2=(1-a-b)^m\beta_2,$$

$$A^m(\beta_1,\beta_2)=\begin{bmatrix}1 & (1-a-b)^ma\\ 1 & -(1-a-b)^mb\end{bmatrix}.$$

所以

$$B_m=A^m=\begin{bmatrix}1 & (1-a-b)^ma\\ 1 & -(1-a-b)^mb\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & a\\ 1 & -b\end{bmatrix}^{-1}.$$

因为$-1<1-a-b<1$,所以

$$\lim_{m\to+\infty}B_m=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & a\\ 1 & -b\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{a+b}\begin{bmatrix}b & a\\ b & a\end{bmatrix}.$$

997. 对于任何方阵 A,矩阵 $A+\varepsilon E$ 与矩阵 $rA+E$,($\varepsilon, r\in P$)除对有限个 ε, r 值外,均为非奇异矩阵.且存在常数 $\mu>0$,使对一切满足 $0<\varepsilon<\mu$ 的 ε,$A+\varepsilon E$ 均非奇异;同样,对一切充分大的 r,$rA+E$ 均为非奇异.

证 因 $A+\varepsilon E$ 奇异 $\Longleftrightarrow |A+\varepsilon E|=|\varepsilon E-(-A)|=0 \Longleftrightarrow \varepsilon$ 为方阵$(-A)$的一个特征值.而 n 阶方阵$(-A)$最多有 n 个不同的特征值,因此,除 ε 取$(-A)$的特征值外,$A+\varepsilon E$ 均为非奇异矩阵.设 μ 是$(-A)$的非零特征值中绝对值最小者,则对一切满足 $0<\varepsilon<\mu$ 的 ε,$A+\varepsilon E$ 均非奇异.再者,由于 $rA+E=r(A+\frac{1}{r}E)$,只需令 $\varepsilon=\frac{1}{r}$,即得关于矩阵 $rA+E$ 为非奇异的结论.

998. 设 A,B 为 n 阶矩阵,$|\lambda E-B|=f(\lambda)$,则 $f(A)$可逆 $\Longleftrightarrow A$ 与 B 无公共特征值.

证 令 $g(\lambda)$,$m(\lambda)$分别为 A 的特征多项式与 A 的最小多项式,那么由第 **986** 条与第 **988** 条

B 的任一特征值都不是 A 的特征值 $\Longleftrightarrow (f(\lambda),g(\lambda))=1 \Longleftrightarrow (f(\lambda),m(\lambda))=1 \Longleftrightarrow f(A)$可逆.

注 ① $f(A)$不可逆 $\Longleftrightarrow A,B$ 有公共特征值.

② A,B 不一定都是 n 阶方阵(即 A 为 $n\times n$ 矩阵,B 为 $m\times m$ 矩阵)上述结论仍然成立.

999. 设 A 是 n 阶矩阵,$\psi(\lambda)$是 A 的零化多项式,即 $\psi(A)=0$,则 A 的特征值均是 $\psi(\lambda)$的根.

证 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的全部特征值,则 $\psi(\lambda_1),\psi(\lambda_2),\cdots,\psi(\lambda_n)$是 $\psi(A)$的全部特征值.由 $\psi(A)=0$ 知,$\psi(A)$的特征值全是 0,所以 $\psi(\lambda_i)=0\ (i=1,2,\cdots,n)$.

注 分别取 $\psi(\lambda)=\lambda^m$、λ^m-1(m 为正整数)、$\lambda^2-\lambda$ 可得以下结果:

① 当 $A^m=0$ 时,A 的特征值全为 0.

② 当 $A^m=E$ 时，A 的特征值均是单位根．

③ 当 $A^2=A$ 时，A 的特征值等于 0 或 1.

1000. 设 A,B 是 n 阶矩阵，$A^m=E$，如果 B 满足

$$A^{m-1}B^{m-1}+A^{m-2}B^{m-2}+\cdots+AB+E=0, \tag{1}$$

则 B 的特征值都是 m 次单位根．

证 在(1)式两端左乘 A、右乘 B，再注意 $A^m=E$，有

$$B^m+A^{m-1}B^{m-1}+\cdots+A^2B^2+AB=0. \tag{2}$$

(2)－(1)得 $B^m=E$. 由第 **999** 条知 B 的特征值都是 m 次单位根．

1001. 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $n\times n$ 矩阵 A 的特征值，与其相应的特征向量分别是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，且 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关. 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是任意两个多项式，求 $2n\times 2n$ 矩阵

$$B=\begin{bmatrix} f(A) & g(A) \\ g(A) & f(A) \end{bmatrix}$$

的全部特征值及相应的特征向量．

解 当 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的特征值时，那么 $f(\lambda_1),f(\lambda_2),\cdots,f(\lambda_n),g(\lambda_1),\cdots,g(\lambda_n)$ 分别是 $f(A)$ 和 $g(A)$ 的特征值．$f(\lambda_i)+g(\lambda_i)(1\leqslant i\leqslant n)$，$f(\lambda_i)-g(\lambda_i)(1\leqslant i\leqslant n)$ 分别是 $f(A)+g(A)$，$f(A)-g(A)$ 的特征值．

令 $P=\begin{bmatrix} E_n & E_n \\ -E_n & E_n \end{bmatrix}$，其中 E_n 为 n 阶单位矩阵，则

$$P^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}E_n & -\frac{1}{2}E_n \\ \frac{1}{2}E_n & \frac{1}{2}E_n \end{bmatrix}.$$

于是 $B=P\begin{bmatrix} f(A)-g(A) & 0 \\ 0 & f(A)+g(A) \end{bmatrix}P^{-1}$，

显然

$$\begin{bmatrix} f(A)-g(A) & 0 \\ 0 & f(A)+g(A) \end{bmatrix}$$

的 $2n$ 个特征值为 $f(\lambda_i)\pm g(\lambda_i)(1\leqslant i\leqslant n)$. 而相似矩阵的特征值

相同，故 B 的 $2n$ 个特征值亦为 $f(\lambda_i)\pm g(\lambda_i)(1\leqslant i\leqslant n)$.

易验证 $\zeta_i=\begin{bmatrix}\alpha_i\\ \alpha_i\end{bmatrix},\eta_i=\begin{bmatrix}\alpha_i\\ -\alpha_i\end{bmatrix}$ 是 B 的分别属于特征值 $f(\lambda_i)+g(\lambda_i)$ 与 $f(\lambda_i)-g(\lambda_i)$ 的一个特征向量.

注 如果取 $f(A)=0_n(0_n$ 表示 $n\times n$ 零矩阵)，$g(A)=A$，那么 $2n\times 2n$ 矩阵 $A_0=\begin{bmatrix}0_n & A\\ A & 0_n\end{bmatrix}$ 的 $2n$ 个特征值为 $\pm\lambda_i(1\leqslant i\leqslant n)$. 而 $\begin{bmatrix}\alpha_i\\ \alpha_i\end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix}\alpha_i\\ -\alpha_i\end{bmatrix}$ 是 A_0 的分别属于 λ_i 与 $-\lambda_i$ 的一个特征向量.

四、 哈密尔顿—凯莱定理

1002. 什么叫做哈密尔顿—凯莱 (Hamilton-Cayley)定理?

答 设 A 是数域 P 上一个 n 阶矩阵，$f(\lambda)=|\lambda E-A|$ 是 A 的特征多项式，则 $f(A)=0$. 这个定理叫做哈密尔顿—凯莱定理.

1003. 设 n 阶矩阵 A 可逆，则 A^{-1} 和 A^* 都可表为 A 的多项式.

证 设 A 的特征多项式为

$$f(\lambda)=|\lambda E-A|=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n,$$

则由 A 可逆知常数项 $a_n=(-1)^n|A|\neq 0$. 由哈密尔顿-凯莱定理有

$$A^n+a_1A^{n-1}+\cdots+a_{n-1}A+a_nE=0.$$

所以

$$-\frac{1}{a_n}(A^{n-1}+a_1A^{n-2}+\cdots+a_{n-1}E)\cdot A=E,$$

故

$$A^{-1}=-\frac{1}{a_n}(A^{n-1}+a_1A^{n-2}+\cdots+a_{n-1}E),$$

$$A^*=|A|A^{-1}=(-1)^{n+1}(A^{n-1}+a_1A^{n-2}+\cdots+a_{n-1}E).$$

1004. 设 $n+1$ 阶矩阵 A 的特征值是 0 和 n 个全部 n 次单位根 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$，则矩阵 $2E-A$ 可逆，并求其逆.

证 由题设知 2 不是 A 的特征值，从而 $|2E-A|\neq 0$，即矩阵 $2E-A$ 可逆.

再由 A 的特征值是 0 和 n 个 n 次单位根，知 A 的特征多项式为 $f_A(\lambda)=|\lambda E-A|=\lambda(\lambda^n-1)$，由哈密尔顿－凯莱定理得 $A(A^n-E)=0$，即 $A^{n+1}=A$.

因

$$(2E)^{n+1}-A^{n+1}=(2E-A)[(2E)^n+(2E)^{n-1}A+\cdots+A^n],$$

等式两端同加上 $A-2E$，得

$$(2E)^{n+1}-A^{n+1}+A-2E=(2E-A)[(2E)^n+(2E)^{n-1}A+\cdots+A^n-E],$$

或

$$2^{n+1}E-2E=(2E-A)(2^nE-E+2^{n-1}A+2^{n-2}A^2+\cdots+2A^{n-1}+A^n),$$

所以

$$(2E-A)\cdot\frac{1}{2(2^n-1)}((2^n-1)E+2^{n-1}A+2^{n-2}A^2+\cdots+2A^{n-1}+A^n)=E,$$

从而

$$(2E-A)^{-1}=\frac{1}{2(2^n-1)}[(2^n-1)E+2^{n-1}A+2^{n-2}A^2+\cdots+2A^{n-1}+A^n].$$

1005. 设 A 是一个 n 阶非幂零矩阵，k 是大于等于 n 的任一整数，则 A^k 可写成次数不大于 $n-1$ 的 A 的多项式.

证 设 $f(\lambda)=|\lambda E-A|$，由带余除法得

$$\lambda^k=f(\lambda)q(\lambda)+r(\lambda),$$

这里 $r(\lambda)=0$ 或 $r(\lambda)$ 是次数小于 n 的多项式. 由哈密尔顿－

凯莱定理知 $A^k=r(A)$ 是 A 的次数不大于 $n-1$ 的多项式.

1006. 如果 3 阶矩阵 A 有特征值 $1,-1,2$,求 A^{2k}.

解 $f(\lambda)=|\lambda E-A|=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2)$,

设 $r(\lambda)=a\lambda^2+b\lambda+c$ 满足

$$\lambda^{2k}=f(\lambda)q(\lambda)+r(\lambda), \tag{1}$$

则分别将 $\lambda=1,-1,2$ 代入(1)式,得

$$a=\frac{1}{3}(2^{2k}-1),\ b=0,\ c=\frac{4-2^{2k}}{3}.$$

所以

$$r(\lambda)=\frac{1}{3}[(2^{2k}-1)\lambda^2-(2^{2k}-4)],$$

故

$$A^{2k}=r(A)=\frac{1}{3}[(2^{2k}-1)A^2-(2^{2k}-4)E].$$

1007. 1) 设 $A=\begin{pmatrix}7&4\\-9&-5\end{pmatrix}$,求 A^n;

2) 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$,求 A^{1000};

3) 设 $f(x)=x^4-x+1$,求 $f(A)$的全部特征值.

解 1) 因为 $f(\lambda)=|\lambda E-A|=(\lambda-1)^2$,

所以　$0=f(A)=(A-E)^2$,$A^2=2A-E$. 然后用数学归纳法,可证

$$A^n=nA-(n-1)E,(n\geqslant 1).$$

所以

$$A^n=\begin{pmatrix}7n&4n\\-9n&-5n\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}n-1&0\\0&n-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6n+1&4n\\-9n&-6n+1\end{pmatrix}.$$

2) 在第 **84** 条中,已经证明:$A^n=A^{n-2}+A^2-E$,$(n\geqslant 3)$.

当 $n=1000$ 时,

$$
\begin{aligned}
A^{1000} &= A^{998}+A^2-E=A^{996}+2(A^2-E)\\
&=\cdots=A^2+499(A^2-E)=500A^2-499E\\
&=500\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}-499\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}1&0&0\\500&1&0\\500&0&1\end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

3) $|\lambda E-A|=(\lambda-1)^2(\lambda+1)$，所有 A 的特征值为 1，1，−1、将它们代入 $f(x)$，算出 $f(A)$的三个特征值为 1，1，3.

1008. 设

$$
A=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&-1&1\\0&1&0\end{bmatrix},
$$

求 $2A^8-3A^5+4A^4+A^2-4E$.

解 $f(\lambda)=|\lambda E-A|=\lambda^3-2\lambda+1$. 令

$$
\psi(\lambda)=2\lambda^8-3\lambda^5+4\lambda^4+\lambda^2-4,
$$

则由带余除法得

$$
\psi(\lambda)=f(\lambda)q(\lambda)+r(\lambda),
$$

其中 $r(\lambda)=24\lambda^2-37\lambda+10$. 由哈密尔顿-凯莱定理得

$$
\begin{aligned}
2A^8-3A^5+4A^4+A^2-4E &=\psi(A)=r(A)=24A^2-37A+10E\\
&=\begin{bmatrix}-3&48&-26\\0&95&-61\\0&-61&34\end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

1009. 设 A 为 n 阶矩阵，则

1) 当 $A^2=E$ 且 A 的特征值都等于 1 时，$A=E$.

2) 当 A 的特征值都等于零时，必存在某些自然数 k，使

$A^k=0$.

3）当 $n=2$，且有矩阵 B 使 $AB-BA=A$，则 $A^2=0$.

证　1）因 A 的特征值都等于 1，由于零化多项式无重根，因此 A 相似于对角矩阵，即存在可逆矩阵 T，使

$$A=T^{-1}\begin{bmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{bmatrix}T=E.$$

2）因为 A 的特征值全是 0，所以 $f(\lambda)=|\lambda E-A|=\lambda^n$. 从而

$$0=f(A)=A^n.$$

3）设 A 的特征多项式为 $f(\lambda)=|\lambda E-A|=\lambda^2-c_1\lambda+c_2$，其中 $c_1=\mathrm{tr}(A)=0$，$c_2=|A|$. 由 $A=AB-BA$ 知 $\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(AB-BA)=0$，即 $c_1=0$. 下证 $|A|=0$. 否则，由 $|A|\neq0$，知 A 可逆. 再由 $A=AB-BA$ 得 $E=B-A^{-1}BA$. 但 $\mathrm{tr}(B)=\mathrm{tr}(A^{-1}BA)$，故 $\mathrm{tr}(E)=tr(B-A^{-1}BA)=0$，矛盾. 于是 $f(\lambda)=\lambda^2$. 从而 $A^2=0$.

1010.　设 A,B 是 n 阶矩阵，$C=AB-BA$，则

1）当 C 与 A,B 可交换时，C 的特征值全为 0.

2）当 A,B 都是实对称矩阵时，C 的特征值的实部为 0.

证　1）首先由数学归纳法可知，对一切自然数 k，有

$$AB^k-B^kA=kB^{k-1}C. \tag{1}$$

事实上，当 $k=1$ 时，(1) 显然成立. 假定对 $k=m$ 时 (1) 成立，即 $AB^m-B^mA=mB^{m-1}C$，那么两边左乘 B 得

$$BAB^m-B^{m+1}A=mB^mC,$$

$$(AB-C)B^m-B^{m+1}A=mB^mC,$$

$$AB^{m+1}-B^{m+1}A=(m+1)B^mC.$$

即当 $k=m+1$ 时，(1) 也成立. 归纳法完成.

再设 B 的特征多项式为 $f(\lambda)=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0$，则 $f(B)=0$，由 (1) 式知

$$f'(B)C=Af(B)-f(B)A=0.$$

从而

$$\begin{aligned}0&=A[f'(B)C]-[f'(B)C]A,\\&=n(AB^{n-1}-B^{n-1}A)C+a_{n-1}(n-1)(AB^{n-2}-B^{n-2}A)C+\cdots\\&\quad+a_2 2(AB-BA)C\\&=n(n-1)B^{n-2}C^2+a_{n-1}(n-1)(n-2)B^{n-3}C^2+\cdots+2a_2C^2\\&=f''(B)C^2.\end{aligned}$$

由此继续下去可得 $f^{(n)}(B)C^n=0$. 但 $f^{(n)}(\lambda)=n!$,所以 $f^{(n)}(B)=n!E$. 这样 $0=f^{(n)}(B)C^n=n!\ C^n$. 故 $C^n=0$. 由第 **999** 条知 C 的特征值全为 0.

2) 因为 $C'=(AB-BA)'=(AB)'-(BA)'=B'A'-A'B'=BA-AB=-C$,所以 C 是实反对称矩阵,从而 C 的特征值为 0 或纯虚数,即实部为 0.

1011. 设 A 和 B 分别是 m 阶和 n 阶矩阵,若 A 与 B 无公共的特征值,则满足等式

$$AX=XB,\text{其中 } X\in P^{m\times n}$$

的矩阵 X 只能是零矩阵.

证 设 A 的特征多项式是 $f(\lambda)$,因 A 与 B 无公共的特征值,所以由第 **998** 条知 $f(B)$是可逆矩阵. 由 $AX=XB$ 得 $A^kX=XB^k$,进而 $f(A)X=Xf(B)$. 由哈密尔顿-凯莱定理知 $f(A)=0$,故$Xf(B)=0$. 而 $f(B)$非奇异,上式两端右乘 $f(B)^{-1}$,即得$X=0$.

1012. 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 n 阶实矩阵 A 的全部特征值,但$-\lambda_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$不是 A 的特征值,则线性空间 $R^{n\times n}$中如下的变换

$$\sigma(X)=A'X+XA,\forall\ X\in R^{n\times n}$$

是 $R^{n\times n}$中的可逆线性变换.

证 $\forall\ X,Y\in R^{n\times m},\forall\ a,b\in R$,

$\sigma(aX+bY)=A'(aX+bY)+(aX+bY)A=a(A'X+XA)+$

$b(A'Y+YA)=a\sigma(X)+b\sigma(Y)$，故 σ 是 $R^{n\times n}$ 的线性变换．

其次，$\forall\ X\in\sigma^{-1}(0)$，则 $\sigma(X)=A'X+XA=0$，所以 $-A'X=XA$. 由此利用数学归纳法可证得

$$(-A')^nX=XA^n.$$

进而对任意实多项式 $g(\lambda)$ 有 $g(-A')X=Xg(A)$. 特别地，对于 A 的特征多项式 $f(\lambda)$，亦有 $f(-A')X=Xf(A)=0$. 由于 A 的特征值是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，从而 A' 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，那么 $-A'$ 的特征值是 $-\lambda_1,-\lambda_2,\cdots,-\lambda_n$，而已知 $-\lambda_i$ 不是 A 的特征值，故 $f(-\lambda_i)\neq0$. $i=1,2,\cdots,n$. $|f(-A')|=f(-\lambda_1)f(-\lambda_2)\cdots f(-\lambda_n)\neq0$，即 $f(-A')$ 可逆．所以 $X=0$，从而 $\sigma^{-1}(0)=\{0\}$. 故 σ 是单射．但因 $R^{n\times n}$ 是有限维线性空间，故 σ 也是双射，即 σ 是 $R^{n\times n}$ 的可逆线性变换．

1013. 设 A 是 n 阶实矩阵，$\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是它的全部特征值，而 $-\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 都不是它的特征值．则对于任意的实对称矩阵 C，存在唯一的实对称矩阵 B，满足 $AB+BA=C$.

证 由第 **1012** 条知如下的变换 σ 是 $R^{n\times n}$ 中的可逆线性变换：$\sigma(X)=A'X+XA,\forall\ X\in R^{n\times n}$. 于是对于实对称矩阵 C，存在唯一的实矩阵 B 满足

$$\sigma(B)=A'B+BA=C.$$

由于 C 是实对称的，故

$$\sigma(B')=A'B'+B'A=(A'B+BA)'=C'=C=\sigma(B)$$

因 σ 是可逆变换，故 $B'=B$，即 B 为实对称的．

1014. 设 A 是一个 n 阶矩阵，λ_0 是 A 的特征多项式的单根，X_0 是 A 的属于 λ_0 的一个特征向量，则线性方程组 $(\lambda_0E-A)X=X_0$ 无解．

证 用反证法．设 $(\lambda_0E-A)X=X_0$ 有解 Y_0. 因 $X_0\neq0$，故 $Y_0\neq0$. 因而 $AY_0=\lambda_0Y_0-X_0$，故

$$A^2Y_0=A(\lambda_0Y_0-X_0)=\lambda_0^2Y_0-2\lambda_0X_0.$$

用归纳法可证得对任意自然数 m，有

$$A^mY_0=\lambda_0^mY_0-m\lambda_0^{m-1}X_0.$$

设 A 的特征多项式 $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，则由 $f(A)=0$ 得

$$\begin{aligned}0&=f(A)Y_0=(A^n+a_{n-1}A^{n-1}+\cdots+a_1A+a_0E)Y_0\\&=(\lambda_0^n+a_{n-1}\lambda_0^{n-1}+\cdots+a_1\lambda_0+a_0)Y_0\\&\quad-(n\lambda_0^{n-1}+(n-1)a_{n-1}\lambda_0^{n-2}+\cdots+2a_2\lambda_0+a_1)X_0\\&=f(\lambda_0)Y_0-f'(\lambda_0)X_0.\end{aligned}$$

再由 $f(\lambda_0)=0$ 得 $f'(\lambda_0)X_0=0$. 但题设 λ_0 是特征多项式 $f(x)$的单根，故 $f'(\lambda_0)\neq0$. 于是 $X_0=0$，矛盾.

1015. 设

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\a&\omega&0\\b&c&\omega^2\end{bmatrix},$$

其中 $\omega=\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}$，求 A^{-2}与 A^n.

解 $|\lambda E-A|=\lambda^3-1$. 由哈密尔顿-凯莱定理得 $A^3=E$，所以 $A^{-2}=A$.

$$A^n=\begin{cases}E,当\ n=3m\ 时;\\A,当\ n=3m+1\ 时;\\A^2,当\ n=3m+2\ 时.\end{cases}$$

1016. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$,

$$g(\lambda)=\frac{1}{2}(|\lambda E+A|-|\lambda E-A|),\tag{1}$$

$$B=\begin{bmatrix}A+a_{11}E&a_{12}E&\cdots&a_{1n}E\\a_{21}E&A+a_{22}E&\cdots&a_{2n}E\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}E&a_{n2}E&\cdots&A+a_{nn}E\end{bmatrix},\tag{2}$$

若 $g(A)$ 可逆，则 B 可逆．

证　令 $f_1(\lambda)=|\lambda E+A|$，　$f_2(\lambda)=|\lambda E-A|$，　则由(1)式知

$$2g(\lambda)=f_1(\lambda)-f_2(\lambda),2g(A)=f_1(A)-f_2(A)=f_1(A).$$

因为 $g(A)$ 可逆，所以 $f_1(A)$ 可逆．

设 $|\lambda E+A|$ 中元素 $\lambda\delta_{ij}+a_{ij}$ 的代数余子式为 $c_{ij}(\lambda)$，则

$$\sum_{i=1}^{n}(\lambda\delta_{ij}+a_{ij})c_{ik}(\lambda)=\delta_{jk}f_1(\lambda),\quad j、k=1,2,\cdots,n. \tag{3}$$

将 A 代入(3)式，有

$$\sum_{i=1}^{n}(A\delta_{ij}+a_{ij}E)c_{ik}(A)=\delta_{jk}f_1(A),\quad j、k=1,2,\cdots,n. \tag{4}$$

从而

$$\begin{bmatrix} c_{11}(A) & c_{21}(A) & \cdots & c_{n1}(A) \\ c_{12}(A) & c_{22}(A) & \cdots & c_{n2}(A) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{1n}(A) & c_{2n}(A) & \cdots & c_{nn}(A) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A+a_{11}E & a_{12}E & \cdots & a_{1n}E \\ a_{21}E & A+a_{22}E & \cdots & a_{2n}E \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}E & a_{n2}E & \cdots & A+a_{nn}E \end{bmatrix}$$

$$=\mathrm{diag}(f_1(A),\cdots,f_1(A)). \tag{5}$$

令 $C(A)=(c_{ij}(A))$，则由(5)式得 $|c(A)||B|=|f_1(A)|^n\neq 0$．故 B 可逆．

五、　特征子空间

1017.　什么叫做方阵 A 的特征子空间？什么叫做线性变换的特征子空间？

答　设 $A\in P^{n\times n}$．若 $\lambda_0\in P$ 为 A 的一个特征值，则子空间

$$W_{\lambda_0}=\{\alpha\in P^{n\times 1}\mid A\alpha=\lambda_0\alpha\}$$

称为方阵 A 的特征子空间．

设 V 是数域 P 上线性空间，σ 是 V 的线性变换，$\lambda_0\in P$ 为 σ 的一个特征值，那么子空间

$$V_{\lambda_0}=\{\beta\in V\mid\sigma\beta=\lambda_0\beta\}$$

称为线性变换 σ 的特征子空间.

注 取 V 的一组基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$, $\sigma(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)A$. W_{λ_0}为 A 的特征值 λ_0 的特征子空间,则 σ 的特征子空间 V_{λ_0}为

$$W_{\lambda_0}=\{\beta\mid\beta=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)\alpha,\alpha\in V_{\lambda_0}\}.$$

由此可知求 σ 的特征子空间,即转化为求方阵 A 的特征子空间.

1018. 设 V_{λ_0}是 n 阶方阵 A 的特征子空间(称 $\dim V_{\lambda_0}$为 λ_0 的几何重数). 则

1) $\dim V_{\lambda_0}=n-$秩(λ_0E-A);

2) $\dim V_{\lambda_0}$等于 A 的若当形中主对角元为 λ_0 的若当块的个数;

3) $\dim V_{\lambda_0}$等于 A 的初等因子中含$(\lambda-\lambda_0)$的方幂的个数.

证 1) 由定义知 V_{λ_0}为$(\lambda_0E-A)X=0$ 的解空间,所以

$$\dim V_{\lambda_0}=n-\text{秩}(\lambda_0E-A).$$

2) 设 A 的若当标准形为

$$J=\begin{bmatrix}J_0^{(1)} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & J_0^{(k)} & & & \\ & & & J_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & J_s\end{bmatrix},$$

其中 $J_0^{(i)}=\begin{bmatrix}\lambda_0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_0\end{bmatrix}_{n_i\times n_i}$, $i=1,2,\cdots,k$; $J_1,\cdots,J_s$ 的主对角元为 λ_j,且 $\lambda_j\neq\lambda_0$, $j=1,2,\cdots,s$;则 $A=T^{-1}JT$.

$$(\lambda_0E-A)=T^{-1}(\lambda_0E-J)T,$$

所以秩$(\lambda_0E-A)=$秩(λ_0E-J). 而

$$(\lambda_0E-J)=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -1\\ & & & 0\end{pmatrix} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \begin{pmatrix}0 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -1\\ & & & 0\end{pmatrix} & & \\ & & & \begin{pmatrix}\lambda_0-\lambda_1 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -1\\ & & & \lambda_0-\lambda_1\end{pmatrix} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \begin{pmatrix}\lambda_0-\lambda_s & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -1\\ & & & \lambda_0-\lambda_s\end{pmatrix}\end{pmatrix},$$

所以　$\dim V_{\lambda_0}=n-$秩$(\lambda_0E-A)=n-$秩$(\lambda_0E-J)=k$.

3) 由于若当块的个数与初等因子个数一致,因此即得结论.

1019.　设 σ 是 3 维线性空间 V 上的一个线性变换,它在一组基下的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 0\\ 2 & 2 & -1\end{pmatrix}$,求 σ 的所有特征子空间.

解　设 V 的这组基为 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$,由假设知

$$\sigma(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)A.$$

因为 $|\lambda E-A|=(\lambda-2)^2(\lambda+1)$,故 A 的三个特征值(也是 σ 的三个特征值)为 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=-1$.

当 $\lambda=2$ 时,解 $(2E-A)X=0$ 得出一个线性无关解为

$$\alpha'_1=(0,3,2).\ 令\ \beta_1=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix},$$

则 σ 关于特征值 2 的特征子空间 $V_2=L(\beta_1)$.

当 $\lambda=-1$ 时,解 $(-E-A)X=0$ 得出一个线性无关的解为

$$\alpha'_2=(0,0,1).\ 令\ \beta_2=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$

则 σ 关于特征值 $\lambda=-1$ 的特征子空间 $V_{-1}=L(\beta_2)$.

1020.　设 V 是数域 P 上 n 维列线性空间,A 是 n 阶方阵.

若对 P 中的数 λ_0，存在 V 中向量 $\zeta\neq 0$ 及自然数 m 使得 $(A-\lambda_0 E)^m\zeta=0$，则称 ζ 是属于 λ_0 的根向量．又若 $(A-\lambda_0 E)^m\zeta=0$，但 $(A-\lambda_0 E)^{m-1}\zeta\neq 0$，则称 ζ 是属于 λ_0 的 m 次根向量．

1) 若属于 λ_0 的根向量存在，则 λ_0 是 A 的一个特征值．

2) 若 λ_0 是 A 的一个特征值，则属于 λ_0 的根向量存在，并且属于 λ_0 的所有根向量添上零向量构成 V 的一个子空间．

3) 属于不同特征值的根向量是线性无关的．

证　1) 设 α 是属于 λ_0 的 m 次根向量，即 $0\neq(A-\lambda_0 E)^{m-1}\alpha$，但 $0=(A-\lambda_0 E)^m\alpha=(A-\lambda_0 E)[(A-\lambda_0 E)^{m-1}\alpha]$．

令 $\beta=(A-\lambda_0 E)^{m-1}\alpha\neq 0$，则 $A\beta=\lambda_0\beta$．λ_0 是 A 的特征值．

2) 设 α 是 A 的属于特征值 λ_0 的一个特征向量，则 $A\alpha=\lambda_0\alpha$，即 $(A-\lambda_0 E)\alpha=0$．可见 α 是 A 的属于 λ_0 的根向量．

令 S_{λ_0} 表示属于 λ_0 的所有根向量添上零向量构成的集合．α,β 是 S_{λ_0} 中次数分别为 m_1,m_2 的根向量．任取 $k_1,k_2\in P$，令 $m=\max\{m_1,m_2\}$，则

$$(A-\lambda_0 E)^m(k_1\alpha+k_2\beta)=k_1(A-\lambda_0 E)^m\alpha+k_2(A-\lambda_0 E)^m\beta=0.$$

所以 $k_1\alpha+k_2\beta\in S_{\lambda_0}$．可见 S_{λ_0} 是 V 的一个子空间．

3) 设 α_i 是 A 的属于 λ_i 的 m_i 次根向量 $(i=1,2,\cdots,s)$，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 互不相同，令

$$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}\cdot(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{m_s},$$

$$f_i(\lambda)=\frac{f(\lambda)}{(\lambda-\lambda_i)^{m_i}},i=1,2,\cdots,s,$$

则 $f_i(\lambda)$ 与 $(\lambda-\lambda_i)^{m_i}$ 互素．故有多项式 $u(\lambda),v(\lambda)$，使

$$u(\lambda)f_i(\lambda)+v(\lambda)(\lambda-\lambda_i)^{m_i}=1.$$

从而

$$u(A)f_i(A)+v(A)(A-\lambda_i E)^{m_i}=E.$$

于是

$$\begin{aligned}\alpha_i&=u(A)f_i(A)\alpha_i+v(A)(A-\lambda_i E)^{m_i}\alpha_i\\&=u(A)f_i(A)\alpha_i.\end{aligned}$$

因为 $\alpha_i\neq 0$，所以 $f_i(A)d_i\neq 0$．

令 $k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s=0$，用 $f_i(A)$ 左乘此式两端得 $k_i f_i(A)\alpha_i=$

0. 从而 $k_i=0, i=1,2,\cdots,s$. 因此 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关.

1021. 设 $B=P^{-1}AP$, λ 是 A,B 的某一特征值, V_λ 是 A 的属于 λ 的特征子空间, 求 B 的属于 λ 的特征子空间 $\tilde{V}_\lambda$.

解 $\tilde{V}_\lambda=\{P^{-1}\zeta \mid \zeta\in V_\lambda\}$. 事实上, 对任意 $\eta\in\tilde{V}_\lambda$, 有 $B\eta=\lambda\eta$, 从而 $(P^{-1}AP)\eta=\lambda\eta$, $A(P\eta)=\lambda(P\eta)$, 于是 $P\eta\in V_\lambda$, 令 $\zeta=P\eta\in V_\lambda$, 则

$$\eta=P^{-1}\zeta\in\{P^{-1}\zeta \mid \zeta\in V_\lambda\}, \text{即 } \tilde{V}_\lambda\subseteq\{P^{-1}\zeta \mid \zeta\in V_\lambda\}.$$

反之, 对任意 $P^{-1}\zeta\in\{P^{-1}\zeta \mid \zeta\in V_\lambda\}$,

$$B(P^{-1}\zeta)=(P^{-1}AP)(P^{-1}\zeta)=P^{-1}(A\zeta)=\lambda(P^{-1}\zeta).$$

此即 $P^{-1}\zeta\in\tilde{V}_\lambda$, $\{P^{-1}\zeta \mid \zeta\in V_\lambda\}\subseteq\tilde{V}_\lambda$.

1022. 设 A,B 为 n 阶矩阵, 那么

1) 当 $\lambda\neq 0$ 为 AB 和 BA 的特征值时, 则 $\dim V_\lambda=\dim W_\lambda$, 其中 W_λ,V_λ 分别表示 AB,BA 的属于 λ 的特征子空间.

2) 当 A 的 n 个特征值两两互异时, 则 $AB=BA$ 的充要条件是 A 的特征向量恒为 B 的特征向量.

证 1) $W_\lambda=\{\alpha\in C^n \mid AB\alpha=\lambda\alpha\}$,

$V_\lambda=\{\beta\in C^n \mid BA\beta=\lambda\beta\}$,

这里 C 为复数域, 设 $\dim W_\lambda=r$, $\dim V_\lambda=s$, 令 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 为 W_λ 的一个基, 于是 $AB\alpha_i=\lambda\alpha_i$, $1\leqslant i\leqslant r$, 从而 $BAB\alpha_i=\lambda_i B\alpha_i$, $1\leqslant i\leqslant r$. 可见 $B\alpha_i\in V_\lambda$, $1\leqslant i\leqslant r$.

下证 $B\alpha_1,B\alpha_2,\cdots,B\alpha_r$ 线性无关.

设 $k_1B\alpha_1+k_2B\alpha_2+\cdots+k_rB\alpha_r=0$, 则

$$A(k_1B\alpha_1+k_2B\alpha_2+\cdots+k_rB\alpha_r)=0.$$

于是

$$k_1\lambda\alpha_1+k_2\lambda\alpha_2+\cdots+k_r\lambda\alpha_r=0.$$

由于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关, 故 $k_i\lambda=0$, $1\leqslant i\leqslant r$. 而 $\lambda\neq 0$, 所以 $k_i=0$, $1\leqslant i\leqslant r$. 可见 $r\leqslant s=\dim V_\lambda$. 同理可证 $s\leqslant r$, 故 $r=s$.

2) 先证充分性. 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n$ 是 A 的 n 个互异特征值, $\zeta_1,\zeta_2,\cdots\zeta_n$ 是 A 的分别属于 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的一个特征向量, 则 $\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n$ 线性无关, 故 $P=(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n)$ 可逆, 且
$AP=P\cdot\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$. 由充分条件可令 $B\zeta_i=\mu_i\zeta_i$, $1\leqslant i\leqslant n$,

则
$$BP=P\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n).$$ 于是
$$\begin{aligned}BAP&=BP\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\\&=P\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\\&=P\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)\\&=AP\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)=ABP,\end{aligned}$$
因 P 可逆,故 $AB=BA$.

再证必要性. 设 $AB=BA$,令 V_{λ_i}是 A 的对应其特征值 λ_i 的特征子空间($1\leqslant i\leqslant n$). 由于 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 互不相同,故 V_{λ_i}是一维的. 于是可令 $V_{\lambda_i}=L(\zeta_i)$, $1\leqslant i\leqslant n$.

因为 $AB=BA$,所以 $AB\zeta_i=BA\zeta_i=\lambda_iB\zeta_i$,即 $B\zeta_i\in V_{\lambda_i}=L(\zeta_i)$. 故 $B\zeta_i=\mu_i\zeta_i$, $1\leqslant i\leqslant n$. 因此,A 的特征向量都是 B 的特征向量.

六、 圆盘定理

1023. 什么叫做盖氏圆?

答 设 $A=(a_{ij})$是 n 阶复方阵,则称
$$D_k(A)=\{z\,|\,|z-a_{kk}|\leqslant R_k, R_k=\sum_{j\neq k}|a_{kj}|\}$$
为 A 的第 k 个盖氏圆 (Gerschgorin), $k=1,2,\cdots,n$.

1024. 求矩阵
$$A=\begin{bmatrix}2+i & -i & 5\\ 3 & 0 & 1-i\\ -i & 4+i & 2\end{bmatrix}$$
的三个盖氏圆.

解 $D_1(A)=\{z\,|\,|z-(2+i)|\leqslant 6\}$;

$D_2(A)=\{z\,|\,|z|\leqslant 3+\sqrt{2}\}$;

$D_3(A)=\{z\,|\,|z-2|\leqslant 1+\sqrt{17}\}$.

1025. 设 $A=(a_{ij})$为 n 阶复矩阵,λ 是 A 的任一特征值,则 $\lambda\in\bigcup\limits_{k=1}^{n}D_k(A)$,其中 $D_k(A)$为 A 的第 k 个盖氏圆 ($k=1,2,\cdots,n$).

证 设 $\zeta'=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$为 A 的属于 λ 的一个特征向量,则 $A\zeta=\lambda\zeta$,从而

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\alpha_j=\lambda\alpha_j, k=1,2,\cdots,n.$$

所以

$$(\lambda-a_{kk})\alpha_k=\sum_{j\neq k}a_{kj}\alpha_j, k=1,2,\cdots,n. \tag{1}$$

设 $|\alpha_s|=\max\{|\alpha_1|,\cdots,|\alpha_n|\}$，则由(1)式

$$|\lambda-a_{ss}||\alpha_s|\leqslant\sum_{j\neq s}|a_{sj}||\alpha_j|,$$

$$|\lambda-a_{ss}|\leqslant\sum_{j\neq s}|a_{sj}|\cdot\frac{|\alpha_j|}{|\alpha_s|}\leqslant\sum_{j\neq s}|a_{sj}|=R_s. \tag{2}$$

由(2)知 $\lambda\in D_s(A)\subseteq\bigcup_{k=1}^{n}D_k(A')$.

注 设 $D_k(A')$为 A'的第 k 个盖氏圆($k=1,2,\cdots,n$). 令 $D_1=\bigcup_{k=1}^{n}D_k(A)$，$D_2=\bigcup_{k=1}^{n}D_k(A')$，而 λ 既是 A 的特征值，又是 A'的特征值，所以 $\lambda\in D_1\cap D_2$.

1026. 利用圆盘定理估计矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0.1 & 0.2\\ 0.4 & 3 & 0.1\\ -0.1 & 0.2 & -1\end{bmatrix}$$

的特征值的范围.

解 因为

$D_1(A)=\{z\,|\,|z-1|\leqslant 0.3\}$,

$D_2(A)=\{z\,|\,|z-3|\leqslant 0.5\}$, $D_3(A)=\{z\,|\,|z+1|\leqslant 0.3\}$,

所以 A 的 3 个特征值均在这三个圆内.

1027. 设 $A=(a_{ij})$为 n 阶复矩阵，如果 A 的 n 个盖氏圆中有 S 个连通域，其中有一个连通域由 m 个圆组成，那么在此连通域中恰有 m 个特征值.

证 令

$$A(t)=\begin{bmatrix}a_{11} & ta_{12} & \cdots & ta_{1n}\\ ta_{21} & a_{22} & \cdots & ta_{2n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ ta_{n1} & ta_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix},$$

则 $A(0)=\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}),A(1)=A$.

记此连通域为(Ⅰ),它的 m 个盖氏圆为 $D_{i_1}(A),\cdots,D_{i_m}(A)$,其中

$$D_k(A)=\{z\,|\,|z-a_{kk}|\leqslant R_k,R_k=\sum_{j\neq k}|a_{kj}|\}.$$

再规定:$A(t)$的 n 个特征值为 $\lambda_1(t),\cdots,\lambda_n(t)$. $A(0)$的 n 个特征值为 $\lambda_1(0),\cdots,\lambda_n(0)$. 显然 $\lambda_1(0),\cdots,\lambda_n(0)$是 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$的一个排列. 不失一般性,设

$$\lambda_1(0)=a_{11},\lambda_2(0)=a_{22},\cdots,\lambda_n(0)=a_{nn}.$$

$A(1)=A$ 的 n 个特征值记为 $\lambda_1(1),\cdots,\lambda_n(1)$,显然它们是 A 的 n 个特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$.

由于特征值是矩阵元素的连续函数,即 $A(t)$的每个特征值 $\lambda_i(t)$都是 t 的连续函数. 考虑 $\lambda_1(0)=a_{11}$,当 t 从 0 连续变到 1 时,$\lambda_1(t)$从 a_{11}连续变到 $\lambda_1(1)$. 一般地设

$$\lambda_i(0)=a_{ii},i=1,2,\cdots,n;$$
$$\lambda_i(1)=\lambda_i,i=1,2,\cdots,n;$$

那么,当 $t\in[0,1]$时,$\lambda_i(t)$是一条连续曲线,它的起点为$(0,a_{ii})$,终点为$(1,\lambda_i)$.

在连通域(Ⅰ)中,含有 $A(0)$的 m 个特征值

$$\lambda_{i_1}(0)=a_{i_1i_1},\cdots,\lambda_{i_m}(0)=a_{i_mi_m}\in(\text{Ⅰ}).$$

下证(Ⅰ)含有 A 的 m 个特征值:

$$\lambda_{i_1}(1)=\lambda_{i_1},\cdots,\lambda_{i_m}(1)=\lambda_{i_m}\in(\text{Ⅰ}).$$

用反证法. 不失一般性,设 $\lambda_{i_1}\overline{\in}(\text{Ⅰ})$,那么由第 **1025** 条,$\lambda_{i_1}$一定在另一个连通域(Ⅱ)内,而(Ⅰ)、(Ⅱ)之间不连通,即存在 $t_0\in(0,1)$,使得

$$\lambda_{i_1}(t_0)\overline{\in}\bigcup_{k=1}^{n}D_k(A). \tag{1}$$

由第 **1025** 条知　$\lambda_{i_1}(t_0)\in\bigcup_{k=1}^{n}D_k(A(t_0))$. 从而 $\lambda_{i_1}(t_0)\in D_j(A(t_0))$. 但 $D_j(A(t_0))\subseteq D_j(A)$,因为 $\forall\, z\in D_j(A(t_0))$,

$$|z-a_{jj}|\leqslant\sum_{i\neq j}|t_0a_{ji}|=t_0\sum_{j\neq i}|a_{ji}|=t_0R_j\leqslant R_j.$$

所以 $z\in D_j(A)$，故由上式

$$\lambda_{i_1}(t_0)\in\bigcup_{k=1}^{n}D_k(A(t_0))\subseteq\bigcup_{k=1}^{n}D_k(A). \tag{2}$$

由(1)、(2)两式即得出矛盾.

最后，证明(Ⅰ)中恰含 A 的 m 个特征值. 设 A 的 n 个盖氏圆分成 s 个连通域，记为(Ⅰ)、(Ⅱ)，…，(S). 在每个连通域中分别含有 $m_1(=m),m_2,\cdots,m_s$ 个盖氏圆. 再设每个连通域含 A 的特征值的个数分别为 $r_1,r_2,\cdots,r_s$. 但

$m_1+m_2+\cdots+m_s=n=r_1+r_2+\cdots+r_s$. 上面已证

$$r_1\geqslant m_1,r_2\geqslant m_2,\cdots,r_s\geqslant m_s.$$

进一步有 $r_i=m_i$. $(i=1,2,\cdots s)$. 否则，不失一般性，设 $r_1>m_1$，那么 $n=r_1+r_2+\cdots+r_s>m_1+m_2+\cdots+m_s=n$. 矛盾.

注 ① 当某一连通域只含一个盖氏圆时，此圆内有且仅有 A 的一个特征值.

② 当某一连通域含两个盖氏圆时，比如 $D_1(A)\cup D_2(A)$，它含有两个特征值，这两个特征值可能全在 $D_1(A)$内，也可能全在 $D_2(A)$内，也可能 $D_1(A)$，$D_2(A)$各含一个.

1028. 设 $A=(a_{ij})$是 n 阶复矩阵，$p_1,p_2,\cdots,p_n$ 是正实数，则对 A 的任一特征值 λ，有

$$\lambda\in\left[\bigcup_{i=1}^{n}\{z\,|\,|z-a_{ii}|\leqslant\frac{1}{p_i}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}p_j|a_{ij}|\}\right]\cap\left[\bigcup_{j=1}^{n}\{z\,|\,|z-a_{jj}|\leqslant p_j\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}\frac{1}{p_i}|a_{ij}|\}\right]$$

证 令 $D=\mathrm{diag}(p_1,p_2,\cdots,p_n)$，则 $D^{-1}AD$ 与 A 有相同的特征值. 将圆盘定理应用于 $D^{-1}AD$ 和它的转置矩阵，即可得到结论.

注 ① 适当选取系数 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 可为得到特征值的一个令人满意的估计提供很大的灵活性.

② 一般地，只要 S 是可逆矩阵，那么 $S^{-1}AS$ 与 A 就有相同的特征值，将圆盘定理应用于 $S^{-1}AS$ 得到的 A 的所有特征值都位于 $\bigcup_{i=1}^{n}D_i(S^{-1}AS)=G(S^{-1}AS)$中，适当选取 S，可使所得的界更准确.

③ 记 $D=\mathrm{diag}(p_1,p_2,\cdots,p_n)$，则集合 $\bigcap\limits_D G(D^{-1}AD)$ 含有 A 的所有特征值．事实上，对每个 $D=\mathrm{diag}(p_1,\cdots,p_n)$，$A$ 的所有特征值都位于 $G(D^{-1}AD)$ 中，当然它们都位于 $\bigcap\limits_D G(D^{-1}AD)$ 中．

1029. 设 $A=(a_{ij})$ 是 n 阶行对角占优矩阵，则

1) A 的每个特征值 λ 至少适合 n 个不等式 $|\lambda-a_{ii}|<|a_{ii}|$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ 中的一个．

2) 当 A 是实方阵时，A 的每个特征值都在复平面的右半部．

证 1) 由条件 $R_i=\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}|<|a_{ii}|$，$1\leqslant i\leqslant n$．由圆盘定理，对于 A 的任一特征值 λ，有 $\lambda\in\bigcup\limits_{i=1}^{n}D_i(A)$．于是存在 i_0，使

$$|\lambda-a_{i_0i_0}|\leqslant R_{i_0}<|a_{i_0i_0}|.$$

2) 设 λ 是 A 的任一特征值，只证 $\mathrm{Re}(\lambda)$ 是正数即可．如果令 $\lambda=a+bi$，$a=\mathrm{Re}(\lambda)$，$b=\mathrm{Im}(\lambda)$．由 1)知，存在某个 r，使 $|\lambda-a_{rr}|<a_{rr}$，即 $|(a-a_{rr})+b_i|<a_{rr}$．故 $(a-a_{rr})^2+b^2<a_{rr}^2$．因而 $0\leqslant a^2+b^2<2aa_{rr}$，$0<aa_{rr}$，又 $a_{rr}>0$，所以 $a=\mathrm{Re}(\lambda)>0$．

1030. 设 $A=(a_{ij})$ 是 n 阶行对角占优矩阵，$a_{ii}(1\leqslant i\leqslant n)$ 中有 p 个正数、q 个负数，$p+q=n$，则 A 的正特征值个数 $l_1\leqslant p$，负特征值个数 $l_2\leqslant q$，且 A 恰有 p 个特征值之实部为正，恰有 q 个特征值之实部为负．

证 作 $B(t)=(b_{ij})_{n\times n}$，其中 $b_{ij}=\begin{cases}a_{ij}t & i\neq j,\\ a_{ii} & i=j,\end{cases}$ 则 $B(0)=\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$ 为对角矩阵，而 $B(1)=A$．让 t 自 0 单调递增地变到 1，注意 $B(0)$ 之特征值为 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$，因此随着 t 的变化，$B(t)$ 之各个盖氏圆盘

$D_i(B(t))=\{z\mid |z-a_{ii}|\leqslant\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|b_{ij}|=tR_i\}$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ 分别自 a_{11},a_{22}，$\cdots,a_{nn}$ 递增地扩大为 A 的各个相应的盖氏圆盘

$$D_i(A)=\{z\mid |z-a_{ii}|\leqslant R_i\}\ (1\leqslant i\leqslant n).$$

设 $a_{k_1k_1}>0,\cdots,a_{k_pk_p}>0$ 及 $a_{k_{p+1}k_{p+1}}<0,\cdots,a_{k_nk_n}<0$．

记

$$S_1=\bigcup_{j=1}^{p}D_{k_j}(B(t)),\qquad S_2=\bigcup_{j=p+1}^{p}D_{k_j}(B(t)).$$

因为 $R_i=\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}|<|a_{ii}|(1\leqslant i\leqslant n)$，所以 $S_1\cap S_2$ 为空集．而 $B(t)$ 的特征值都是 $B(t)$ 的元素 b_{ij} 的连续函数，因此也都是 t 的连续函数．故当 t 从 0 到 1 变化时，$B(t)$ 的特征值不会从 S_1 跳到 S_2 中（S_1,S_2 均为闭集）．但它们总在 $S_1\cup S_2$ 中（由圆盘定理）．因此，A 至少有 p 个特征值在 S_1 中．同理知 A 也至少有 q 个特征值在 S_2 中，但 $p+q=n$，故 A 恰有 P 个特征值在 S_1 中，恰有 q 个特征值在 S_2 中，而 S_1,S_2 分别在复平面之虚轴的右、左方，且它们与虚轴均无公共点，由此即得结论．

七、 特征值的界

1031. 设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶复矩阵，$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的全部特征值，则 $|\lambda_i|\leqslant c$，其中

$$c_i=\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|,c=\max\{c_1,\cdots,c_n\}.$$

证 由第 **1025** 条，$\lambda_i\in\bigcup_{k=1}^{n}D_k(A)$，则

$$\lambda_i\in D_m(A),|\lambda_i-a_{mm}|\leqslant\sum_{k\neq m}|a_{mk}|.$$

所以 $|\lambda_i|\leqslant|a_{mm}|+\sum_{k\neq m}|a_{mk}|=c_m\leqslant c$. 由 i 的任意性即得结论．

注 ① 再令 $M_j=\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|(i=1,2,\cdots,n)$，

$$M=\max\{M_1,\cdots,M_n\},\text{则}|\lambda_i|\leqslant M.$$

② 对 A 的谱半径 $\rho(A)$ 有

$$|\lambda_i|\leqslant\rho(A)\leqslant\min\{c,M\}.$$

1032. 设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶行对角占优的复矩阵，λ 为 A 的任一特征值，且 $c=\max\{|a_{11}|,|a_{22}|,\cdots,|a_{nn}|\}$，则 $|\lambda|\leqslant 2c$.

证 由圆盘定理，$\lambda\in D_k(A)$，则

$$|\lambda-a_{kk}|\leqslant\sum_{j\neq k}^{n}|a_{kj}|\leqslant|a_{kk}|,$$

所以$|\lambda|-|a_{kk}|\leqslant|\lambda-a_{kk}|\leqslant|a_{kk}|$，从而$|\lambda|\leqslant2|a_{kk}|\leqslant2c$.

1033. 设$A=(a_{ij})$为n阶实矩阵，又

$$|\lambda E-A|=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0,$$

则$|\lambda|<1+c$，其中$c=\max\{|a_{n-1}|,|a_{n-2}|,\cdots,|a_0|\}$.

证 由第**686**条可得.

注 ① 可以用斯图姆定理确定A的实特征值的个数，并求出实特征值的近似值.

② 可以用卢斯定理求出复特征值的近似值.

1034. 设$A=(a_{ij})$是n阶矩阵，λ是A的任一特征值，则

1）当A是实矩阵，并令$M=\max\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}\frac{1}{2}|a_{ij}-a_{ji}|$时，

$$|\mathrm{Im}(\lambda)|\leqslant M\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

2）当A是复矩阵，令$\rho=\max\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_{ij}|$，$\delta=\max\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}\frac{1}{2}|a_{ij}+\overline{a}_{ji}|$，$\tau=\max\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}\frac{1}{2}|a_{ij}-\overline{a}_{ji}|$时，有

$$|\lambda|\leqslant n\rho,\ |\mathrm{Re}(\lambda)|\leqslant n\delta,\ |\mathrm{Im}(\lambda)|\leqslant n\tau.$$

证 1）设$\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$为$A$的属于$\lambda$的一个特征向量，且不防设$\overline{\alpha'}\alpha=\sum\limits_{i=1}^{n}\overline{x}_ix_i=1$，则

$\overline{\alpha'}A\alpha=\lambda\overline{\alpha'}\alpha=\lambda$，$\overline{\lambda}=\overline{(\overline{\alpha'}A\alpha)'}=\overline{\alpha'}\overline{A'}\alpha=\overline{\alpha'}A'\alpha$. 故$\lambda-\overline{\lambda}=2i\mathrm{Im}(\lambda)=\overline{\alpha'}(A-A')\alpha$为纯虚数. 但

$$\begin{aligned}2i\mathrm{Im}(\lambda)&=\overline{\alpha'}(A-A')\alpha=\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}-a_{ji})\overline{x}_ix_j\\&=\frac{1}{2}\Big[\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}-a_{ji})\overline{x}_ix_j+\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ji}-a_{ij})x_i\overline{x}_j\Big]\\&=\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}-a_{ji})\frac{1}{2}(\overline{x}_ix_j-x_i\overline{x}_j).\end{aligned}$$

取绝对值得

$$2|\mathrm{Im}(\lambda)|\leqslant\sum_{i,j=1}^{n}\frac{1}{2}|a_{ij}-a_{ji}||\bar{x}_ix_j-x_i\bar{x}_j|$$

$$\leqslant M\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}|\bar{x}_ix_j-x_i\bar{x}_j|,$$

$$4|\mathrm{Im}(\lambda)|^2\leqslant M^2\Big(\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}|\bar{x}_ix_j-x_i\bar{x}_j|\Big)^2$$

$$\leqslant M^2n(n-1)\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}|\bar{x}_ix_j-x_i\bar{x}_j|^2,$$

$$|\bar{x}_ix_j-x_i\bar{x}_j|^2=(\bar{x}_ix_j-x_i\bar{x}_j)\overline{(\bar{x}_ix_j-x_i\bar{x}_j)}=(\bar{x}_ix_j-x_i\bar{x}_j)(x_i\bar{x}_j-\bar{x}_ix_j),$$

$$=2|x_i|^2|x_j|^2-x_i^2\bar{x}_j^2-\bar{x}_i^2x_j^2,$$

$$\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}|\bar{x}_ix_j-x_i\bar{x}_j|^2=2\sum_{i,j=1}^{n}|x_i|^2|x_j|^2-2\sum_{i=1}^{n}\bar{x}_i^2\sum_{j=1}^{n}x_j^2$$

$$=2\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\sum_{j=1}^{n}|x_j|^2-2\sum_{i=1}^{n}\bar{x}_i^2\sum_{j=1}^{n}x_j^2=2-2|t|^2<2,$$

这里 $t=\sum_{i=1}^{n}x_i^2$. 于是

$$4|\mathrm{Im}(\lambda)|^2\leqslant M^2n(n-1)2,$$

$$|\mathrm{Im}(\lambda)|\leqslant M\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

2) 设 α 是 A 的属于 λ 的一个复单位特征向量，则

$$|\lambda|=|\bar{\alpha}'A\alpha|=\Big|\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\bar{x}_ix_j\Big|\leqslant\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}||x_i||x_j|$$

$$\leqslant\rho\sum_{i,j=1}^{n}|x_i||x_j|=\rho\Big(\sum_{k=1}^{n}|x_k|\Big)^2.$$

但

$$\Big(\sum_{k=1}^{n}|x_k|\Big)^2\leqslant n\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2,$$

$$|\lambda|\leqslant\rho n\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2=\rho n,\tag{1}$$

又 $\overline{\lambda}=\overline{\alpha'}\overline{A'}\alpha$, $2\mathrm{Re}(\lambda)=\lambda+\overline{\lambda}=\overline{\alpha'}(A+\overline{A'})\alpha$,

$$2i\mathrm{Im}(\lambda)=\lambda-\overline{\lambda}=\overline{\alpha'}(A-\overline{A'})\alpha,$$

从而

$$\mathrm{Re}(\lambda)=\overline{\alpha'}\left(\frac{A+\overline{A'}}{2}\right)\alpha,$$

$$i\mathrm{Im}(\lambda)=\overline{\alpha'}\left(\frac{A-\overline{A'}}{2}\right)\alpha.$$

令

$$B=\frac{A+\overline{A'}}{2}=(b_{ij})_{n\times n},\delta=\max_{1\leqslant i,j\leqslant n}|b_{ij}|=\max_{1\leqslant i,j\leqslant n}\frac{1}{2}|a_{ij}+\overline{a}_{ji}|,$$

$$C=\frac{A-\overline{A'}}{2}=(c_{ij})_{n\times n},\tau=\max_{1\leqslant i,j\leqslant n}|c_{ij}|=\max_{1\leqslant i,j\leqslant n}\frac{1}{2}|a_{ij}-\overline{a}_{ji}|,$$

则由(1)式可证得 $|\mathrm{Re}(\lambda)|=|\overline{\alpha'}B\alpha|\leqslant\delta n$,

$$|\mathrm{Im}(\lambda)|=|i\mathrm{Im}(\lambda)|=|\overline{\alpha'}C\alpha|\leqslant\tau n.$$

注 ① 当 A 为实对称矩阵时,有 $M=0$. 由 1) 知 $\mathrm{Im}(\lambda)=0$,即λ为实数. 这说明实对称矩阵的特征值都是实数.

② 当 A 为厄米特矩阵时,$\tau=0$. 由 2)知 $\mathrm{Im}(\lambda)=0$,即λ为实数. 而当 A 是反厄米特矩阵时,$\delta=0$,从而 $\mathrm{Re}(\lambda)=0$,即 $\lambda(\neq0)$ 为纯虚数. 这说明厄米特矩阵的特征值均为实数,反厄米特矩阵的复特征值均为纯虚数.

1035. 设 A 为 n 阶复矩阵,λ 是 A 的任一特征值.

1) 令 $B=\frac{1}{2}(A+\overline{A'})$,$B$ 的最小与最大特征值为 s 与 t,则 $s\leqslant\mathrm{Re}(\lambda)\leqslant t$.

2) 令 $C=\frac{1}{2}(A-\overline{A'})$,$-iC$ 的最小与最大特征值为 a 与 b,则 $a\leqslant\mathrm{Im}(\lambda)\leqslant b$.

3) 令 $M=\overline{A'}A$,M 的最小与最大特征值为 c 与 d,则

$$c\leqslant|\lambda|^2\leqslant d.$$

证 1) 设 B 的特征值为 $s=s_1\leqslant s_2\leqslant\cdots\leqslant s_n=t$. 因 $\overline{B'}=B$,所以存在酉矩阵 $U=(u_1,u_2,\cdots,u_n)$,使

$$\overline{U'}BU=\mathrm{diag}(s_1,s_2,\cdots,s_n)=D.$$

又任一向量 x 均可用 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 表示，即

$$x=Uy,\ y'=(k_1,k_2,\cdots,k_n).$$

从而可得
$$\overline{x'}x=\overline{y'}\ \overline{U'}Uy=\overline{y'}y=\sum_{i=1}^{n}|k_i|^2,$$

$$\overline{x'}Bx=\overline{y'}\ \overline{U'}BUy=\sum_{i=1}^{n}s_i|k_i|^2,$$

$$s\,\overline{x'}x=s_1\sum_{i=1}^{n}|k_i|^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}s_i|k_i|^2=\overline{x'}Bx\leqslant s_n\sum_{i=1}^{n}|k_i|^2=t\,\overline{x'}x.\quad(1)$$

令 x_0 是 A 的属于特征值 λ 的特征向量，由(1)式知

$$s\,\overline{x'}_0x_0\leqslant\overline{x'}_0Bx_0\leqslant t\,\overline{x'}_0x_0.$$ 又

$$\overline{(Ax_0)'}=\overline{x'}_0\,\overline{A'}=\bar{\lambda}\,\overline{x'_0},$$

$$\begin{aligned}\overline{x'_0}Bx_0&=\overline{x'_0}\left[\frac{1}{2}(A+\overline{A'})\right]x_0\\&=\frac{1}{2}\left[\overline{x'_0}(Ax_0)+(\overline{x'_0}\overline{A'})x_0\right]=\frac{1}{2}\left[\lambda\,\overline{x'_0}x_0+\bar{\lambda}\,\overline{x'_0}x_0\right]\\&=\frac{1}{2}(\lambda+\bar{\lambda})\overline{x'_0}x_0,\end{aligned}$$

于是

$$s\,\overline{x'_0}x_0\leqslant\frac{1}{2}(\lambda+\bar{\lambda})\overline{x'_0}x_0\leqslant t\,\overline{x'_0}x_0.$$

两边约去 $\overline{x'_0}x_0>0$，得 $s\leqslant\frac{1}{2}(\lambda+\bar{\lambda})=\mathrm{Re}(\lambda)\leqslant t.$

2）仿 1）之证法，可得．

3）因为 $\overline{M'}=M$，仿 1）证明可得

$$c\,\overline{x'_0}x_0\leqslant\overline{x'_0}Mx_0\leqslant d\,\overline{x'_0}x_0,$$

而 $\overline{x'_0}Mx_0=(\overline{x'_0}\overline{A'})(Ax_0)=(\bar{\lambda}\,\overline{x'_0})(\lambda x_0)=|\lambda|^2\,\overline{x'_0}x_0$，于是 $c\,\overline{x'_0}x_0\leqslant|\lambda|^2\,\overline{x'_0}x_0\leqslant d\,\overline{x'_0}x_0$，所以 $c\leqslant|\lambda|^2\leqslant d$.

1036.　设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 满足 $|a_{ii}|>\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|\ (1\leqslant i\leqslant n)$，$B=E-D^{-1}A$，其中 $D=\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$，则 $\rho(B)<1$.

证　因为 $|a_{ii}|>\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|\geqslant0\ \ (1\leqslant i\leqslant n)$，所以 $a_{ii}\neq0$．从而 D

可逆，设 λ 为 $B=(b_{ij})_{n\times n}$ 的任一特征值，由圆盘定理知存在某个 i_0，使 $|\lambda-b_{i_0i_0}|\leqslant\sum_{j\neq i_0}|b_{i_0j}|$，而

$$B=E-D^{-1}A=\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&\ddots&\\&&&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\frac{1}{a_{11}}&&\\&\ddots&\\&&\frac{1}{a_{nn}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&-\frac{a_{12}}{a_{11}}&\cdots&-\frac{a_{1n}}{a_{11}}\\-\frac{a_{21}}{a_{22}}&0&\cdots&-\frac{a_{2n}}{a_{22}}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\frac{-a_{n1}}{a_{nn}}&\frac{-a_{n2}}{a_{nn}}&\cdots&0\end{bmatrix}=(b_{ij})_{n\times n},$$

$$b_{ii}=0(1\leqslant i\leqslant n),b_{ij}=-\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\ (i\neq j),$$

$$|\lambda|\leqslant\sum_{j\neq i_0}\left|\frac{-a_{i_0j}}{a_{i_0i_0}}\right|<1,$$

故 $\rho(B)<1$.

八、 广义特征值

1037. 什么叫做广义特征值?

答 设 A,B 都是数域 P 上的 n 阶矩阵，若存在 $\lambda_0\in P$ 和非零向量 $\alpha\in P^{n\times1}$，使 $A\alpha=\lambda_0B\alpha$，则称 λ_0 为 A 关于 B 的一个广义特征值，α 称为属于 λ_0 的一个广义特征向量.

注 当 $B=E$ 时，广义特征值变为特征值.

1038. 设 A,B 都是数域 P 上的 n 阶矩阵，$\lambda_0\in P$，则 λ_0 是 A 关于 B 的广义特征值当且仅当 $|A-\lambda_0B|=0$.

证 由 λ_0 是广义特征值知存在 $\alpha(\neq0)\in P^{n\times1}$，有 $A\alpha=\lambda_0B\alpha$ $\Longleftrightarrow(A-\lambda_0B)x=0$ 有非零解 $\Longleftrightarrow|A-\lambda_0B|=0$.

1039. 设 λ_0 是 A 关于 B 的一个广义特征值，令

$V_{\lambda_0}=\{\alpha\in P^{n\times 1}\mid A\alpha=\lambda_0 B\alpha\}$，则 V_{λ_0} 是 $P^{n\times 1}$ 的一个子空间(称为广义特征子空间).

证　由 $0\in V_{\lambda_0}$，知 V_{λ_0} 非空. $\forall\ \alpha,\beta\in V_{\lambda_0}$，$\forall\ k,l\in P$，

$$A(k\alpha+l\beta)=k(\lambda_0 B\alpha)+l(\lambda_0 B\beta)=\lambda_0 B(k\alpha+l\beta),$$

所以 $k\alpha+l\beta\in V_{\lambda_0}$.

1040.　设 $A=\begin{bmatrix}1&2\\2&0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$.

1) 求 A 关于 B 的广义特征值与相应的广义特征向量.

2) 求 B 关于 A 的广义特征值与相应的广义特征向量.

解　1) 由 $|A-\lambda B|=3\lambda-4$ 可得 A 关于 B 的广义特征值 $\lambda=\frac{4}{3}$. 由 $(A-\frac{4}{3}B)x=0$ 或 $(3A-4B)x=0$ 得一个线性无关的解 $\alpha'=(2,1)$. 因此属于 $\lambda=\frac{4}{3}$ 的广义特征向量为 $k\alpha,k\neq 0$.

2). $|B-\lambda A|=\lambda(4\lambda+3)$，$\lambda_1=0$，$\lambda_2=-\frac{3}{4}$. 当 $\lambda=0$ 时，$(B-0\cdot A)x=0$，即 $Bx=0$. 易得线性无关的解为 $\beta_1'=(1,-1)$. 从而属于 $\lambda_1=0$ 的广义特征向量为 $k_1\beta_1,k_1\neq 0$. 当 $\lambda=-\frac{3}{4}$ 时，$(B+\frac{3}{4}A)x=0$ 即 $(4B+3A)x=0$. 易得线性无关的解为 $\beta_2'=(2,1)$. 从而属于 $-\frac{3}{4}$ 的广义特征向量为 $k_2\beta_2,k_2\neq 0$.

1041.　设 A,B 为 n 阶矩阵，则当 B 可逆时，求 A 关于 B 的广义特征值即可转化为求 AB^{-1} 特征值.

证　设 λ_0 为 A 关于 B 的广义特征值，则 $|A-\lambda_0 B|=0$，由 B 可逆，易得 $|\lambda_0 E-AB^{-1}|=0$. 反之亦然. 此即表明求广义特征值的问题可转化为求 AB^{-1} 特征值的问题.

第十二章　几种特殊矩阵

一、 对角矩阵与准对角矩阵

1042. 什么叫做对角矩阵？什么叫做准对角矩阵？

答 设 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})$，$a_{ij}=0$，$i\neq j$，则称 A 为对角矩阵，记为 $A=\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$. 形如

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_t \end{bmatrix}.$$

的矩阵（其中 A_i 是 $n_i\times n_i$ 矩阵 $i=1,2,\cdots,t$）称为准对角矩阵，记为 $A=\mathrm{diag}(A_1,A_2,\cdots,A_t)$.

1043. 设准对角矩阵 $A=\mathrm{diag}(A_1,A_2,\cdots,A_s)$，其中 A_i 是 n_i 阶矩阵($i=1,2,\cdots,s$)，则

1) $|A|=|A_1||A_2|\cdots|A_s|$；

2) A 可逆当且仅当 $A_i(i=1,2,\cdots,s)$都可逆. 当 A 可逆时，有 $A^{-1}=\mathrm{diag}(A_1^{-1},A_2^{-1},\cdots,A_s^{-1})$.

3) 秩 $A=$秩 A_1+秩 $A_2+\cdots+$秩 A_s；

证 1) 用数学归纳法及行列式的性质可证.

2) 由 1)可知

A 可逆$\Longleftrightarrow|A|\neq0\Longleftrightarrow|A_i|\neq0\ (i=1,2,\cdots,s)$

$\Longleftrightarrow A_i$ 可逆 $(i=1,2,\cdots,s)$.

令 $B=\mathrm{diag}(A_1^{-1},\cdots,A_s^{-1})$，则 $AB=E$，从而

$$A^{-1}=\mathrm{diag}(A_1^{-1},\cdots,A_s^{-1}).$$

3) 设秩 $A_i=r_i(i=1,2,\cdots,s)$，则存在可逆矩阵 P_i 与 Q_i，使得 $P_iA_iQ_i=\mathrm{diag}(E_{r_i},0)\ (i=1,2,\cdots,s)$. 令

$$P=\mathrm{diag}(P_1,\cdots,P_s),Q=\mathrm{diag}(Q_1,\cdots,Q_s),$$

则 P,Q 都是 n 阶可逆矩阵，且 $PAQ=\mathrm{diag}(E_{r_1},0,E_{r_2},0,\cdots,E_{r_s},0)$，所以秩 $A=r_1+r_2+\cdots+r_s=$ 秩 $A_1+\cdots+$ 秩 A_s.

1044. 设 $A=\mathrm{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，其中 $a_i\neq a_j(i\neq j)$，则与 A 可交换的矩阵只能是对角矩阵.

1045. n 阶矩阵 A 与所有 n 阶可逆矩阵可交换的充要条件是 A 为数量矩阵.

证 充分性是显然的，下证必要性. 由第 **1044** 条，A 是对角矩阵，不妨设 $A=\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$. 设

$$B=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&1\\1&0&0&\cdots&0\end{bmatrix},$$

由 $AB=BA$，得

$$\begin{bmatrix}0&a_{11}&0&\cdots&0\\0&0&a_{22}&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&a_{n-1,n-1}\\a_{nn}&0&0&\cdots&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&a_{22}&0&\cdots&0\\0&0&a_{33}&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&a_{nn}\\a_{11}&0&0&\cdots&0\end{bmatrix}.$$

所以 $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}$，即 A 为数量矩阵.

注 这一结论在第 **69** 条已证，这里证法稍有变动.

1046. 设

$$A=\begin{bmatrix}a_1E_1&&&\\&a_2E_2&&\\&&\ddots&\\&&&a_rE_r\end{bmatrix},$$

其中当 $i\neq j$ 时，$a_i\neq a_j(i、j=1,2,\cdots,r)$，$E_i$ 是 n_i 阶单位矩阵，则与 A 可交换的矩阵只能是准对角矩阵 $\mathrm{diag}(A_1,\cdots,A_r)$，其中 A_i 是 n_i 阶方阵.

二、 三角矩阵

1047. 什么叫做上(下)三角矩阵?

答 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 称为上(下)三角矩阵，如果当 $i>j(i<j)$ 时，有 $a_{ij}=0$.

1048. 1) 两个上(下)三角矩阵的乘积仍是上(下)三角矩阵；

2) 可逆的上(下)三角矩阵的逆矩阵仍为上(下)三角矩阵.

证 1) 设 $A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$ 为 n 阶上三角矩阵，那么当 $i>j$ 时，$a_{ij}=b_{ij}=0$. 令 $AB=(c_{ij})$，其中 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$，当 $i>j$ 时，$c_{ij}=0$，即 AB 也是上三角矩阵.

可类似地证明两个下三角矩阵的乘积是下三角矩阵.

2) 设 A 为上三角矩阵，则 A 的元素 $a_{ij}(i<j)$ 的代数余子式 A_{ij} 都是 $n-1$ 阶的上三角行列式，且对角线上至少有一个零，所以当 $i<j$ 时，$A_{ij}=0$，即 A^{-1} 是一个上三角矩阵.

注 $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{a_{11}} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{a_{nn}}\end{pmatrix}$.

1049. 设

$$J=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda\end{pmatrix},$$

1）求与 J 可交换的矩阵；

2）与 J 可换的矩阵必为 J 的多项式.

证　1）设

$$N=\begin{bmatrix}0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0\end{bmatrix},$$

则 $J=\lambda E+N$　或 $N=J-\lambda E$.

设 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})$ 与 J 可换，那么

$A(\lambda I+N)=(\lambda I+N)A$，所以 $AN=NA$，即

$$\begin{bmatrix}0 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} \\ 0 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-2} & a_{2,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

比较等式两边矩阵对应位置的元素可知：

$$A=\begin{bmatrix}b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} \\ & b_0 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & b_1 \\ & & & b_0\end{bmatrix}=\sum_{i=0}^{n-1}b_iN^i.$$

其中 $N^0=E$.

2）设 $f(x)=b_0+b_1(x-\lambda)+b_2(x-\lambda)^2+\cdots+b_{n-1}(x-\lambda)^{n-1}$，

那么 $A=\sum_{i=0}^{n-1}b_iN^i=\sum_{i=0}^{n-1}b_i(J-\lambda E)^i=f(J)$.

1050. 设 $J=\mathrm{diag}(J_1,J_2,\cdots,J_t)$，其中

$$J_k=\begin{bmatrix}\lambda_k & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_k\end{bmatrix}$$

是 n_k 阶矩阵，$k=1,2,\cdots,t$；又设 n 阶复矩阵 B 与 J 可交换，并将 B 和 J 一样分块为

$$B=\begin{bmatrix}B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1t}\\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2t}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ B_{t1} & B_{t2} & \cdots & B_{tt}\end{bmatrix},$$

其中 B_{jk} 是 $n_j\times n_k$ 矩阵，那么

1) 当 $\lambda_j\neq\lambda_k$ 时，$B_{jk}=0$；

2) 当 $\lambda_j=\lambda_k,n_j\geqslant n_k$ 时，

$$B_{jk}=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}b_0 & b_1 & \cdots & b_{n_k-1}\\ & \ddots & \ddots & \vdots\\ & & \ddots & b_1\\ & & & b_0\end{bmatrix}\\ \\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum\limits_{i=0}^{n_k-1}b_iN^i\\ 0\end{bmatrix};$$

3) 当 $\lambda_j=\lambda_k,n_j<n_k$ 时，

$$B_{jk}=\begin{bmatrix}0 & \begin{bmatrix}b_0 & b_1 & \cdots & b_{n_j-1}\\ & \ddots & \ddots & \vdots\\ & & \ddots & b_1\\ & & & b_0\end{bmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \sum\limits_{i=0}^{n_j-1}b_iN^i\end{bmatrix},$$

其中 $b_0,b_1,\cdots$ 是任意复数，且

$$N=\begin{bmatrix}0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0\end{bmatrix}.$$

证　由 $JB=BJ$，得

$$J_jB_{jk}=B_{jk}J_k,1\leqslant j\leqslant t,1\leqslant k\leqslant t.$$

记

$$B_{jk}=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{n_k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n_j1} & b_{n_j2} & \cdots & b_{n_jn_k}\end{bmatrix},$$

由 $J_jB_{jk}=B_{jk}J_k$，有

$$\begin{bmatrix}\lambda_jb_{11}+b_{21} & \lambda_jb_{12}+b_{22} & \cdots & \lambda_jb_{1n_k}+b_{2n_k} \\ \cdots\ \cdots & \cdots\ \cdots & \cdots\ \cdots & \cdots\ \cdots \\ \lambda_jb_{n_j-1,1}+b_{n_j1} & \lambda_jb_{n_j-1,2}+b_{nj2} & \cdots & \lambda_jb_{n_j-1,n_k}+b_{n_jn_k} \\ \lambda_jb_{nj1} & \lambda_jb_{nj2} & \cdots & \lambda_jb_{n_jn_k}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\lambda_kb_{11} & b_{11}+\lambda_kb_{12} & \cdots & b_{1,n_k-1}+\lambda_kb_{1n_k} \\ \cdots\ \cdots & \cdots\ \cdots & \cdots\ \cdots & \cdots\ \cdots \\ \lambda_kb_{n_j-1,1} & b_{n_j-1,1}+\lambda_kb_{n_j-1,2} & \cdots & b_{n_j-1,n_k-1}+\lambda_kb_{n_j-1,n_k} \\ \lambda_kb_{n_j1} & b_{n_j1}+\lambda_kb_{n_j2} & \cdots & b_{n_j,n_k-1}+\lambda_kb_{n_jn_k}\end{bmatrix}.$$

1) 当 $\lambda_j\neq\lambda_k$ 时，比较等式两边矩阵的最后一行，有 $b_{n_j1}=0$，所以 $b_{n_j2}=\cdots=b_{n_jn_k}=0$. 再从最后一行依次考察到第一行，便得 $B_{jk}=0$.

2) 当 $\lambda_j=\lambda_k$ 时，同样从最后一行依次考察到第一行，于是当 $p>q$ 时，$a_{pq}=0,p=2,\cdots,n_j,q=1,\cdots,n_k$，并且 $a_{pq}=a_{p-1,q-1},p=2,\cdots,n_j,q=2,\cdots,n_k$.

当 $n_j\geqslant n_k$ 时，B_{jk}的第 n_k+1 行及以下各行全为 0，所以 2)成

立.

3) 当 $n_j<n_k$ 时,比较最后一行,有 $b_{n_j1}=\cdots=b_{nn_j}=b_{n_j,n_j+1}=\cdots=b_{n_j,n_k-1}=0$,那么 $b_{11}=b_{12}=\cdots=b_{1,n_k-n_j}=0$. 故 B_{jk}的第 1 列到第 n_k-n_j 列全为 0. 由此即得 3).

三、反对称矩阵

1051. 什么叫做反对称矩阵?

答 n 阶矩阵 A 如果满足 $A'=-A$,即称 A 为反对称矩阵.

1052. 奇数阶反对称矩阵的行列式等于零.

1053. 任意 n 阶矩阵 A 可写成一个对称矩阵与一个反对称矩阵之和.

1054. A 为反对称矩阵的充要条件是对任意实 n 元列向量 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$,均有 $X'AX=0$.

证 必要性. 若 A 为反对称矩阵,则 $a_{ii}=0\ (i=1,2,\cdots,n)$,$a_{ij}=-a_{ji}(i\neq j)$,所以对一切实 n 元列向量 $X=(x_1,\cdots\cdots,x_n)'$,$a_{ii}x_ix_i=0$,$a_{ij}x_ix_j+a_{ji}x_jx_i=0$. 于是 $X'AX=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=0$.

充分性. 令 $\varepsilon_i(i=1,\cdots,n)$表示 n 元单位列向量,即第 i 个分量为 1,其余分量均为 0 的 n 元列向量. 由 $\varepsilon_i'A\varepsilon_i=0$ 得 $a_{ii}=0$,$i=1,\cdots,n$. 由$(\varepsilon_i+\varepsilon_j)'A(\varepsilon_i+\varepsilon_j)=0$ 得 $a_{ij}=-a_{ji}$,$i\neq j$. 所以 A 是反对称矩阵.

注 这与第 **761** 条的证法稍有不同.

1055. 实反对称矩阵的特征值是纯虚数或零.

证 设 $\lambda=a+bi$ 是实反对称矩阵 A 的任一特征值,α 是属于 λ 的一个特征向量,那么 $A\alpha=\lambda\alpha$. 由 A 为实反对称矩阵有

$$\overline{\alpha}'A\alpha=-\overline{\alpha}'\ \overline{A}'\alpha=-\overline{(A\alpha)}'\alpha=-\overline{\lambda}\cdot\overline{\alpha}'\alpha,$$

又 $\overline{\alpha}'A\alpha=\lambda\overline{\alpha}'\alpha$,所以 $\lambda\overline{\alpha}'\alpha=-\overline{\lambda}\cdot\overline{\alpha}'\alpha$. 故 $\lambda=-\overline{\lambda}$,即 λ 是纯虚数或 0.

1056. 设 A 为反对称矩阵,则 $A+E$ 是可逆矩阵.

证 否则,即 $|A+E|=0$. 那么 $|-E-A|=0$,于是 -1 是 A 的特征值,与第 **1055** 条矛盾.

1057. 设 A 是实反对称矩阵,则 A',kA 仍为实反对称矩阵,其中 k 是实数.

1058. 两个反对称矩阵的积是对称矩阵当且仅当它们可交换.

证 设 A,B 是反对称矩阵. 当 $AB=BA$ 时,$AB=BA=(-B')(-A')=B'A'=(AB)'$,即 AB 是对称矩阵.

反之,若 $(AB)'=AB$,则 $AB=B'A'=(-B)(-A)=BA$,即 A,B 可交换.

1059. 设 A,B 是 n 阶反对称矩阵,则 $AB+BA$ 是对称矩阵,$AB-BA$ 是反对称矩阵.

证
$$(AB+BA)'=(AB)'+(BA)'=B'A'+A'B'$$
$$=(-B)(-A)+(-A)(-B)=AB+BA.$$
$$(AB-BA)'=B'A'-A'B'=(-B)(-A)-(-A)(-B)$$
$$=BA-AB=-(AB-BA).$$

1060. 设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶反对称阵,A^* 为 A 的伴随矩阵,则

1) 当 n 为奇数时,A^* 为对称矩阵;当 n 为偶数时,A^* 为反对称矩阵.

2) 当 A 为可逆矩阵时,A^{-1} 也是反对称矩阵.

证 1) 容易知道 $-A$ 的第 i 行、第 j 列元素的代数余子式为 $(-1)^{n-1}A_{ij}$,其中 A_{ij} 是 A 中元素 a_{ij} 的代数余子式,所以 $(A^*)'=(A')^*=(-A)^*=(-1)^{n-1}A^*$.

当 n 为奇数时,$(A^*)'=A^*$,即 A^* 是对称矩阵. 当 n 为偶数时,$(A^*)'=-A^*$,即 A^* 是反对称矩阵.

2) 若 A 可逆,则 $(A^{-1})'=(A')^{-1}=(-A)^{-1}=-A^{-1}$,所以 A^{-1} 也是反对称矩阵.

1061. 设 A 是 n 阶实反对称矩阵，则

1）A 合同于 $B=\mathrm{diag}(C,\cdots,C,0)$，其中

$$C=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix};$$

2）秩 A 是偶数；

3）$|A|=a^2$，其中 $a\geqslant 0$.

证 1）对 n 用数学归纳法.

当 $n=1$ 时，$A=(0)$，结论成立. 当 $n=2$ 时，

$$A=\begin{bmatrix}0&a\\-a&0\end{bmatrix},a>0,\text{令 } P=\begin{bmatrix}0&-\frac{1}{\sqrt{a}}\\\frac{1}{\sqrt{a}}&0\end{bmatrix},$$

则

$$P'AP=C.$$

假定 $n\leqslant k$ 时结论成立，对 $n=k+1$，设

$$A=\begin{bmatrix}A_1&\alpha\\-\alpha'&0\end{bmatrix},$$

其中 $\alpha=(a_{1,k+1},\cdots,a_{k,k+1})'$，$A_1$ 是 k 阶反对称矩阵.

若 $\alpha=0$，由归纳假定结论成立；否则，不妨设 $a_{k,k+1}\neq 0$，用 $a_{k,k+1}^{-1}$乘 A 的第 $k+1$ 行和 $k+1$ 列，再将第 k 行适当的倍数依次加到以上各行，第 k 列的相同倍数依次加到以上各列，A 即化为

$$B=\begin{bmatrix} & & & & 0\\ & & B_1 & & \vdots\\ & & & & 0\\ & & & & 1\\ 0&\cdots&0&-1&0\end{bmatrix},$$

即存在可逆矩阵 T，使 $T'AT=B$，而 B_1 是 k 阶反对称矩阵. 由归纳假定存在 k 阶可逆矩阵 P_1，使 $P_1'B_1P_1=\mathrm{diag}(C,\cdots,C,0)$，令

$$P=\begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

则 $P'T'ATP=\text{diag}\left[\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\cdots,\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},0,\cdots,0\right].$

2) 由上式知秩 A 是偶数.

3) 因为 $T'AT=B$,所以 $|T|^2|A|=|B|$. 当 $|B|=0$ 时,结论成立;当 $|B|\neq 0$ 时,$|B|=1$,结论也成立.

1062. 设 A 是 n 阶实反对称矩阵,则存在正交矩阵 Q,使得

$$Q'AQ=\text{diag}\left[0,\cdots,0,\begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ -b_1 & 0 \end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix} 0 & b_s \\ -b_s & 0 \end{bmatrix}\right].$$

证 设 A 的特征值为 $0,\cdots,0,\pm b_1 i,\cdots,\pm b_s i$,以及 A 为实正规矩阵,那么由第 **1120** 条知,存在正交阵 Q,使

$$Q'AQ=\text{diag}\left[0,\cdots,0\begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ -b_1 & 0 \end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix} 0 & b_s \\ -b_s & 0 \end{bmatrix}\right].$$

四、 幂等矩阵

1063. 什么叫做幂等矩阵?

答 若方阵 A 满足 $A^2=A$,则称 A 为幂等矩阵.

注 对于幂等矩阵 A,有 $A^k=A$,其中 k 为任意自然数.

1064. 若 A 为幂等矩阵,且 $A\neq E$,则 A 不可逆.

证 用反证法. 若 A 可逆,则用 A^{-1}左乘 $A^2=A$ 得 $A=E$,矛盾.

1065. 设 A 为 n 阶矩阵,秩 $A=r$,则 A 为幂等矩阵的充要条件是存在可逆阵 T,使 $A=T^{-1}\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}T$.

证 充分性显然,下证必要性. 由于 $A^2=A$,则 $f(\lambda)=\lambda^2-\lambda$ 为 A 的零化多项式. 由 $f(\lambda)$ 无重根知 A 相似于对角矩阵,且存在可逆矩阵 T,使

$$A=T^{-1}\begin{bmatrix}E_r & 0\\0 & 0\end{bmatrix}T,$$

其中 $r=$ 秩 A.

注　对幂等矩阵 A,有 $|A|=1$ 或 0.

1066.　n 阶矩阵 A 为幂等矩阵$\Longleftrightarrow$秩 $A+$秩$(A-E)=n$.

证　设秩 $A=t$,

必要性　由第 **1065** 条知 $A=T^{-1}\begin{bmatrix}E_t & 0\\0 & 0\end{bmatrix}T$. 从而 $A-E=T^{-1}\begin{bmatrix}0 & \\ & E_{n-t}\end{bmatrix}T$.　秩 $A+$秩$(A-E)=t+(n-t)=n$.

充分性　令

$$W_1=\{Ax|x\in P^{n\times1}\},W_2=\{(E-A)x|x\in P^{n\times1}\}.$$

显然有 $W_1+W_2\subseteq P^{n\times1}$. $\forall\ x\in P^{n\times1}$,则 $x=Ax+(E-A)x\in W_1+W_2$,$P^{n\times1}\subseteq W_1+W_2$,故 $P^{n\times1}=W_1+W_2$.

其次,令 $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$,则

$$Ax=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\begin{bmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=x_1\alpha_1+\cdots x_n\alpha_n.$$

故　$W_1=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$,$\dim W_1=$秩 A. 同理,$\dim W_2=$秩$(E-A)$. 所以,$\dim W_1+\dim W_2=$秩 $A+$秩$(A-E)=n$. $P^{n\times1}=W_1\oplus W_2$.

下证 $A(A-E)=0$. 事实上,$\forall\ x\in P^{n\times1}$, $A(A-E)x=(A-E)Ax\in W_1\cap W_2=\{0\}$,即 $A(A-E)x=0$. 由 x 的任意性即得 $A(A-E)=0$,故 $A^2=A$.

1067.　设 A 为幂等矩阵.

1) 当 k 为何值时,$E-kA$ 可逆?

2) 当 k 和 l 为何值时,$kE-lA$ 可逆?

3) 求$(E-2A)^{-1}$.

解　由第 **1065** 条知　$A=T^{-1}\begin{bmatrix}E_r & 0\\0 & 0\end{bmatrix}T$,其中 $r=$秩 A.

$$1)\ E-kA=T^{-1}\begin{pmatrix}E_r & \\ & E_{n-r}\end{pmatrix}T-T^{-1}\begin{pmatrix}kE_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}T$$

$$=T^{-1}\begin{pmatrix}(1-k)E_r & 0\\ 0 & E_{n-r}\end{pmatrix}T.$$

当 $k\neq 1$ 时，$E-kA$ 可逆.

2）类似地，

$$kE-lA=T^{-1}\begin{pmatrix}(k-l)E_r & 0\\ 0 & kE_{n-r}\end{pmatrix}T.$$

所以当 $k\neq l, k\neq 0$ 时，$kE-lA$ 可逆.

3）由 1)知

$$E-2A=T^{-1}\begin{pmatrix}-E_r & \\ & E_{n-r}\end{pmatrix}T$$

$$\left[T^{-1}\begin{pmatrix}-E_r & \\ & E_{n-r}\end{pmatrix}T\right]^{-1}=T^{-1}\begin{pmatrix}-E_r & \\ & E_{n-r}\end{pmatrix}T.$$

所以 $(E-2A)^{-1}=E-2A$.

1068. 设 A 为 n 阶矩阵，

$W_1=\{x\in P^n\mid Ax=0\}, W_2=\{x\in P^n\mid (A-E)x=0\}$，

则 A 为幂等矩阵 $\Longleftrightarrow P^n=W_1\oplus W_2$.

证　必要性　$W_1+W_2\subseteq P^n$ 是显然的. $\forall\ x\in P^n$，则 $x=Ax+(E-A)x$. 而 $(A-E)Ax=0, A(E-A)x=0$，$\therefore Ax\in W_2$，$(E-A)x\in W_1$. 从而 $x\in W_1+W_2$，故 $P^n=W_1+W_2$.

其次，$\forall\ y\in W_1\cap W_2$，那么 $Ay=0$，$(A-E)y=0$，所以 $y=Ay=0$，故 $P^n=W_1\oplus W_2$.

充分性　$\forall\ x\in P^n$，因为 $0=A(A-E)x+(A-E)(-Ax)$，所以由分解的唯一性得 $A(A-E)x=0$. 由 x 的任意性得 $A^2=A$.

1069. 设 A 为幂等矩阵，则 $(A+E)^k=E+(2^k-1)A$，其中 k 为正整数.

证　对 k 用数学归纳法可证.

1070. 设 A 为幂等矩阵,则 $\mathrm{tr}A=$ 秩 A.

证 由第 **1065** 条可证.

1071. 设 A 的秩为 r,则 A 为幂等矩阵的充要条件是存在秩为 r 的 $r\times n$ 矩阵 B 和秩为 r 的 $n\times r$ 矩阵 C,使得 $A=CB,BC=E_r$.

证 充分性

$$A^2=(CB)(CB)=C(BC)B=CE_rB=CB=A.$$

必要性 由秩 $A=r$ 及 $A^2=A$ 知存在可逆矩阵 T,使得

$$T^{-1}AT=\begin{bmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

所以
$$A=T\begin{bmatrix}E_r\\ 0\end{bmatrix}(E_r \quad 0)T^{-1}=CB,$$

其中 $C=T\begin{bmatrix}E_r\\ 0\end{bmatrix}$ 是 $n\times r$ 矩阵,秩 $C=r$;$B=(E_r \quad 0)T^{-1}$ 是 $r\times n$ 矩阵,秩 $B=r$,且

$$BC=(E_r,0)T^{-1}T\begin{bmatrix}E_r\\ 0\end{bmatrix}=E_r.$$

1072. 设 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 是 k 个 n 阶实对称矩阵,$1\leqslant k\leqslant n$,且 $A_1+A_2+\cdots+A_k=E$,则下述两条等价:

1) $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 都是幂等矩阵;

2) 秩 A_1+ 秩 $A_2+\cdots+$ 秩 $A_k=n$.

证 1)⇒2) 因为 $A_i(i=1,2,\cdots,k)$是幂等矩阵,令秩 $A_i=r_i$,则存在可逆矩阵 T_i,使

$$T_i^{-1}A_iT_i=\begin{bmatrix}E_{r_i} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

所以,$\mathrm{tr}A_i=r_i=$ 秩 A_i,$i=1,2,\cdots,k$. 于是

$$\begin{aligned}&\text{秩 } A_1+\text{秩 } A_2+\cdots+\text{秩 } A_k\\ &=\mathrm{tr}(A_1)+\mathrm{tr}(A_2)+\cdots+\mathrm{tr}(A_k)\end{aligned}$$

$$=\mathrm{tr}(A_1+A_2+\cdots+A_k)$$
$$=\mathrm{tr}(E)=n.$$

2)⇒1). 当 $k=1$ 时,$A_1=E$,所以 A_1 是幂等矩阵,不妨设 $k>1$,并设秩 $A_i=r_i$,令

$$B=A_1+\cdots+A_{i-1}+A_{i+1}+\cdots+A_k.$$

因为 A_i 是实对称矩阵,所以存在正交矩阵 P,使

$$A_i=P\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_{r_i},0,\cdots,0)P', \tag{1}$$

其中 $\lambda_j\neq 0, j=1,\cdots,r_i$. 于是

$$E=A_i+B=P(\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_{r_i},0,\cdots,0)+B_1)P',$$

其中 $B_1=P'BP$,因此

$$B_1=\mathrm{diag}(1-\lambda_1,\cdots,1-\lambda_{r_i},1,\cdots,1). \tag{2}$$

显然秩 $B_1\geqslant n-r_i$,又

$$\begin{aligned}秩 B_1=秩 B&=秩(A_1+\cdots+A_{i-1}+A_{i+1}+\cdots+A_k)\\ &\leqslant 秩 A_1+\cdots+秩 A_{i-1}+秩 A_{i+1}+\cdots+秩 A_k\\ &=r_1+\cdots+r_{i-1}+r_{i+1}+\cdots+r_k=n-r_i,\end{aligned}$$

所以秩 $B_1=n-r_i$. 由(2)知 $\lambda_1=\cdots=\lambda_{r_i}$,于是由(1)知

$$A_i=P\begin{bmatrix}E_{r_i} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}P'.$$

所以 $A_i^2=A_i$,即 A_i 是幂等矩阵. 由 i 的任意性即得 1).

五、 幂幺矩阵

1073. 什么叫做幂幺矩阵?

答 若存在自然数 m,使 $A^m=E$,则称 A 为幂幺矩阵.

1074. 设 A 为 n 阶矩阵,且 $A^k=E$,其中 k 为自然数,则 A 相似于对角矩阵,且对角线上的元素为 k 次单位根.

证 由 $A^k=E$ 知 A 的零化多项式 $f(x)=x^k-1$. 因为 $f(x)$ 无重根,所以 A 相似于对角矩阵,对角线元为 $f(x)$的根,且为 k 次

单位根.

1075. 设 A,B 为 n 阶矩阵,且

$$A^{k-1}B^{k-1}+A^{k-2}B^{k-2}+\cdots+AB+E=0,$$

若 A 为幂幺矩阵,则 B 也是幂幺矩阵.

证 由 $A^{k-1}B^{k-1}+A^{k-2}B^{k-2}+\cdots+AB+E=0$,

得

$$A(A^{k-1}B^{k-1}+A^{k-2}B^{k-2}+\cdots+AB+E)B=0,$$

$$A^kB^k+(A^{k-1}B^{k-1}+\cdots+A^2B^2+AB+E)-E=0.$$

于是 $A^kB^k=E$. 所以 $B^k=A^{-k}$. 设 $A^m=E$,那么 $B^{mk}=E$.

1076. 什么叫做对合矩阵?

答 若 n 阶矩阵 A 满足 $A^2=E$,则称 A 为对合矩阵.

1077. 设 A 为 n 阶矩阵,则下面三条等价:

1) $A^2=E$;

2) 存在可逆矩阵 T,使 $T^{-1}AT=\begin{bmatrix}E_r & \\ & -E_{n-r}\end{bmatrix}$;

3) 秩$(E-A)+$秩$(E+A)=n$.

证 1)⇒2). 由于 x^2-1 为 A 的零化多项式且无重根,从而 A 相似于对角矩阵. 设 λ 为 A 的任一特征值,则 $\lambda^2=1$,所以 $\lambda=\pm1$,从而存在可逆矩阵 T,使 $T^{-1}AT=\begin{bmatrix}E_r & 0\\ 0 & -E_{n-r}\end{bmatrix}$.

2)⇒3). 因为 $T^{-1}(E-A)T=T^{-1}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 2E_{n-r}\end{bmatrix}T$,

$$T^{-1}(E+A)T=T^{-1}\begin{bmatrix}2E_n & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}T,$$

所以　秩$(E-A)+$秩$(E+A)=n-r+r=n$.

3)⇒1).

$$\begin{bmatrix}E-A & 0\\ 0 & E+A\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}E-A & E+A\\ 0 & E+A\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}E-A & 2E\\ 0 & E+A\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix} E-A & 2E \\ -\frac{E-A^2}{2} & 0 \end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix} 0 & 2E \\ -\frac{E-A^2}{2} & 2 \end{bmatrix}.$$

因为秩$(E-A)+$秩$(E+A)=n$,所以$-\frac{E-A^2}{2}=0$,即 $A^2=E$.

注 由 2)知,对合矩阵的特征值为 1 或-1.

1078. 设 A 为 n 阶矩阵,A 的各行与各列只有一个非零元素且为 1 或-1,则 A 的特征值都是单位根.

证 由第 **82** 条知,存在正整数 k,使 $A^k=E$. 从而 A 的特征值都是 k 次单位根.

1079. 若 $A^m=E$,则 A 可逆,且 $A^{-1}=A^{m-1}$.

证 因为 $A^m=A\cdot A^{m-1}=E$,所以 A 可逆,且 $A^{-1}=A^{m-1}$.

1080. 若 A 是对合矩阵,则 A^* 也是对合矩阵.

证 由假设知 $A^2=E$ 得 $A=A^{-1}$,且

$|A|^2=1$,$A^*=|A|A^{-1}=|A|A$,所以$(A^*)^2=|A|^2A^2=E$.

1081. 设 A,B 是 n 阶对合矩阵,则

1) AB 是对合矩阵的充分必要条件为 $AB=BA$;

2) $A+B$ 为对合矩阵的充分必要条件为 $AB+BA=-E$.

证 1) 设 A,B,AB 均为对合矩阵,那么$(AB)^2=E$. 两边用 BA 右乘便有 $AB=BA$.

反之,若 A,B 为对合矩阵,且 $AB=BA$,则

$$(AB)^2=(BA)\cdot(AB)=BA^2B=BEB=B^2=E.$$

2) 若 $A,B,A+B$ 为对合矩阵,则

$$(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2=2E+AB+BA=E,$$

所以 $AB+BA=-E$.

反之,若 A,B 为对合矩阵,且 $AB+BA=-E$,则 $(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2=E-E+E=E$.

1082. 设 A 是 n 阶实对合矩阵,则 A 可表为两个实对称矩阵的乘积.

证　由第 1077 条知 A 的特征值只能是 1 和 -1. 设秩$(E+A)=r$,由第 1077 条知秩$(E-A)=n-r$. 那么属于特征值 1 的线性无关的实特征向量有 r 个,假定 $\zeta_1,\cdots,\zeta_r$ 是属于特征值 1 的 r 个线性无关的特征向量;属于特征值-1 的线性无关的实特征向量有 $n-r$ 个,假定 $\zeta_{r+1},\cdots,\zeta_n$ 是属于特征值-1 的 r 个线性无关的特征向量,令 $P_n=(\zeta_1,\cdots,\zeta_r,\zeta_{r+1},\cdots,\zeta_n)$,则 P 为 n 阶实可逆矩阵,且

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}E_r & 0\\ 0 & -E_{n-r}\end{bmatrix},$$

$$A=P\begin{bmatrix}E_r & 0\\ 0 & -E_{n-r}\end{bmatrix}P^{-1}=P\begin{bmatrix}E_r & 0\\ 0 & -E_{n-r}\end{bmatrix}P'(P^{-1})'P^{-1}=S_1\cdot S_2$$

其中

$$S_1=P\begin{bmatrix}E_r & 0\\ 0 & -E_{n-r}\end{bmatrix}P',\quad S_2=(P^{-1})'\cdot P^{-1}.$$

易知 S_1,S_2 都是实对称矩阵.

1083.　设 A 为数域 P 上 n 阶矩阵,则

$$A^2=E\Longleftrightarrow P^n=W_1\oplus W_2,$$

其中　$W_1=\{(E-A)x\mid x\in P^n\}, W_2=\{(E+A)x\mid x\in P^n\}$.

证　必要性　显然有 $W_1+W_2\subseteq P^n$. 其次 $\forall\ x\in P^n$,

$$x=(E-A)\frac{1}{2}x+(E+A)\frac{1}{2}x\in W_1+W_2,$$

故　$P^n\subseteq W_1+W_2$,所以 $P^n=W_1+W_2$. 又

$$\dim W_1+\dim W_2=\text{秩}(E-A)+\text{秩}(E+A)=n,$$

于是 $P^n=W_1\oplus W_2$.

充分性　$\forall\ x\in P^n$,因为 $P^n=W_1\oplus W_2$,$(E-A^2)x=(E+A)(E-A)x=(E-A)(E+A)x\in W_1\cap W_2$,

$\therefore$　$(E-A^2)x=0$. 由 x 的任意性得 $E-A^2=0$,即 $A^2=E$.

注　此时 W_1 与 W_2 不仅是直和,而且 $W_1\perp W_2$.

事实上，$\forall\ \zeta\in W_1$，$\forall\ \eta\in W_2$，则

$$\zeta=(E-A)x,\eta=(E+A)y,$$

$$\therefore\quad (\zeta,\eta)=\zeta'\cdot\eta=x'(E-A')(E+A')y=x'(E-(A')^2)y$$
$$=x'(E-(A^2)')y=x'(E-E)y=0.$$

六、　幂零矩阵

1084.　什么叫做幂零矩阵？

答　若存在自然数 m，使方阵 A 满足 $A^m=0$，则称 A 为幂零矩阵.

1085.　方阵 A 为幂零矩阵$\Longleftrightarrow$它的特征值全为 0.

证　必要性　设 $A^m=0$，λ 为 A 的任一特征值，α 为相应的一个特征向量，那么由 $A\alpha=\lambda\alpha$ 可得 $0=A^m\alpha=\lambda^m\alpha$. $\therefore\lambda^m=0$，即 $\lambda=0$.

充分性　由于 A 的特征值全是 0，故 $|\lambda E-A|=\lambda^n$. 再由哈密尔顿—凯莱定理得 $A^n=0$，即 A 为幂零矩阵.

1086.　A 为幂零矩阵的充要条件是存在可逆矩阵 T，使

$$T^{-1}AT=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&&\\&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&0\end{bmatrix}&&\\&\ddots&\\&&\begin{bmatrix}0&1&&\\&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&0\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

证　由第 **1085** 条与若当定理可得.

1087.　非零的幂零矩阵 A 不能相似于对角矩阵.

证　用反证法. 设 A 相似于对角矩阵，则由第 **1085** 条，此对角矩阵一定是零矩阵，从而 $A=0$. 矛盾.

1088. 设 $A^k=0$,则

1) $aE+A,aE-A$ 都可逆,其中 $a\neq 0$;

2) $(E-A)^{-1}=E+A+\cdots+A^{k-1}$.

证 1) 由第 **1085** 条知 A 的特征值为 0,从而当 $a\neq 0$ 时,

$$|aE+A|\neq 0, |aE-A|\neq 0.$$

故 $aE+A$ 与 $aE-A$ 可逆.

2) $(E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1})=E-A^k=E$.

1089. 设 n 阶实矩阵 A 的特征值全是实数,且 A 的所有 1 阶主子式之和与所有 2 阶主子式之和均为 0,则

1) A 为幂零矩阵;

2) A 的所有 k 阶主子式之和为 0 $(k=1,2,\cdots,n)$.

证 1) 考虑 A 的特征多项式

$$|\lambda E-A|=\lambda^n-a_1\lambda^{n-1}+a_2\lambda^{n-2}-\cdots+(-1)^n a_n,$$

其中 a_i 是 A 的所有 i 阶主子式之和. 设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的特征值,则由根和系数的关系得

$$a_1=\sum_{i=1}^n\lambda_i, a_2=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\lambda_i\lambda_j.$$

所以 $\sum\limits_{i=1}^n\lambda_i^2=\left(\sum\limits_{i=1}^n\lambda_i\right)^2-2\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}\lambda_i\lambda_j=a_1^2-2a_2=0$. 由 λ_i 全是实数知 $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$. 由第 **1085** 条,$A$ 为幂零矩阵.

2) $|\lambda E-A|=\lambda^n$, $\therefore a_1=a_2=\cdots=a_n=0$.

1090. n 阶矩阵 A 为幂零矩阵的充要条件是对任意自然数 k,有 $\mathrm{tr}A^k=0$.

证 必要性 设 λ 为 A 的特征值,则对自然数 k,A^k 的特征值为 λ^k. 由第 **1085** 条知 A^k 的特征值全为零,因此,$\mathrm{tr}A^k=0$.

充分性 设 A 的特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$,则 A^k 的特征值为 $\lambda_1^k,\cdots,\lambda_n^k$, $k=1,2,\cdots$. 故 $\mathrm{tr}A^k=\lambda_1^k+\cdots+\lambda_n^k$.

假定 A^k 的特征根中有不为零者,不妨设 $\lambda_1^k,\cdots,\lambda_r^k$ 为其中互

不相同者，则

$$\operatorname{tr}A^k=n_1\lambda_1^k+\cdots+n_t\lambda_t^k=0, k=1,2,\cdots$$

将上式看成关于 $n_1,\cdots,n_t$ 的齐次线性方程组，那么 $n_1=\cdots=n_t=0$，矛盾. 所以 A 的特征值全为 0. 由第 **1085** 条，A 是幂零矩阵.

1091. 若 A 为 n 阶幂零矩阵，则 A',kA,A^* 均为幂零矩阵.

证 若 A 为幂零矩阵，则 A 的特征值全为 0. 易证 A',kA 的特征值也全为 0，所以 A',kA 为幂零矩阵.

由 A 为幂零矩阵，则 $|A|=0$，从而秩 $A^*\leqslant 1$. 当秩 $A^*=0$ 时，$A^*=0$ 是幂零矩阵；当秩 $A^*=1$ 时，秩 $A=n-1$. 而 A 的特征值全为 0，于是存在 n 阶可逆矩阵 T，使

$$A=T^{-1}\begin{bmatrix}0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & 0\end{bmatrix}T.$$

故

$$A^*=T^*J_0^*(T^*)^{-1}.$$

由 J_0^* 的特征值全为 0 知 A^* 的特征值全为 0，所以 A^* 是幂零矩阵.

1092. 对 n 阶矩阵 A，如果使 $A^k=0$ 的最小正整数为 k，那么称 A 为 k 次幂零矩阵. 所有 n 阶 $n-1$ 次幂零矩阵彼此相似.

证 设 A 为 n 阶 $n-1$ 次幂零矩阵，则

$A^{n-1}=0$；$A^k\neq 0, k<n-1$. 所以 A 的最小多项式是 $d_n(\lambda)=\lambda^{n-1}$. 故 $\lambda E-A$ 的不变因子为

$$d_1(\lambda)=\cdots=d_{n-2}(\lambda)=1, d_{n-1}(\lambda)=\lambda, d_n(\lambda)=\lambda^{n-1}.$$

由 A 的任意性，所有 n 阶 $n-1$ 次幂零矩阵的特征矩阵的不变因子是一致的. 因而所有 n 阶 $n-1$ 次幂零矩阵彼此相似.

1093. 设 A 和 B 都是 n 阶矩阵，且 B 为幂零矩阵，又 $AB=BA$，则 $|A+B|=|A|$.

证 由 $AB=BA$ 及第 **938** 条知存在 n 阶可逆矩阵 P,使 $P^{-1}AP$ 与 $P^{-1}BP$ 同时为上三角矩阵. 因为 B 为幂零矩阵,所以 B 的 n 个特征值全为 0. 令

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{bmatrix},\quad P^{-1}BP=\begin{bmatrix}0 & & & * \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 0\end{bmatrix},$$

则

$$P^{-1}(A+B)P=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{bmatrix}.$$

于是 A 与 $A+B$ 有相同的特征值,所以 $|A+B|=|A|$.

七、 循环矩阵与反循环矩阵

1094. 什么叫做循环矩阵?什么叫做反循环矩阵?

答 形如

$$S=\begin{bmatrix}0 & E_{n-1} \\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

的 n 阶矩阵称为 n 阶基本循环矩阵,其中 E_{n-1} 为 $n-1$ 阶单位矩阵. 形如

$$\begin{bmatrix}a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0\end{bmatrix}$$

的 n 阶矩阵称为 n 阶循环矩阵. 形如

$$T=\begin{bmatrix}0 & E_{n-1} \\ -1 & 0\end{bmatrix}$$

的 n 阶矩阵称为 n 阶基本反循环矩阵. 形如

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ -a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_1 & -a_2 & \cdots & a_0 \end{bmatrix}$$

的 n 阶矩阵称为 n 阶反循环矩阵.

注 n 阶循环矩阵和 n 阶反循环矩阵都由第 1 行的元素完全确定. n 阶循环矩阵记为 $C_r[a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}]$, n 阶反循环矩阵记为 $C_r[a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}]_-$.

1095. n 阶基本循环矩阵 S 和 n 阶循环矩阵 $A=C_r[a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}]$ 有如下性质:

1) $$S^k=\begin{bmatrix} 0 & E_{n-k} \\ E_k & 0 \end{bmatrix} \ (k=1,2,\cdots,n-1),$$
$$S^n=E_n;$$

2) 设 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$, 则 $A=f(S)$.

证 令 $\varepsilon_i(i=1,2,\cdots,n)$ 表示第 i 个分量为 1, 其余分量均为 0 的 n 维单位列向量, 则

$$S=(\varepsilon_n,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{n-1}),$$

$$S\varepsilon_1=\varepsilon_n, S\varepsilon_k=\varepsilon_{k-1}, k=1,2,\cdots,n.$$

1) 用数学归纳法证明.

当 $k=1$ 时, 结论显然成立. 假定 $k-1$ 时结论成立, 即

$$S^{k-1}=\begin{bmatrix} 0 & E_{n-k+1} \\ E_{k-1} & 0 \end{bmatrix}=(\varepsilon_{n-k-2},\cdots,\varepsilon_n,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{n-k+1}).$$

则

$$\begin{aligned} S^k &= S\cdot S^{k-1}=S(\varepsilon_{n-k+2},\cdots,\varepsilon_n,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{n-k+1}) \\ &=(S\varepsilon_{n-k+2},\cdots,S\varepsilon_n,S\varepsilon_1,\cdots,S\varepsilon_{n-k+1}) \\ &=(\varepsilon_{n-k+1},\cdots,\varepsilon_{n-1},\varepsilon_n,\cdots,\varepsilon_{n-k}) \end{aligned}$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & E_{n-k} \\ E_k & 0 \end{bmatrix}, k=1,\cdots,n-1.$$

于是

$$S^n=SS^{n-1}=S\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ E_{n-1} & 0 \end{bmatrix}=S(\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n,\varepsilon_1)$$
$$=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_{n-1},\varepsilon_n)=E_n.$$

2）

$$A=a_0E_n+\begin{bmatrix} 0 & a_1E_{n-1} \\ a_1 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & a_2E_{n-2} \\ a_2E_2 & 0 \end{bmatrix}+\cdots+\begin{bmatrix} 0 & a_{n-1} \\ a_{n-1}E_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$
$$=a_0E_n+a_1S+a_2S^2+\cdots+a_{n-1}S^{n-1}$$
$$=f(S).$$

1096. 若 A,B 是 n 阶循环矩阵，则 $A+B,AB$ 都是 n 阶循环阵，且 $AB=BA$.

证　设 $A=C_r[a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}]$，$B=C_r[b_0,b_1,\cdots,b_{n-1}]$，则 $A+B$ 显然是 n 阶循环矩阵，且

$$A+B=C_r[a_0+b_0,a_1+b_1,\cdots,a_{n-1}+b_{n-1}].$$

由第 1095 条

$$A=a_0S^0+a_1S^1+\cdots+a_{n-1}S^{n-1}=f(S),$$
$$B=b_0S^0+b_1S^1+\cdots+b_{n-1}S^{n-1}=g(S).$$

注意到 $S^{n+k}=S^k$，k 为非负整数，易知 AB 仍为循环矩阵且 $AB=BA$.

1097. 若 A 是 n 阶循环矩阵，且 A 可逆，则 A^{-1}也是 n 阶循环矩阵.

证　设 $A=C_r[a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}]$，$X=C_r[x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}]$，则

$$A=a_0S^0+a_1S^1+\cdots+a_{n-1}S^{n-1},$$
$$X=x_0S^0+x_1S^1+\cdots+x_{n-1}S^{n-1}.$$

令

$$AX=(a_0x_0+a_{n-1}x_1+a_{n-2}x_2+\cdots+a_1x_{n-1})S^0$$

$$+(a_1x_0+a_0x_1+a_{n-1}x_2+\cdots+a_2x_{n-1})S^1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+(a_{n-1}x_0+a_{n-2}x_1+a_{n-3}x_2+\cdots+a_0x_{n-1})S^{n-1}$$

$$=E_n, \tag{1}$$

则

$$a_0x_0+a_{n-1}x_1+a_{n-2}x_2+\cdots+a_1x_{n-1}=1,$$
$$a_1x_0+a_0x_1+a_{n-1}x_2+\cdots+a_2x_{n-1}=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{n-1}x_0+a_{n-2}x_1+a_{n-3}x_2+\cdots+a_0x_{n-1}=0.$$

以上关于 $x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}$的线性方程组的系数矩阵是 A'，而由 A 可逆知$|A|=|A'|\neq0$，所以此线性方程组有唯一解. 从而使得(1)成立的 n 阶循环矩阵 X 存在，它是 A 的逆矩阵，也就是说 A^{-1}是循环矩阵.

1098. 1) 任一循环矩阵都可经同一个可逆矩阵将其相似地变成对角矩阵；

2) 若 $A=C_r[a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}]$，$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$，则 A 的全部特征值是 $f(\omega),f(\omega^2),\cdots,f(\omega^n)$，其中 $\omega=e^{i\frac{2\pi}{n}}$；

3) $|A|=f(\omega)\cdot f(\omega^2)\cdots f(\omega^n)$，其中 $\omega=e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

证 由 $\omega,\omega^2,\cdots,\omega^{n-1},1$ 是全部 n 次单位根知范德蒙矩阵

$$T=\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & \omega & \cdots & \omega^{n-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & \omega^{n-1} & \cdots & (\omega^{n-1})^{n-1}\end{bmatrix}$$

可逆. 经计算得

$$T^{-1}AT=\mathrm{diag}(f(1),f(\omega),\cdots,f(\omega^{n-1})),$$

所以 1)、2)、3)都成立.

1099. 任一 n 阶矩阵 A 可以对角化的充分必要条件是 A 与

某一个 n 阶循环矩阵相似.

证　必要性　设 n 阶矩阵 A 可以对角化,即存在可逆矩阵 P,使 $P^{-1}AP=\mathrm{diag}(\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1})$.

令　$f(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_{n-1}x^{n-1}$,　$\omega=e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

考虑以下关于 $b_0,b_1,\cdots,b_{n-1}$的线性方程组

$$f(\omega^k)=\lambda_k,\quad k=0,1,\cdots,n-1,$$

其系数矩阵是第 **1098** 条中的矩阵 T,且 $|T|\neq0$,因此存在唯一的 $b_0,b_1,\cdots,b_{n-1}$.

令 n 阶循环矩阵

$$B=\mathrm{C_r}[b_0,b_1,\cdots,b_{n-1}].$$

由第 **1098** 条知

$$\begin{aligned}T^{-1}BT&=\mathrm{diag}(f(\omega^0),f(\omega^1),\cdots,f(\omega^{n-1}))\\&=\mathrm{diag}(\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1})\\&=P^{-1}AP,\end{aligned}$$

即 A 与 n 阶循环矩阵 B 相似.

充分性　若 A 与某一个 n 阶循环矩阵 B 相似,而 B 与对角矩阵相似,由相似关系的传递性知 A 与对角矩阵相似.

1100.　n 阶基本反循环矩阵 T 和 n 阶反循环矩阵

$$A=\mathrm{C_r}[a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}]_-$$

有如下性质:

1) $T^k=\begin{bmatrix}0 & E_{n-k}\\ -E_k & 0\end{bmatrix},k=1,\cdots,n-1,T^n=-E_n$;

2) 设 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$,则 $A=f(T)$.

证　与第 **1095** 条的证法相似.

1101.　设 $A=\mathrm{C_r}[a_0,\cdots,a_{n-1}]_-$ 和 $B=\mathrm{C_r}[b_0,\cdots,b_{n-1}]_-$ 为两个 n 阶反循环矩阵,那么

1) $A+B$ 是反循环矩阵;

2) AB 是反循环矩阵,且 $AB=BA$;

3) kA 是反循环矩阵；

4) 存在范德蒙矩阵

$$W=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \varepsilon_0 & \varepsilon_1 & \cdots & \varepsilon_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varepsilon_0^{n-1} & \varepsilon_1^{n-1} & \cdots & \varepsilon_{n-1}^{n-1} \end{bmatrix}$$

使对任意的 A 有 $W^{-1}AW=\mathrm{diag}(f(\varepsilon_0),\cdots,f(\varepsilon_{n-1}))$，其中

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1},$$

$$\varepsilon_k=e^{i\frac{(2k+1)}{n}\pi},\quad k=0,1,2,\cdots,n-1;$$

5) $f(\varepsilon_0),\cdots,f(\varepsilon_{n-1})$为 A 的全部特征值；

6) $|A|=f(\varepsilon_0)f(\varepsilon_1)\cdots f(\varepsilon_{n-1})$.

证 证明方法与循环矩阵类似.

1102. 任一 n 阶矩阵 A 可以对角化的充要条件是 A 与某一个 n 阶反循环矩阵相似.

证 与第 **1099** 条的证明类似.

1103. 什么叫做 k 循环矩阵?

答 n 阶矩阵

$$S_k=\begin{bmatrix} 0 & E_{n-1} \\ k & 0 \end{bmatrix}$$

称为 n 阶基本 k 循环矩阵. n 阶矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ ka_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_1 & ka_2 & ka_3 & \cdots & a_0 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

称为 n 阶 k 循环矩阵.

注 ① 当 $k=1$ 时，A 为循环矩阵；当 $k=-1$ 时，A 为反循环矩阵.

② 由(1)式看出 k 循环矩阵由第一行元素 $a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}$ 及数 k 唯一确定，因此记为 $A=C_r[a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}]_k$.

1104. 设

$$S_k=\begin{bmatrix}0 & E_{n-1}\\ k & 0\end{bmatrix},$$

则

1) $S_k^m=\begin{bmatrix}0 & E_{n-m}\\ kE_m & 0\end{bmatrix},m=1,2,\cdots,n-1;$ (1)

2) $S_k^n=kE_n$.

证 由矩阵乘法易于验证.

1105. 设 $A=C_r[a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}]_k$，则 $A=f(S_k)$，其中 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$，$S_k=\begin{bmatrix}0 & E_{n-1}\\ k & 0\end{bmatrix}$.

证

$$A=\begin{bmatrix}a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1}\\ ka_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ ka_1 & ka_2 & ka_3 & \cdots & a_0\end{bmatrix}$$

$$=a_0E_n+a_1S_k+\cdots+a_{n-1}S_k^{n-1}=f(S_k).$$

1106. 设

$$S_k=\begin{bmatrix}0 & E_{n-1}\\ k & 0\end{bmatrix},$$

则存在范德蒙矩阵

$$W=\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ \omega_0 & \omega_1 & \cdots & \omega_{n-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \omega_0^{n-1} & \omega_1^{n-1} & \cdots & \omega_{n-1}^{n-1}\end{bmatrix}$$

使 $W^{-1}S_kW=\mathrm{diag}(\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_{n-1})$，其中 $\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_{n-1}$ 为 x^n-k

的全部根.

证 可验证 $S_kW=W\mathrm{diag}(\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_{n-1})$成立.

1107. 设 $A=C_r[a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}]_k$，$B=C_r[b_0,b_1,\cdots,b_{n-1}]_k$，$W$ 为第 **1106** 条中的范德蒙矩阵，那么

1) $A+B=C_r[a_0+b_0,a_1+b_1,\cdots,a_{n-1}+b_{n-1}]_k$；

2) AB 为 k 循环矩阵，且

$$AB=BA=f(S_k)\cdot g(S_k),$$

其中

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1},$$

$$g(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_{n-1}x^{n-1},$$

$$S_k=\begin{bmatrix}0 & E_{n-1}\\ k & 0\end{bmatrix};$$

3) $W^{-1}AW=\mathrm{diag}(f(\omega_0),f(\omega_1),\cdots,f(\omega_{n-1}))$，

其中 $\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_{n-1}$为 x^n-k 的全部根；

4) A 的特征值为 $f(\omega_0),f(\omega_1),\cdots,f(\omega_{n-1})$；

5) $|A|=f(\omega_0)f(\omega_1)\cdots f(\omega_{n-1})$；

6) 可逆的 k 循环矩阵仍为 k 循环矩阵；

7) lA 是 k 循环矩阵，其中 $l\in P$，P 是数域；

8) 所有数域 P 上的 k 循环矩阵的集合关于矩阵的加法与数乘构成数域 P 上的一个线性空间；

9) 8)中的集合关于矩阵的加法与乘法构成交换环.

证 与循环矩阵的有关结论的证明类似.

1108. 什么叫块循环矩阵？什么叫块反循环矩阵？什么叫块 k 循环矩阵？

答 设 $A_0,A_1,\cdots,A_{n-1}$都是 m 阶矩阵，则称

$$A=\begin{bmatrix}A_0 & A_1 & \cdots & A_{n-1}\\ A_{n-1} & A_0 & \cdots & A_{n-2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ A_1 & A_2 & \cdots & A_0\end{bmatrix}$$

为块循环矩阵；称

$$B=\begin{bmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_{n-1} \\ -A_{n-1} & A_0 & \cdots & A_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -A_1 & -A_2 & \cdots & A_0 \end{bmatrix}$$

为块反循环矩阵；称

$$C=\begin{bmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_{n-1} \\ kA_{n-1} & A_0 & \cdots & A_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ kA_1 & kA_2 & \cdots & A_0 \end{bmatrix}$$

为块 k 循环矩阵.

注　① 当 $k=1$ 时，块 k 循环矩阵 C 即为块循环矩阵 A；当 $k=-1$ 时，块 k 循环矩阵 C 即为块反循环矩阵 B.

② 块循环矩阵记为 $C_r[A_0,A_1,\cdots,A_{n-1}]$；块反循环矩阵记为 $C_r[A_0,A_1,\cdots,A_{n-1}]_-$；块 k 循环矩阵记为 $C_r[A_0,\cdots,A_{n-1}]_k$.

1109.　令

$$S_k=\begin{bmatrix} 0 & E_m & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & E_m \\ kE_m & 0 & \cdots\cdots & 0 \end{bmatrix}$$

为 mn 阶矩阵，则

1)　$$S_k^t=\begin{bmatrix} & & E_m & & \\ & & & \ddots & \\ kE_m & & & & E_m \\ & \ddots & & & \\ & & kE_m & & \end{bmatrix},t=1,2,\cdots,n-1;$$

2)　$S_k^n=kE_{mn}$.

证　直接用分块矩阵的乘法可以验证.

1110. A,B,C 为第 **1108** 条所设,S_1,S_{-1},S_k 为第 **1109** 条所设,令

$$F(x)=\begin{bmatrix}A_0 & & \\ & \ddots & \\ & & A_0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_1\end{bmatrix}X$$

$$+\cdots+\begin{bmatrix}A_{n-1} & & \\ & \ddots & \\ & & A_{n-1}\end{bmatrix}X^{n-1},$$

则 $A=F(S_1),B=F(S_{-1}),C=F(S_k)$.

证 以 A 为例证之,其它类似可证.

$$A=\begin{bmatrix}A_0 & A_1 & \cdots & A_{n-1}\\ A_{n-1} & A_0 & \cdots & A_{n-2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ A_1 & A_2 & \cdots & A_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_0 & & \\ & \ddots & \\ & & A_0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & A_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & A_1\\ A_1 & & & 0\end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix}0 & 0 & A_2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & A_2\\ A_2 & \cdots & \cdots & & 0\\ & A_2 & & & 0\end{bmatrix}+\cdots+\begin{bmatrix}0 & & & & A_{n-1}\\ A_{n-1} & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & A_{n-1} & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}A_0 & & \\ & \ddots & \\ & & A_0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_1\end{bmatrix}S_1+\cdots$$

$$+\begin{bmatrix}A_{n-1} & & \\ & \ddots & \\ & & A_{n-1}\end{bmatrix}S_1^{n-1}=F(S_1)$$

1111. A 为第 **1108** 条所设. 令范德蒙矩阵为

$$W=\begin{pmatrix} E_m & E_m & \cdots & E_m \\ \omega_0 E_m & \omega_1 E_m & \cdots & \omega_{n-1}E_m \\ \omega_0^2 E_m & \omega_1^2 E_m & \cdots & \omega_{n-1}^2 E_m \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \omega_0^{n-1}E_m & \omega_1^{n-1}E_m & \cdots & \omega_{n-1}^{n-1}E_m \end{pmatrix},$$

其中 $\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_{n-1}$ 为 x^n-1 的全部根，则

1) $$W^{-1}AW=\mathrm{diag}(f(\omega_0),f(\omega_1),\cdots,f(\omega_{n-1})),\quad (1)$$

其中 $f(x)=A_0+A_1x+\cdots+A_{n-1}x^{n-1}$；

2) $$|\lambda E_{mn}-A| =|\lambda E_m-f(\omega_0)|\cdot|\lambda E_m-f(\omega_1)|\cdots|\lambda E_m-f(\omega_{n-1})|;\quad (2)$$

3) $$|A|=|f(\omega_0)|\cdot|f(\omega_1)|\cdots|f(\omega_{n-1})|.\quad (3)$$

证 1) 由下式

$$AW=W\mathrm{diag}(f(\omega_0),f(\omega_1),\cdots,f(\omega_{n-1}))$$

即得(1)式.

2) 由(1)即知

$$|\lambda E_{mn}-A|=\begin{vmatrix} \lambda E_m-f(\omega_0) & & & \\ & \lambda E_m-f(\omega_1) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda E_m-f(\omega_{n-1}) \end{vmatrix}$$

$$=|\lambda E_m-f(\omega_0)|\cdot|\lambda E_m-f(\omega_1)|\cdots|\lambda E_m-f(\omega_{n-1})|.$$

3) 设 A 的 mn 个特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_{mn}$，则由(2)式知它们分别为 $|\lambda E_m-f(\omega_0)|$ 的根，且

$$|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{mn}=|f(\omega_0)|\cdot|f(\omega_1)|\cdots|f(\omega_{n-1})|.$$

1112. B 为第 **1108** 条所设，令范德蒙矩阵为

$$W_1=\begin{pmatrix} E_m & E_m & \cdots & E_m \\ \mu_0 E_m & \mu_1 E_m & \cdots & \mu_{n-1}E_m \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mu_0^{n-1}E_m & \mu_1^{n-1}E_m & \cdots & \mu_{n-1}^{n-1}E_m \end{pmatrix},$$

其中 $\mu_0,\mu_1,\cdots,\mu_{n-1}$ 为 x^n+1 的全部根，则

1) $W_1^{-1}BW_1=\mathrm{diag}(f(\mu_0),f(\mu_1),\cdots,f(\mu_{n-1}))$，其中

$$f(x)=A_0+A_1x+\cdots\cdots+A_{n-1}x^{n-1};$$

2) $|\lambda E_{mn}-B|$

$=|\lambda E_m-f(\mu_0)|\cdot|\lambda E_m-f(\mu_1)|\cdots|\lambda E_m-f(\mu_{n-1})|$;

3) $|B|=|f(\mu_0)|\cdot|f(\mu_1)|\cdots|f(\mu_{n-1})|$.

证 仿第 **1111** 条可证.

1113. C 为第 **1108** 条所设，令范德蒙矩阵为

$$W_2=\begin{bmatrix} E_m & E_m & \cdots & E_m \\ \delta_0E_m & \delta_1E_m & \cdots & \delta_{n-1}E_m \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta_0^{n-1}E_m & \delta_1^{n-1}E_m & \cdots & \delta_{n-1}^{n-1}E_m \end{bmatrix},$$

其中 $\delta_0,\delta_1,\cdots,\delta_{n-1}$ 为 x^n-k 的 n 个根，则

1) $W_2^{-1}CW_2=\mathrm{diag}(f(\delta_0),f(\delta_1),\cdots,f(\delta_{n-1}))$，其中

$$f(x)=A_0+A_1x+\cdots+A_{n-1}x^{n-1};$$

2) $|\lambda E_{mn}-C|$

$=|\lambda E_m-f(\delta_0)|\cdot|\lambda E_m-f(\delta_1)|\cdots|\lambda E_m-f(\delta_{n-1})|$;

3) $|C|=|f(\delta_0)|\cdot|f(\delta_1)|\cdots|f(\delta_{n-1})|$.

证 仿第 **1111** 条可证.

八、 正规矩阵

1114. 什么叫做共轭矩阵?

答 设 $A=(a_{ij})$ 为 $n\times m$ 矩阵，则称 $n\times m$ 矩阵 $(\bar{a}_{ij})$ 为 A 的共轭矩阵，其中 $\bar{a}_{ij}$ 为 a_{ij} 的共轭复数，A 的共轭矩阵记为 $\bar{A}$. 比如，设

$$A=\begin{bmatrix} 1+i & 0 & 3-2i \\ 5 & 4+i & i \end{bmatrix}, \text{则 } \bar{A}=\begin{bmatrix} 1-i & 0 & 3+2i \\ 5 & 4-i & -i \end{bmatrix}.$$

1115.　1) $(\overline{A})'=\overline{A'}$；　2) $\overline{A+B}=\overline{A}+\overline{B}$；

3) $\overline{kA}=\overline{k}\overline{A}$；　4) $\overline{AB}=\overline{A}\cdot\overline{B}$；

5) $\overline{|A|}=|\overline{A}|$，其中 A 为方阵；

6) $\overline{A^*}=(\overline{A})^*$，其中 A 为方阵；

7) $\overline{A^{-1}}=(\overline{A})^{-1}$，其中 A 可逆.

证　1)—4)容易验证. 下证 5)—7).

5) 设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶复矩阵，则

$$\overline{|A|}=\overline{\sum(-1)^{\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}}$$
$$=\sum(-1)^{\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)}\overline{a}_{1j_1}\overline{a}_{2j_2}\cdots\overline{a}_{nj_n}=|\overline{A}|.$$

6) 设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶复矩阵，a_{ij}的代数余子式记为 A_{ij}，余子式记为 M_{ij}，那么

$$\overline{A^*}=\begin{bmatrix}\overline{A}_{11} & \cdots & \overline{A}_{n1}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \overline{A}_{1n} & \cdots & \overline{A}_{nn}\end{bmatrix}.$$

而

$$\overline{A}_{ij}=\overline{(-1)^{i+j}M_{ij}}=(-1)^{i+j}\overline{M}_{ij}=B_{ij},$$

这里 B_{ij}为 $\overline{A}$ 的元素 $\overline{a}_{ij}$的代数余子式，所以$\overline{A^*}=\overline{A}^*$.

7) 由 $\overline{A}\,\overline{A^{-1}}=\overline{AA^{-1}}=\overline{E}=E$，得　$\overline{A^{-1}}=(\overline{A})^{-1}$.

1116.　什么叫做正规矩阵？

答　设 A 为复方阵，若 $A\overline{A'}=\overline{A'}A$，则称 A 为正规矩阵.

1117.　下面哪些矩阵是正规矩阵？

1) 对称矩阵，厄米特矩阵；

2) 对角矩阵；

3) 反对称矩阵，反厄米特矩阵；

4) 正交矩阵，酉矩阵；

5) 上(下)三角矩阵；

6) 循环矩阵.

答 1）实对称矩阵是正规矩阵，复对称矩阵不一定是正规矩阵；厄米特矩阵是正规矩阵.

2）对角矩阵是正规矩阵.

3）实反对称矩阵与反厄米特矩阵（即$\overline{A'}=-A$）都是正规矩阵.

4）正交矩阵与酉矩阵都是正规矩阵.

5）上（下）三角矩阵不一定是正规矩阵.

6）循环矩阵是正规矩阵. 事实上，设 $A=C_r[a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}]$，那么 $A'=C_r[a_0,a_{n-1},\cdots,a_2,a_1]$，$\overline{A'}=C_r[\bar{a}_0,\bar{a}_{n-1},\cdots,\bar{a}_2,\bar{a}_1]$. 由于循环矩阵相乘可交换，所以 $A\overline{A'}=\overline{A'}A$.

注 $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$也是正规矩阵.

1118. A 为正规矩阵的充要条件是 A 酉相似于对角矩阵.

证 充分性 设有酉矩阵 U，使$\overline{U'}AU=D$，其中 D 为对角矩阵，则 $A=UD\overline{U'}$. 于是

$$\begin{aligned}\overline{A'}A&=(U\overline{D'}\overline{U'})(UD\overline{U'})=U\overline{D'}D\overline{U'}=UD\overline{D'}\overline{U'}\\&=(UD\overline{U'})(U\overline{D}\overline{U'})=A\overline{A'},\end{aligned}$$

即 A 是正规矩阵.

必要性 由许尔定理，存在酉矩阵 U，使

$$\overline{U'}AU=\begin{bmatrix}\lambda_1 & c_{12} & \cdots & c_{1n}\\ & \lambda_2 & \cdots & c_{2n}\\ & & \ddots & \vdots\\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}.$$

因为 $A\overline{A'}=\overline{A'}A$，所以$(\overline{U'}AU)(\overline{U'}\overline{A'}U)=(\overline{U'}\overline{A'}U)(\overline{U'}AU)$. 由此可得

$$|\lambda_1|^2+|c_{12}|^2+\cdots+|c_{1n}|^2=|\lambda_1|^2,$$

$$|c_{12}|^2+|c_{13}|^2+\cdots+|c_{1n}|^2=0.$$

于是 $c_{12}=c_{13}=\cdots=c_{1n}=0$. 类似地，可得 $c_{23}=\cdots=c_{2n}=\cdots=c_{n-1,n}=0$. 因而 A 酉相似于对角矩阵.

1119. 设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 为 n 阶复矩阵 $A=(a_{ij})$ 的特征值，则 A 为复正规矩阵的充要条件是：

$$\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2=\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2.$$

证 必要性 设 A 为 n 阶复正规矩阵，即 $A\overline{A'}=\overline{A'}A$，则由第 **1118** 条知

$$U^{-1}A\overline{A'}U=\mathrm{diag}(|\lambda_1|^2,|\lambda_2|^2,\cdots,|\lambda_n|^2).$$

所以

$$\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2=\mathrm{tr}(A\overline{A'})=\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2.$$

充分性 由许尔定理，存在 n 阶酉矩阵 U，使

$$\overline{U'}AU=\begin{pmatrix}\lambda_1 & c_{12} & \cdots & c_{1n}\\ & \lambda_2 & \cdots & c_{2n}\\ & & \ddots & \vdots\\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

从而

$$\overline{U'}A\overline{A'}U=(\overline{U'}AU)(\overline{U'}\overline{A'}U)$$

$$=\begin{pmatrix}|\lambda_1|^2+\sum_{j=2}^{n}|c_{1j}|^2 & & & \\ & |\lambda_2|^2+\sum_{j=3}^{n}|c_{2j}|^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & |\lambda_{n-1}|^2+|c_{n-1,n}|^2 & \\ & & & & |\lambda_n|^2\end{pmatrix}.$$

所以

$$\operatorname{tr}(A\overline{A'})=\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|c_{ij}|^2=\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2.$$

于是 $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}|c_{ij}|^2=0$. 那么 $c_{ij}=0,i<j$,即 A 酉相似于对角矩阵. 由第 **1118** 条知,A 为复正规矩阵.

1120. 设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ 为 n 阶实正规矩阵 A 的实特征值,$a_k\pm b_ki$ $(b_k\neq 0)$为 A 的复特征值,$k=1,\cdots,s$,$r+2s=n$,则一定存在正交矩阵 Q,使

$$Q'AQ=\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_r,A_1,\cdots,A_s),$$

其中

$$A_k=\begin{bmatrix} a_k & b_k \\ -b_k & a_k\end{bmatrix},k=1,\cdots,s.$$

证 若 μ 是 A 的非实复特征值,ζ 是属于 μ 的一个特征向量,则

$$A\zeta=\mu\zeta,A\overline{\zeta}=\overline{\mu}\overline{\zeta},且\ \zeta\neq\overline{\zeta}.$$

所以 $\overline{\zeta}$ 是 A 属于 $\overline{\mu}$ 的一个特征向量. 因为 A 为正规矩阵,所以由第 **1118** 条知 A 酉相似于对角矩阵. 设

$$U=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\overline{\beta_1},\cdots,\beta_s,\overline{\beta_s}),$$

则

$$U^{-1}AU=\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_r,\mu_1,\overline{\mu}_1,\cdots,\mu_s,\overline{\mu}_s).$$

令

$$\gamma_1=\frac{\beta_1+\overline{\beta}_1}{\sqrt{2}},\gamma_2=\frac{\beta_1-\overline{\beta}_1}{\sqrt{2}i},$$

则 γ_1,γ_2 是实向量,且

$$A\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(A\beta_1+A\overline{\beta}_1)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\mu_1\beta_1+\overline{\mu}_1\overline{\beta}_1)$$
$$=a_1\gamma_1-b_1\gamma_2,$$
$$A\gamma_2=b_1\gamma_1+a_1\gamma_2.$$

由 U 是酉矩阵得 $\gamma'\gamma=1,\gamma_2{}'\gamma_2=1,\gamma_1{}'\alpha_i=0(i=1,\cdots,r),\overline{\beta_j}'\gamma_1=0$

$(j=2,\cdots,s)$.

用上述同样方法作 $r_3,r_4,\cdots,r_{2s-1},r_{2s}$. 那么

$$Q=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r,r_1,r_2,\cdots,r_{2s-1},r_{2s})\text{是正交矩阵,且}$$

$$Q^{-1}AQ=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_r,A_1,\cdots,A_s),$$

其中 $A_k=\begin{bmatrix} a_k & b_k \\ -b_k & a_k \end{bmatrix},k=1,\cdots,s.$

1121. 相似的实正规矩阵必正交相似.

证 若两个 n 阶实正规矩阵 A,B 相似,那么 A,B 有相同的特征值,由第 **1119** 条,存在正交矩阵 Q_1,Q_2,使 $Q_1^{-1}AQ_1=Q_2^{-1}BQ_2$,所以

$$A=(Q_1Q_2^{-1})B(Q_2Q_1^{-1})=(Q_2Q_1^{-1})^{-1}B(Q_2Q_1^{-1}).$$

因为 $Q_2Q_1^{-1}$是正交矩阵,所以 A,B 正交相似.

1122. 若 A 既是正规矩阵又是幂零矩阵,则 $A=0$.

证 由第 **1085** 条及第 **1118** 条即得.

九、 酉矩阵

1123. 什么叫做酉矩阵?

答 设 A 为 n 阶复方阵,如果 $A\overline{A'}=E$,那么称 A 为酉矩阵.

1124. 设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶复矩阵,则下面几条等价:

1) A 为酉矩阵;

2) $A^{-1}=\overline{A'}$;

3) $\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}\bar{a}_{jk}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j;\end{cases}$ $\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ki}\bar{a}_{kj}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j;\end{cases}$

4) 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$,$A=(\beta_1,\cdots,\beta_n)'$则

$$(\alpha_i,\alpha_j)=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j;\end{cases}$$

$$(\beta_i,\beta_j)=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

5) A' 为酉矩阵；

6) A^{-1} 为酉矩阵；

7) A^* 为酉矩阵；

8) $\overline{A}$ 为酉矩阵.

证　1)与 4)互相等价是显然的.

1)⇒5)　因为 A 为酉矩阵，则 4)成立，从而 A' 为酉矩阵.

5)⇒1)　由 A' 为酉矩阵，从而 $(A')'$ 为酉矩阵，而 $(A')'=A$.

1)⇒6)　$A^{-1}\cdot\overline{(A^{-1})'}=A^{-1}(\overline{A'})^{-1}=(\overline{A'}A)^{-1}=E^{-1}=E$.

6)⇒1)　由 A^{-1} 为酉矩阵知 $(A^{-1})^{-1}=A$ 为酉矩阵.

1)⇒7)　$A^*\overline{(A^*)'}=A^*(\overline{A}')^*=(\overline{A}'A)^*=E^*=E$.

7)⇒1)　由 $A^*\overline{(A^*)'}=E$，得

$$E=E^*=(A^*\overline{(A^*)'})^*=|A|^{n-2}A\cdot|\overline{A'}|^{n-2}\cdot\overline{A'}=A\overline{A'}.$$

1)⇒8)　$\overline{A}\cdot\overline{(\overline{A}')}=\overline{A\cdot\overline{A'}}=\overline{E}=E$.

8)⇒1)　由 A 为酉矩阵知 $\overline{\overline{A}}=A$ 为酉矩阵.

1125.　设 A,B 是酉矩阵，那么

1) AB 是酉矩阵；

2) $-kA$ 是酉矩阵，$|k|=1$；

3) $|A|$的模等于 1.

证　1) $(AB)\overline{(AB)'}=AB\,\overline{B'}\,\overline{A'}=E$.

2) $(-kA)\overline{(-kA)'}=(k\bar{k})A\overline{A'}=E$.

3) $A\overline{A'}=E$，两边取行列式，得 $|A|\cdot|\overline{A'}|=|A|\cdot\overline{|A|}=1$，即$|A|$的模等于 1.

1126.　酉矩阵的特征根的模为 1.

证　设 λ 是酉矩阵 A 的特征根，α 是属于 λ 的一个特征向量，那么 $A\alpha=\lambda\alpha$. 从而 $\overline{\alpha'}\,\overline{A'}=\bar{\lambda}\,\overline{\alpha'}$，$\overline{\alpha'}\,\overline{A'}A\alpha=\bar{\lambda}\lambda\,\overline{\alpha'}\alpha$，$\overline{\alpha'}\alpha=|\lambda|^2\,\overline{\alpha'}\alpha$.
但　$\overline{\alpha'}\alpha\neq0$，所以　$|\lambda|^2=1$，　$|\lambda|=1$.

1127.　设

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

为上三角矩阵，问 A 的元素满足什么条件时能成为酉矩阵？

答 由第 **1124** 条的 3)可知，$a_{ij}=0(i<j)$，$|a_{ii}|=1$，此即为所求 A 为酉矩阵的条件.

1128. 设 A 是一个 n 阶可逆复矩阵，则 $A=UT$，其中 U 是酉矩阵，T 是一个主对角元为正实数的上三角矩阵，并且这个分解是唯一的.

证 设 $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，其中 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为 A 的列向量，则由 A 可逆知 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性无关. 由施密特正交化方法，令

$$\begin{cases} \beta_1=\alpha_1, \\ \beta_2=\alpha_2-\dfrac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1, \\ \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \\ \beta_n=\alpha_n-\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}\dfrac{(\alpha_n,\beta_i)}{(\beta_i,\beta_i)}\beta_i, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $(\alpha,\beta)=\alpha'\overline{\beta}$.

再将 β_i 单位化，令

$$\gamma_i=\frac{1}{|\beta_i|}\beta_i, i=1,2,\cdots,n, \tag{2}$$

则 $\gamma_1,\cdots,\gamma_n$ 为标准正交基，从而 $U=(\gamma_1,\cdots,\gamma_n)$ 为酉矩阵. 从(1)、(2)解出 α_i，得

$$A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\gamma_1,\cdots,\gamma_n)\begin{bmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & t_{nn} \end{bmatrix}=UT,$$

其中 $T=\begin{bmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & t_{nn} \end{bmatrix}$ 为上三角矩阵，且 $t_{ii}=|\beta_i|>0$ 为正实数.

再证唯一性. 设还有酉矩阵 U_1 及主对角线元为正实数的上三角矩阵 T_1，也使 $A=U_1T_1$.

下证 $U=U_1, T=T_1$.

令 $B=U^{-1}U_1$，则 $B=U^{-1}U_1=TT_1^{-1}$. 那么 B 既是酉矩阵，又是上三角矩阵. 由第 **1127** 条知 B 为对角矩阵. 但 T 与 T_1^{-1} 的主对角线元为正实数，从而

$$B=\text{diag}(b_1,\cdots,b_n), b_i>0, i=1,\cdots,n.$$

再由 B 是酉矩阵得 $B=E$. 所以 $E=U^{-1}U_1=TT_1^{-1}, U=U_1, T=T_1$.

1129. 设 A 为 n 阶矩阵，则 A 为酉矩阵$\Longleftrightarrow$存在酉矩阵 T，使 $T^{-1}AT=\text{diag}(e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n})$，其中 θ_k 为实数，$k=1,2,\cdots,n$.

证 充分性 设 $T^{-1}AT=\text{diag}(e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n})$，则 $T^{-1}AT=\overline{T'}AT$. 从而

$$\begin{aligned}(\overline{T'}AT)\overline{(\overline{T'}AT)'}&=\overline{T'}A\overline{A'}T\\&=\text{diag}(e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n})\cdot\text{diag}(e^{-i\theta_1},\cdots,e^{-i\theta_n})=E,\end{aligned}$$

所以 $A\overline{A'}=E$，即 A 为酉矩阵.

必要性 A 为酉矩阵，从而为正规矩阵，故由第 **1118** 条知存在酉矩阵 T 使

$$T^{-1}AT=\text{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n),$$

其中 λ_i 为 A 的特征值. 再由第 **1126** 条知 $|\lambda_k|=1$，故设

$$\lambda_k=\cos\theta_k+i\sin\theta_k=e^{i\theta_k},$$

其中 θ_k 为实数，$k=1,2,\cdots,n$.

1130. 设 V 为 n 维酉空间，内积定义为

$$(\alpha,\beta)=a_1\overline{b_1}+\cdots+a_n\overline{b_n}=\alpha'\overline{\beta}, \tag{1}$$

其中 $\alpha'=(a_1,\cdots a_n)$，$\beta'=(b_1,\cdots,b_n)$，a_k, b_k 为复数，$k=1,2,\cdots,n$.

再设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 和 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 为 V 的两组基，且

$$(\beta_1,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)A, \tag{2}$$

则下面三条中有两条成立时，另一条也必然成立：

1）$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为标准正交基；

2）$\beta_1,\cdots,\beta_n$ 为标准正交基；

3）A 为酉矩阵.

证　1)、2)⇒3).　设 $A=(a_{ij})$，则由(1)、(2)可知

$$(\beta_i,\beta_j)=a_{1i}\bar{a}_{1j}+a_{2i}\bar{a}_{2j}+\cdots+a_{ni}\bar{a}_{nj}. \tag{3}$$

但 $(\beta_i,\beta_j)=\delta_{ij}$，由 i,j 的任意性，以及(3)式可得 $\overline{A'}A=E$.

1)、3)⇒2).　因为 A 为酉矩阵，所以

$$a_{1i}\bar{a}_{1j}+a_{2i}\bar{a}_{2j}+\cdots+a_{ni}\bar{a}_{nj}=\delta_{ij}.$$

由 i,j 的任意性及(3)式可证 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 为标准正交基.

2)、3)⇒1).　由(2)式得

$$(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\beta_1,\cdots,\beta_n)A^{-1}.$$

因为 A 是酉矩阵，所以 A^{-1} 是酉矩阵，由上一段证明可知 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为标准正交基.

1131.　设 B,C 分别为 $m\times m$ 与 $n\times n$ 方阵，$D=\begin{bmatrix}B & A\\ 0 & C\end{bmatrix}$，则 D 为酉矩阵的充要条件是 $A=0$ 且 B,C 都是酉矩阵.

证　充分性显然，下证必要性.

$$E=\overline{D'}D=\begin{bmatrix}\overline{B'} & 0\\ \overline{A'} & \overline{C'}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B & A\\ 0 & C\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\overline{B'}B & \overline{B'}A\\ \overline{A'}B & \overline{A'}A+\overline{C'}C\end{bmatrix}.$$

由上式得 $\overline{B'}B=E,\overline{A'}B=0,\overline{B'}A=0,\overline{A'}A+\overline{C'}C=E$. 故 B 是酉矩阵. 由 B 可逆及 $\overline{B'}A=0$ 得 $A=0$，所以 $E=\overline{A'}A+\overline{C'}C=\overline{C'}C$，即 C 为酉矩阵.

十、　正交矩阵

1132.　什么叫做正交矩阵?

答　若实方阵 A 满足 $A'A=E$，则称 A 为正交矩阵.

注　正交矩阵一定是酉矩阵.

1133.　设 $A=(a_{ij})=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 为 n 阶实矩阵，其中 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为 A 的列向量，则下面几条等价：

1) A 为正交矩阵；

2) $A^{-1}=A'$；

3) $\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{jk}=\delta_{ij}$, i、$j=1,\cdots,n$；

$\sum_{k=1}^{n}a_{ki}a_{kj}=\delta_{ij}$, i、$j=1,\cdots,n$；

4) $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为欧氏空间的一组标准正交基；

5) A' 为正交矩阵；

6) A^{-1} 为正交矩阵；

7) $-A$ 为正交矩阵；

8) A^* 为正交矩阵.

证　类似于第 **1124** 条可证.

1134.　设 A 是正交矩阵，则

1) A 的特征值的模为 1；

2) 当 A 有实特征值时，A 的特征值只能是 1 或 -1；

3) $|A|=1$ 或 -1.

证　把 A 看成酉矩阵，由第 **1125** 条与第 **1126** 条可得.

1135.　设 A 为 n 阶实矩阵，则 A 为正交矩阵$\Longleftrightarrow$存在正交矩阵 T，使

$$T'AT=T^{-1}AT=\begin{bmatrix}E_s & & \\ & -E_t & \\ & & B\end{bmatrix},\tag{1}$$

其中

$$B=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta_1 & \sin\theta_1\\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{bmatrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{bmatrix}\cos\theta_k & \sin\theta_k\\ -\sin\theta_k & \cos\theta_k\end{bmatrix}\end{bmatrix},$$

且 $s+t+2k=n$，θ_j 为实数（$j=1,\cdots,k$）.

证　充分性　因为 $T'A'AT=(T'AT)'(TAT)$

$$=\begin{bmatrix}E_s & & \\ & -E_t & \\ & & B'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_s & & \\ & -E_t & \\ & & B\end{bmatrix}=E,$$

所以　$A'A=E$.

必要性　设 A 是正交矩阵，则 A 的特征值只能是 1，-1 或形如 $\cos\theta_j+i\sin\theta_j$ 的数. 从而由第 **1120** 条可得(1)式.

1136.　设 A 为 n 阶正交矩阵，则

1) 当 $|A|=-1$ 时，-1 是 A 的特征值；

2) 当 $|A|=1$ 且 n 为奇数时，1 是 A 的特征值.

证 1　由于 A 的特征值只能是 1，-1 或 $\cos\theta+i\sin\theta$（$\theta\neq k\pi$），且 A 的复特征值成对出现，因此可设 A 有 $2s$ 个复特征值，r 个特征值 1，m 个特征值 -1，这里 $2s+r+m=n$.

1) 用反证法. 设 $m=0$，则 $n=2s+r$. 那么 A 的特征值为

$$\cos\theta_1\pm i\sin\theta_1,\cdots,\cos\theta_s\pm i\sin\theta_s,1,\cdots,1.$$

从而它们之积等于 1，这与 $|A|=-1$ 矛盾. 即得 $m>0$，所以 -1 为 A 的特征值.

2) 用反证法. 若 $r=0$，则 $n=2s+m$. 由 n 为奇数得 m 为奇数. 从而 A 的所有特征值之积等于 -1，这与 $|A|=1$ 矛盾，即得 $r>0$. 所以 1 为 A 的特征值.

证 2　1) 当 $|A|=-1$ 时，设 A 的特征多项式为 $f(\lambda)=|\lambda E-A|$，因为

$$f(-1)=|-E-A|=(-1)^n|E+A|$$
$$=(-1)^n|A'A+A|=(-1)^n|A'+E|\cdot|A|$$
$$=(-1)^{n+1}|E+A|=-f(-1),$$

所以 $2f(-1)=0$，故 $f(-1)=0$，即 -1 是 A 的特征值.

2) 当 $|A|=1$，n 为奇数时，

$$f(1)=|E-A|=|A'A-A|=|A'-E|\cdot|A|$$
$$=(-1)^n|E-A|=-f(1).$$

所以 $2f(1)=0$，故 $f(1)=0$，即 1 是 A 的特征值.

1137. 设 A,B 是两个 n 阶正交矩阵，则

1) AB 是正交矩阵；

2) 当 $|A|+|B|=0$ 时，$|A+B|=0$；

3) 当 n 为奇数时，$|(A-B)(A+B)|=0$.

证 1) 由 $(AB)'(AB)=B'(A'A)B=E$ 可知 AB 是正交矩阵.

2) 由 $|A|=-|B|$ 得 $|AB^{-1}|=|A|\cdot|B|^{-1}=-1$. 而 AB^{-1} 是正交矩阵，故由第 **1136** 条知 -1 是 AB^{-1} 的一个特征值. 于是 $0=|-E-AB^{-1}|=|-B-A|\cdot|B^{-1}|=(-1)^n|A+B|\cdot|B^{-1}|$. 所以 $|A+B|=0$.

3) $|(A-B)(A+B)|=|A-B|\cdot|A+B|$
$$=|A'-B'|\cdot|A+B|=|(A'-B')(A+B)|$$
$$=|A'B-B'A|.$$

另一方面，

$$|(A-B)(A+B)|=|A+B|\cdot|A-B|$$
$$=|A'+B'|\cdot|A-B|=|(A'+B')(A-B)|$$
$$=|B'A-A'B|.$$

于是

$$|(A-B)(A+B)|=(-1)^n|(A-B)(A+B)|.$$

而 n 是奇数，所以

$$|(A-B)(A+B)|=0.$$

1138. 设 A 为正交矩阵，则 $A'=A \Longleftrightarrow A$ 的特征值均为 1 或 -1.

证 必要性 设 A 为对称的正交矩阵，则 A 为实对称矩阵. 设 λ 是 A 的任一特征值，则 λ 是实数. 又因为正交矩阵的特征值的模为 1，所以 $\lambda=1$ 或 -1.

充分性 由第 **1135** 条知存在正交矩阵 T，使

$T'AT=\begin{bmatrix} E_s & \\ & -E_t \end{bmatrix}$. 所以 $A'=A$.

1139. 设 B 为正交矩阵，$A=\mathrm{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，则 BA 的特征值 λ 适合：$m\leqslant|\lambda|\leqslant M$，其中 $m=\min\{|a_i|\}$，$M=\max\{|a_i|\}$.

证 设 λ 是 BA 的特征值，α 是 BA 的属于 λ 的一个特征向量，那么

$$(BA)\alpha=\lambda\alpha,\quad \alpha\neq 0.$$

两边取共轭转置，有

$$\overline{\alpha'}\ \overline{A'}\ \overline{B'}=\bar{\lambda}\,\overline{\alpha'}.$$

两式相乘，注意到 $B'B=E$，$A'=A$，有

$$\overline{\alpha'}\bar{A}A\alpha=\bar{\lambda}\lambda\,\overline{\alpha'}\alpha=|\lambda|^2\,\overline{\alpha'}\alpha.$$

设 $\alpha=(x_1,\cdots,x_n)'$，那么

$$|a_1|^2\cdot|x_1|^2+\cdots+|a_n|^2\cdot|x_n|^2$$
$$=|\lambda|^2(|x_1|^2+\cdots+|x_n|^2)\geqslant m^2(|x_1|^2+\cdots+|x_n|^2).$$

所以 $|\lambda|^2\geqslant m^2$，于是 $|\lambda|\geqslant m$.

同样可得 $|\lambda|\leqslant M$.

1140. 正交矩阵的任一子方阵的特征值的模不大于 1.

证 设 A 是 n 阶正交矩阵，且

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix},$$

其中 A_1 是 r 阶子矩阵. 先证子方阵位于左上角的情形，这时 A_1 特

征值的模$\leqslant 1$.

令

$$B=\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

则

$$AB=\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_3 & 0 \end{bmatrix}.$$

易知 A_1 的特征值都是 AB 的特征值. 设 λ 是 AB 的任一特征值，那么由第 **1139** 条有

$$0\leqslant|\lambda|\leqslant 1.$$

所以 A_1 的特征值的模不大于 1.

再证子方阵不位于左上角的情形. 若 A 的子方阵 A_1 不位于 A 的左上角，则通过交换行、列，可以使 A_1 位于左上角，即存在正交矩阵 P,Q，使

$$PAQ=\begin{bmatrix} A_1 & * \\ * & * \end{bmatrix}=C.$$

由 P,A,Q 均正交知 C 是正交矩阵. 这就转化为前述已证情形了.

1141. 设 λ 是 n 阶正交矩阵 A 的特征值，ζ 是 A 属于 λ 的一个特征向量，则

1) 当 $\lambda=a+bi$，其中 a,b 是实数，$b\neq 0$，$\zeta=\alpha+i\beta$，α,β 是实向量时，$\beta\neq 0$.

2) α 与 β 长度相等且彼此正交.

证 1) 假设 $\beta=0$，则由 $A\zeta=\lambda\zeta$ 得

$$A\alpha=a\alpha+i(b\alpha).$$

由 $b\neq 0$，$\alpha\neq 0$，a、b 是实数，α 是实向量，A 是实矩阵知上式左端为实向量，右端为复向量，矛盾.

2) 证明：由 $A\zeta=\lambda\zeta$，得

$$A\alpha=a\alpha-b\beta;\ A\beta=a\beta+b\alpha.$$

左乘 A' 有

$$\alpha=aA'\alpha-bA'\beta,\beta=aA'\beta+bA'\alpha.$$

由以上两式可知

$$a\alpha=a^2A'\alpha-abA'\beta,b\beta=abA'\beta+b^2A'\alpha.$$

两式相加，由 $a^2+b^2=1$ 得 $a\alpha+b\beta=A'\alpha$，转置得 $a\alpha'+b\beta'=\alpha'A$.
那么

$$a\alpha'\alpha+b\beta'\alpha=\alpha'A\alpha=\alpha'(a\alpha-b\beta)=a\alpha'\alpha-b\alpha'\beta.$$

由 $\alpha'\beta=\beta'\alpha$ 得 $\alpha'\beta=0$. 即 α 与 β 正交.

另外，因为

$$a\alpha'\beta+b\beta'\beta=\alpha'A\beta=\alpha'(a\beta+b\alpha)=a\alpha'\beta+b\alpha'\alpha,\text{所以 }\alpha'\alpha=\beta'\beta.$$

1142. 上三角的正交矩阵必为对角矩阵，且对角线元素为 1 或 -1.

证 仿第 **1127** 条可证.

1143. 设 A 为 n 阶实可逆矩阵，则 A 可以分解成 $A=QT$，其中 Q 为正交矩阵，T 为主对角线上元素都是正数的实上三角矩阵，并且这种分解是唯一的.

证 仿第 **1128** 条可证.

1144. 设 $\cos\dfrac{\theta}{2}\neq0$,

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}.$$

1) 求 $-A$ 的所有特征值；

2) $E+A$ 可逆；

3) $(E-A)(E+A)^{-1}=\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{bmatrix}$.

解 1) 不难求出 $-A$ 的三个特征值为

$$\lambda_1=-1,\lambda_2=\cos\theta+i\sin\theta,\lambda_3=\cos\theta-i\sin\theta.$$

2) 令 $-A$ 的特征多项式为 $f(\lambda)=|\lambda E+A|$. 由 1) 知 1 不是 $-A$ 的特征值. 所以　$f(1)=|E+A|\neq 0$, 即 $E+A$ 可逆.

3) 因为 $\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}(E+A)=E-A$.

1145.　设 A 为 3 阶正交矩阵, $|A|=1$, 则 A 的特征多项式为

$$f(\lambda)=\lambda^3-t\lambda^2+t\lambda-1, \tag{1}$$

其中 $-1\leqslant t\leqslant 3$.

证　由第 **1136** 条知 A 有特征值 $1,\lambda_1,\lambda_2$, 且 $|\lambda_1|=|\lambda_2|=1$. 于是特征多项式 $f_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)$. 故 $t=1+\lambda_1+\lambda_2$. 由 $|\lambda_1+\lambda_2|\leqslant|\lambda_1|+|\lambda_2|=2$ 得 $-2\leqslant\lambda_1+\lambda_2\leqslant 2$ 故 $-1\leqslant 1+\lambda_1+\lambda_2\leqslant 3$.

1146.　正交矩阵的任意一行(或列)乘以 -1 仍为正交矩阵.

证　由第 **1133** 条 3) 可证.

1147.　设 U 为正交矩阵, 那么

1) A 为对称矩阵 $\Longleftrightarrow U^{-1}AU$ 为对称矩阵;

2) A 为反对称矩阵 $\Longleftrightarrow U^{-1}AU$ 为反对称矩阵.

证　只证 1), 类似可证 2).

$$A'=A\Longleftrightarrow U'A'U=U'AU\Longleftrightarrow (U'AU)'=U'AU\Longleftrightarrow (U^{-1}AU)'=U^{-1}AU.$$

1148.　写出二阶正交矩阵 A 的一切可能形式.

解　设　$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$, 则

$$a^2+c^2=a^2+b^2=b^2+d^2=c^2+d^2=1,$$

$$ac+bd=ab+cd=0.$$

令 $a=\cos\theta$, 则 $c=\pm\sin\theta$. 当 $c=-\sin\theta$ 时, $c=\sin(-\theta)$, $a=\cos\theta=\cos(-\theta)$. 故总可令 $a=\cos\theta$, $c=\sin\theta$, 其中 θ 为实数.

由 $a^2+b^2=1$ 知 $b=\pm\sin\theta$. 由 $c^2+d^2=1$ 知 $d^2=\pm\cos\theta$. 但 0

$=ac+bd=\sin\theta\cdot\cos\theta+bd$,故

$$A=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix} \text{或} A=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{bmatrix}.$$

1149. 设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶正交矩阵,那么

1) 当 $|A|=1$ 时,$a_{ij}=A_{ij}$;

2) 当 $|A|=-1$ 时,$a_{ij}=-A_{ij}$.

其中 A_{ij} 为 $|A|$ 中 a_{ij} 的代数余子式.

证 因为 A 为正交矩阵,所以 $A'=A^{-1}$. 故

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}=A'=A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{bmatrix}. \tag{1}$$

1) 当 $|A|=1$ 时,由(1)式得 $a_{ij}=A_{ij}$.

2) 当 $|A|=-1$ 时,由(1)式得 $a_{ij}=-A_{ij}$.

1150. 设 A 为 n 阶实矩阵,则存在正交矩阵 T 使 $T^{-1}AT$ 为三角矩阵的充要条件是 A 的特征多项式的根全是实的.

证 必要性是显然的,下证充分性. 设 A 的若当形矩阵为 $J=\mathrm{diag}(J_1,\cdots,J_s)$,其中

$$J_i=\begin{bmatrix}\lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & \lambda_i\end{bmatrix}_{n_i\times n_i},\ \lambda_i \text{ 为实数}, i=1,\cdots,s,$$

那么存在可逆实矩阵 P,使 $P^{-1}AP=J$,J 为上三角实矩阵.

再由第 1143 条,$P=TM$,其中 T 为正交矩阵,M 为可逆实三角矩阵,所以

$$T^{-1}AT=MJM^{-1}.$$

由于 MJM^{-1} 仍为上三角矩阵,因此 $T^{-1}AT$ 为上三角矩阵.

1151. 设 A,B 都是实对称矩阵，则存在正交矩阵 T 使 $T^{-1}AT=B$ 的充要条件是 A,B 的特征多项式的根全部相同.

证 必要性显然，下证充分性. 设 A,B 的特征根均为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，则存在正交矩阵 M,S，使 $M^{-1}AM=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=S^{-1}BS$. 令 $T=MS^{-1}$，则 $T^{-1}AT=B$.

1152. 1) 设 A 是实对称矩阵，B 为实反对称矩阵，$AB=BA$，$A-B$ 可逆，则 $(A+B)(A-B)^{-1}$ 为正交矩阵；

2) 若 B 是实反对称矩阵，则 $(E-B)(E+B)^{-1}$ 为正交矩阵.

证 1) 因为 $(A-B)'=A+B$，所以 $A+B$ 可逆. 因为 $AB=BA$，所以 $(A+B)(A-B)=(A-B)(A+B)$.

令 $C=(A+B)(A-B)^{-1}$，则

$$
\begin{aligned}
C'C &= (A+B)^{-1}(A-B)(A+B)(A-B)^{-1}\\
&=(A+B)^{-1}(A+B)(A-B)(A-B)^{-1}=E.
\end{aligned}
$$

2) 由于 B 是实反对称矩阵，因此 B 的特征值为 0 或纯虚数. 从而 1 不是 B 的特征根，所以 $|1E-B|\neq 0$，即 $E-B$ 是可逆矩阵. 又 $(E+B)'=E-B$，故 $E+B$ 可逆. 由 1) 可知 $(E+B)(E-B)^{-1}$ 为正交矩阵，从而它的逆 $(E-B)(E+B)^{-1}$ 也是正交矩阵.

1153. 设 λ 为正交矩阵 A 的一个特征值，那么 $\frac{1}{\lambda}$ 也是 A 的特征值.

证 A 的特征值只能是 $1,-1,e^{i\theta}$.

当 $\lambda=1$ 或 -1 时，结论自然成立.

当 $\lambda=e^{i\theta}$ 时，$\bar{\lambda}=e^{-i\theta}$ 也是 A 的特征值，即 $\frac{1}{\lambda}$ 是 A 的特征值.

1154. 设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶实矩阵，定义 $\sigma(A)=\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}^2$，则 A 为正交矩阵 $\Longleftrightarrow$ 对任意 n 阶实矩阵 B 都有 $\sigma(ABA')=\sigma(B)$.

证 易知 $\sigma(A)=\mathrm{tr}A'A$.

必要性 $\sigma(ABA')=\mathrm{tr}(ABA')(ABA')$

$$=\mathrm{tr}AB'BA^{-1}=\mathrm{tr}B'B=\sigma(B).$$

充分性　设 $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，其中 α_i 为 A 的列向量，先取 $B=E$，则

$$n=\sigma(B)=\sigma(ABA')=\sigma(AA')=\sigma(A'A)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(\alpha'_i\alpha_i)^2+\sum_{i\neq j}(\alpha'_i\cdot\alpha_j)^2. \tag{1}$$

再取 $B_1=e_i\cdot e_i'$，其中 $e_i'=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)$，则

$$\sigma(AB_1A')=\sigma(\alpha_i\alpha_i')=\sigma(\alpha_i'\alpha_i)=(\alpha_i'\alpha_i)^2. \tag{2}$$

由充分性假设有

$$\sigma(ABA')=\sigma(B_1)=\sigma(e_ie_i')=1. \tag{3}$$

将(3)代入(2)，得 $(\alpha_i'\alpha_i)^2=1$，即 $\alpha_i'\alpha_i=1$. 由 i 的任意性及(1)式故 $\alpha_i'\alpha_j=0\ (i\neq j)$，即 A 为正交矩阵.

1155.　设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶实矩阵，$X=(x_1,\cdots,x_n)$ 为 $1\times n$ 复矩阵，$Y=(y_1,\cdots,y_n)=XA$，则 A 为正交矩阵 $\Longleftrightarrow$ 对任何 X 都有 $\sum_{k=1}^{n}y_k\overline{y_k}=\sum_{k=1}^{n}x_k\overline{x_k}$.

证　必要性　因为 $AA'=E$，所以

$$\sum_{k=1}^{n}y_k\overline{y_k}=Y\overline{Y'}=XA\overline{A'}\ \overline{X'}=\sum_{k=1}^{n}x_k\overline{x_k}.$$

充分性　取 $X=e_i=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)$，则 $Y=XA=(a_{i1},\cdots,a_{in})$. 由 $Y\overline{Y'}=X\overline{X'}$ 得

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2=1,i=1,2,\cdots,n.$$

再取 $X=e_1+e_2$，则 $Y=XA=(a_{11}+a_{21},\cdots,a_{1n}+a_{2n})$. 由 $Y\overline{Y'}=X\overline{X'}$ 得 $\sum_{k=1}^{n}a_{1k}a_{2k}=0$.

类似地，取 $X=e_i+e_j$ 可证 $\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{jk}=0,\ i\neq j$，所以 A 为正交矩阵.

十一、 厄米特矩阵

1156. 什么叫做厄米特矩阵?

答 若 n 阶复矩阵 H 满足 $\overline{H'}=H$,则称 H 为厄米特矩阵.

1157. 若 A 是厄米特矩阵,则

1) A 的特征值都是实数;

2) A',A^{*} 都是厄米特矩阵,其中 A^{*} 是 A 的伴随矩阵;当 A 可逆时,A^{-1} 也是厄米特矩阵.

证 1) 设 λ 是 A 的特征值,ζ 是属于 λ 的一个特征向量,那么

$$A\zeta=\lambda\zeta,\zeta\neq 0.$$

两边取转置共轭,注意到 $\overline{A'}=A$,则

$$\bar{\lambda}\overline{\zeta'}\zeta=\overline{\zeta'}\overline{A'}\zeta=\overline{\zeta'}A\zeta=\lambda\overline{\zeta'}\zeta.$$

而 $\overline{\zeta'}\zeta\neq 0$,所以 $\bar{\lambda}=\lambda$,即 λ 是实数.

2) 因为 $(\overline{A'})'=(\overline{A'})'=A'$,所以 A' 是厄米特矩阵. 因为 $(\overline{A^{*\prime}})=(\overline{A'^{*}})=(\overline{A'})^{*}=A^{*}$,所以 A^{*} 是厄米特矩阵.

如果 A 可逆,那么 $\overline{(A^{-1})'}=\overline{(A')^{-1}}=(\overline{A'})^{-1}=A^{-1}$. 所以 A^{-1} 是厄米特矩阵.

1158. 设 A 与 B 是两个 n 阶厄米特矩阵,则 AB 为厄米特矩阵的充分必要条件是 $AB=BA$.

证

$$AB=BA\Longleftrightarrow\overline{AB'}=\overline{BA'}\Longleftrightarrow\overline{AB'}=\overline{A'}\overline{B'}\Longleftrightarrow\overline{AB'}=AB.$$

1159. 设 A 是厄米特矩阵,则必有酉矩阵 U,使 $U^{-1}AU$ 为对角形矩阵.

证 由 A 为正规矩阵及第 1118 条可得.

1160. 设 n 阶复矩阵 $A=(a_{ij})$,则

1) $H=\overline{A'}A$ 是厄米特矩阵;

2) $H=\overline{A'}A$ 的特征值全非负.

证 1) 因为 $\overline{H'}=\overline{(\overline{A'}A)'}=\overline{A'}A=H$,所以 H 是厄米特矩阵.

2) 对任一 n 维列向量 X，有

$$\overline{X}'HX=(\overline{X}'\overline{A}')(AX)=\overline{(AX)}'(AX)\geqslant 0.$$

设 λ 为 H 的特征值，相应的一个特征向量为 β，即 $H\beta=\lambda\beta$，则 $0\leqslant\overline{\beta}'H\beta=\lambda\overline{\beta}'\beta$. 而 $\overline{\beta}'\beta>0$，所以 $\lambda\geqslant 0$.

1161. 设 A 是 n 阶厄米特矩阵，A 的最小与最大特征值分别为 m,M，则对任何向量 X，有

$$m\overline{X}'X\leqslant\overline{X}AX\leqslant M\overline{X}'X.$$

证 因为 A 是 n 阶厄米特矩阵，所以存在酉矩阵 U，使

$$\overline{U}'AU=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n).$$

无妨假定 $\lambda_1=m,\lambda_n=M$，则

$$\begin{aligned}\overline{X}'AX&=\overline{X}'U(\overline{U}'AU)U'X\\&=\overline{X}'U\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\overline{U}'X.\end{aligned}$$

设 $\overline{U}'X=(a_1,\cdots,a_n)$，则

$$\begin{aligned}\overline{X}'AX&=\lambda_1|a_1|^2+\cdots+\lambda_n|a_n|^2\\&\leqslant M(|a_1|^2+\cdots+|a_n|^2)\\&=M\overline{X}'U\overline{U}'X=M\overline{X}'X,\end{aligned}$$

$$\overline{X}'AX=\lambda_1|a_1|^2+\cdots+\lambda_n|a_n|^2\geqslant m\overline{X}'X.$$

1162. 若 A 是 n 阶厄米特矩阵，则 A 的对角线上的元素 a_{ii} $(i=1,\cdots,n)$ 均在 A 的最小与最大特征值之间.

证 在第 **1161** 条中取 e_i 为第 i 个分量为 1，其余分量均为 0 的 n 维列向量，则 $e_i'Ae_i=a_{ii}$，所以 $m\leqslant a_{ii}\leqslant M,i=1,\cdots,n$.

1163. 设 A 是厄米特矩阵，A 的最小与最大特征值分别为 m、M，$B=A+aV\overline{V}'$（a 为正实数，V 为任一列向量）的最小与最大特征值分别为 m^*、M^*，则

1) $m^*\geqslant m$，等号成立的必要条件为属于 m^* 的特征向量 X 与 V 正交；

2) $M^*\geqslant M$，等号成立的必要条件为属于 M^* 的特征向量 X

与 V 正交.

证　1) 由已知条件易验证 $\overline{B'}=B$. 对任意 n 维列向量 X, 由第 **1161** 条有

$$m\,\overline{X'}X\leqslant\overline{X'}AX\leqslant\overline{X'}AX+a\,\overline{X'}V\,\overline{V'}X$$
$$=\overline{X'}BX.$$

由于 B 是厄米特矩阵, 因此存在酉矩阵 U, 使

$$\overline{U'}BU=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n).$$

不妨假定 $\lambda_1=m^*$, 取 $Y_0=(1,0,\cdots,0)'$, $X_0=UY_0$, 则

$$\overline{X'_0}BX_0=\overline{Y'_0}(\overline{U'}BU)Y_0=\lambda_1=m^*.$$

所以 $m\,\overline{X'}\ \overline{X'_0}X_0\leqslant m^*$. 而 $\overline{X'}X_0=\overline{Y'_0}\overline{U'}UY_0=\overline{Y'_0}Y_0=1$, 于是 $m\leqslant m^*$.

因为

$$\overline{X'}BX=m^*\,\overline{X'}X=\overline{X'}AX+a\,\overline{X'}V\,\overline{V'}X$$
$$\geqslant u\,\overline{X'}X+a\,\overline{X'}V\,\overline{V'}X,$$

又 $u^*=u$, $a>0$, $a\,\overline{X'}V\,\overline{V'}X\geqslant 0$, 于是　$\overline{X'}V\,\overline{V'}X=\overline{(\overline{V'}X)'}(\overline{V'}X)=0$, 即 $\overline{V'}X=0$.

2) 证明与 1) 类似.

1164.　设 A 为厄米特矩阵, 则属于 A 的不同特征值的特征向量必正交.

证　设 λ_1,λ_2 是 A 的两个不同的特征值, α_1,α_2 为相应的特征向量. 由于 A 是厄米特矩阵, 故 λ_1,λ_2 都是实数, 因而

$$\overline{\alpha_1'}\ \overline{A'}=\lambda_1\,\overline{\alpha_1'},\ \overline{\alpha_1'}A=\lambda_1\,\overline{\alpha_1'}.$$

类似地有 $\overline{\alpha_2'}A=\lambda_2\,\overline{\alpha_2'}$. 故

$$\overline{\alpha_1'}A\alpha_2=\lambda_1\,\overline{\alpha_1'}\alpha_2,\qquad(1)$$

$$\overline{\alpha_2'}A\alpha_1=\lambda_2\,\overline{\alpha_2'}\alpha_1.\qquad(2)$$

将(2)取共轭转置得

$$\overline{\alpha_1}'A\alpha_2=\lambda_2\overline{\alpha_1}'\alpha_2. \quad (3)$$

(3)−(1)得 $(\lambda_2-\lambda_1)\overline{\alpha_1}'\alpha_2=0$. 又 $\lambda_2\neq\lambda_1$,故$\overline{\alpha_1}'\alpha_2=0$,即 $\alpha_1'\overline{\alpha_2}=0$,故$(\alpha_1,\alpha_2)=0$,即 α_1 与 α_2 正交.

1165. 设厄米特矩阵

$$A=\frac{1}{6\sqrt{6}}\begin{bmatrix}2\sqrt{6} & -2\sqrt{3} & -6i\\ -2\sqrt{3} & \sqrt{6} & 3\sqrt{2}i\\ 6i & -3\sqrt{2}i & 3\sqrt{6}\end{bmatrix},$$

求酉矩阵 T,使 $T^{-1}AT$ 为对角矩阵.

解 $|\lambda E-A|=\lambda^2(\lambda-1)$, $\lambda_1=\lambda_2=0$, $\lambda_3=1$.
求出 $\lambda=0$ 的两个线性无关的特征向量并正交化,得

$$\alpha_1=(1,\sqrt{2},0),\alpha_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{6}i,-\sqrt{3}i,3).$$

再求 $\lambda=1$ 的一个特征向量:

$$\alpha_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(-\sqrt{6}i,\sqrt{3}i,3).$$

将上述三个向量单位化,得

$$\beta_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,\sqrt{2},0),$$

$$\beta_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{2}i,-i,\sqrt{3}),$$

$$\beta_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(-\sqrt{2}i,i,\sqrt{3}).$$

令 $T=(\beta_1',\beta_2',\beta_3')=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}\sqrt{2} & \sqrt{2}i & -\sqrt{2}i\\ 2 & -i & i\\ 0 & \sqrt{3} & \sqrt{3}\end{bmatrix}$,则

$$T^{-1}AT=\mathrm{diag}(0,0,1).$$

十二、 亚正定矩阵

1166. 任何实方阵都可唯一地分解为对称矩阵与反对称矩阵之和.

证 先证存在性. 因为 $A=R(A)+S(A)$,
其中

$$R(A)=\frac{A+A'}{2},S(A)=\frac{A-A'}{2}.$$

唯一性的证明见第 **101** 条.

注 $R(A)$与$S(A)$分别称为 A 的对称分支与反对称分支.

1167. 什么叫做亚半正定矩阵? 什么叫做亚正定矩阵?

答 如果 A 的对称分支 $R(A)$是半正定矩阵,那么称 A 为亚半正定矩阵;如果 $R(A)$是正定矩阵,那么称 A 为亚正定矩阵.

注 在有些文献中称亚正定矩阵为正定矩阵. 而当 $A'=A$ 且正定时,称亚正定矩阵为对称正定矩阵.

1168. 1) 正定矩阵(半正定矩阵)是亚正定矩阵(亚半正定矩阵);

2) 若 A 为亚正定矩阵(亚半正定矩阵),S 为反对称实矩阵,则 $A+S$ 是亚正定矩阵(亚半正定矩阵).

证 1)是显然的.

2)因为 $R(A+S)=R(A)$,所以结论也是明显的.

1169. n 阶实矩阵 A 是亚正定 (亚半正定)$\Longleftrightarrow X'AX>0$, $\forall\ X\in R^{n\times1}$且 $X\neq0$ $(X'AX\geqslant0,\forall\ X\in R^{n\times1})$.

证 因为 $X'AX=X'(R(A)+S(A))X=X'(R(A))X$,所以 A 亚正定$\Longleftrightarrow R(A)$正定$\Longleftrightarrow X'AX=X'R(A)X>0,\forall\ X\neq0$.

1170. 亚正定(亚半正定)矩阵的转置矩阵是亚正定(亚半正定)矩阵. 两个亚正定(亚半正定)矩阵之和是亚正定(亚半正定)矩阵.

证 A 亚正定$\Longleftrightarrow R(A)$正定$\Longleftrightarrow R(A')=R(A)$正定$\Longleftrightarrow A'$

亚正定.

A、B 亚正定 $\Longleftrightarrow R(A)$、$R(B)$ 正定 $\Longleftrightarrow R(A)+R(B)=R(A+B)$ 正定 $\Longleftrightarrow A+B$ 亚正定.

其它类似可证.

1171. 设 A 是亚正定(亚半正定)矩阵,P 是可逆矩阵,则 $P'AP$ 与 kA 都是亚正定(亚半正定)矩阵,其中 k 是正实数.

证 因为 P 是可逆矩阵,所以 A 亚正定 $\Longleftrightarrow R(A)$ 正定 $\Longleftrightarrow R(P'AP)=P'R(A)P$ 正定 $\Longleftrightarrow P'AP$ 亚正定.

其它类似可证.

1172. 设 $\lambda=a+b\sqrt{-1}$ 是 n 阶实矩阵 A 的任一特征值,a 与 b 分别是 λ 的实部与虚部,如果 $R(A)$ 的 n 个特征值是 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$,那么

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n}(\mu_i)\leqslant a\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}(\mu_i).$$

特别地,若 λ 是实数,A 亚正定,则 $\lambda>0$.

证 因为 $R(A)$ 是实对称矩阵,所以存在正交矩阵 Q,使

$$Q'R(A)Q=\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n).$$

设 X 是 A 的属于 λ 的特征向量,则

$$AX=\lambda X,X\neq 0.$$

等式两边取共轭转置,得

$$\overline{X'}A'=\bar{\lambda}\overline{X'}.$$

由上面的两式可得

$$\overline{X'}AX=\lambda\overline{X'}X,\overline{X'}A'X=\bar{\lambda}\overline{X'}X.$$

于是

$$\overline{X'}R(A)X=\frac{1}{2}(\lambda+\bar{\lambda})\overline{X'}X=a\overline{X'}X.$$

令 $X=QY,Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)'$,则 $a\overline{X'}X=a\overline{Y'}Y$,且

$$\overline{X'}R(A)X=\overline{Y'}(Q'R(A)Q)Y=\overline{Y'}\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)Y$$

$$=a\overline{Y'}Y=a\sum_{i=1}^{n}\overline{y_i}y_i=a\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\mu_i\overline{y_i}y_i=\sum_{i=1}^{n}\mu_i|y_i|^2.$$

所以

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n}(\mu_i)\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2\leqslant a\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}(\mu_i)\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2.$$

因为 $X\neq0$，Q 是可逆矩阵，所以 $Y\neq0$. 于是 $\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2\neq0$. 所以

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n}(\mu_i)\leqslant a\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}(\mu_i).$$

1173. 若 A 是亚正定矩阵，则 $|A|>0$.

证 设 λ 是 A 的特征值，当 λ 是实数时，由第 **1172** 条 $\lambda>0$. 当 λ 是虚数时，$\bar{\lambda}$ 也是 A 的特征值，$\lambda\bar{\lambda}>0$. 又 $|A|$ 是 A 的 n 个特征值的乘积，所以 $|A|>0$.

1174. 亚正定矩阵的逆矩阵仍是亚正定矩阵.

证 设 A 是 n 阶亚正定矩阵，由第 **1173** 条知 A^{-1} 存在，考虑到

$$(A^{-1})'R(A)A^{-1}=(A^{-1})'\frac{A+A'}{2}A^{-1}=R(A^{-1}),$$

由 A 亚正定 $\Longleftrightarrow R(A)$ 正定 $\Longleftrightarrow R(A^{-1})$ 正定 $\Longleftrightarrow A^{-1}$ 亚正定.

1175. n 阶实矩阵 A 为亚正定的充分必要条件是存在 n 阶可逆矩阵 P，使得

$$PAP'=\mathrm{diag}\left[\begin{bmatrix}1 & a_1\\ -a_1 & 1\end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix}1 & a_s\\ -a_s & 1\end{bmatrix},1,\cdots,1\right],$$

其中 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_s>0$.

证 必要性. 由 $A=R(A)+S(A)$ 亚正定知 $R(A)$ 正定. 因而存在 n 阶可逆矩阵 Q，使得 $QR(A)Q'=E_n$. 由于 $S(A)$ 是反对称的，因此 $QS(A)Q'$ 也是反对称的. 所以由第 **1062** 条有 n 阶正交矩阵 U，使得

$$UQS(A)Q'U'=\mathrm{diag}\left[\begin{bmatrix}0 & a_1\\ -a_1 & 0\end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix}0 & a_s\\ -a_s & 0\end{bmatrix},0,\cdots,0\right],$$

其中 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_s>0$，而 $UQR(A)Q'U'=E_n$，记 $UQ=P$，显然 P 是可逆方阵，并且

$$PAP'=P(R(A)+S(A))P'=PR(A)P'+PS(A)P'$$

$$=\mathrm{diag}\left[\begin{bmatrix}1 & a_1\\ -a_1 & 1\end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix}1 & a_s\\ -a_s & 1\end{bmatrix},1,\cdots,1\right].$$

充分性　设存在 n 阶可逆矩阵 P，使得

$$PAP'=\mathrm{diag}\left[\begin{bmatrix}1 & a_1\\ -a_1 & 1\end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix}1 & a_s\\ -a_s & 1\end{bmatrix},1,\cdots,1\right],$$

则 $PR(A)P'=R(PAP')=E_n$，那么 $R(A)$ 正定. 于是 A 亚正定.

1176.　设 A 是 n 阶亚正定矩阵，$A=R(A)+S(A)$，那么

$$|A|\geqslant|R(A)|+|S(A)|.\tag{1}$$

证　A 亚正定，由第 **1175** 条证明过程知存在 n 阶可逆矩阵 P，使得

$$R(A)=PP',$$

$$S(A)=P\mathrm{diag}\left[\begin{bmatrix}0 & a_1\\ -a_1 & 0\end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix}0 & a_s\\ -a_s & 0\end{bmatrix},0,\cdots,0\right]P'$$

$$A=P\mathrm{diag}\left[\begin{bmatrix}1 & a_1\\ -a_1 & 1\end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix}1 & a_s\\ -a_s & 1\end{bmatrix},1,\cdots,1,\right]P'.$$

其中 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_s>0$，因此

$$|A|=(1+a_1^2)\cdots(1+a_s^2)|P|^2\geqslant(1+a_1^2+\cdots+a_s^2)|P|^2\tag{2}$$

当 $S(A)$ 不可逆时，$|S(A)|=0$，而 $|R(A)|=|P|^2$，由(2)知(1)式成立；

当 $S(A)$ 可逆时，$n=2s$，且 $a_1,\cdots,a_s$ 都不为零，$|S(A)|=a_1^2\cdots a_s^2|P|^2$，由(2)知(1)式也成立.

1177.　设 A 与 B 分别是 m 阶亚正定矩阵与 n 阶亚正定矩阵，则 A 与 $R(B)$ 的 Kronecker 乘积 $A\otimes R(B)$ 是亚正定矩阵.

证 由 A 和 B 是亚正定矩阵，则 $R(A)$ 和 $R(B)$ 为正定矩阵. 根据 Kronecker 乘积的性质知 $R(A)\otimes R(B)$ 为正定矩阵，而

$$R(A\otimes R(B))=\frac{A\otimes R(B)+(A\otimes R(B))'}{2}$$

$$=\frac{A\otimes R(B)+A'\otimes R(B)}{2}=\frac{(A+A')\otimes R(B)}{2}$$

$$=R(A)\otimes R(B),$$

所以 $A\otimes R(B)$ 是亚正定矩阵.

1178. A,B 是亚正定矩阵，$A\otimes B$ 是否为亚正定矩阵？$A\circ B$ 是否为亚正定矩阵？设 $A=(a_{ij}),B=(b_{ij})$，则 $A\circ B$ 意即 $(a_{ij}b_{ij})$.

答 都不一定. 比如，$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$，$R(A)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ 是正定的，从而 A 是亚正定的.

$$A\otimes A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & -1 & 1\\ -1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix},R(A\otimes A)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

但 $R(A\otimes A)$ 的三阶顺序主子式

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix}=0,$$

所以 $R(A\otimes A)$ 不是正定矩阵. 故 $A\otimes A$ 不是亚正定矩阵.

由第 1175 条知 $A\circ A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ 不是亚正定矩阵.

十三、 置换矩阵

1179. 什么叫做置换矩阵？

答 交换 n 阶单位矩阵 E_n 的两行(或两列)所得的矩阵称为对换矩阵，对换矩阵的乘积称为置换矩阵.

注　用 e_i 表示第 i 个分量为 1，其余分量都是 0 的 n 维单位列向量. 任一置换矩阵都可表为 $(e_{j_1},e_{j_2},\cdots,e_{j_n})$，其中 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列. 令置换

$$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n\end{pmatrix},$$

则 $(e_{j_1},e_{j_2},\cdots,e_{j_n})=(e_{\sigma(1)},e_{\sigma(2)},\cdots,e_{\sigma(n)})$，记为 I_σ.

1180.　设 S_n 表示全体 n 次置换，$\omega,\rho\in S_n$，则　$I_\omega I_\rho=I_{\omega\rho}$.

证　先设 $\rho=(i,j)$ 是对换，那么

$$\begin{aligned}I_\omega I_\rho&=(e_{\omega(1)},\cdots,e_{\omega(i)},\cdots,e_{\omega(j)},\cdots,e_{\omega(n)})I_\rho\\&=(e_{\omega(1)},\cdots,e_{\omega(j)},\cdots,e_{\omega(i)},\cdots,e_{\omega(n)})\\&=(e_{\omega\rho(1)},\cdots,e_{\omega\rho(i)},\cdots,e_{\omega\rho(j)},\cdots,e_{\omega\rho(n)})=I_{\omega\rho}.\end{aligned}$$

再设 $\rho\in S_n$，则 ρ 可以表示为对换之积，即 $\rho=\rho_1\cdots\rho_t$. 于是

$$I_\omega I_\rho=I_\omega(I_{\rho_1}\cdots I_{\rho_t})=I_{\omega\rho_1\cdots\rho_t}=I_{\omega\rho}.$$

注　若 $\omega_1,\cdots,\omega_t\in S_n,\sigma=\omega_1\cdots\omega_t$，则

$$I_\sigma=I_{\omega_1}\cdots I_{\omega_t}=(e_{\sigma(1)},\cdots,e_{\sigma(n)}).$$

1181.　设 $A=(a_{ij})$ 为 $n\times n$ 矩阵，e_i 为第 i 个分量为 1 其余分量都为 0 的 n 维列向量，则对任意的 i，有

1) $Ae_i=A_i$，其中 A_i 为 A 的第 i 列；

2) $e_i'A=B_i$，其中 B_i 为 A 的第 i 行.

证　直接相乘可得.

注　当 $A=(a_{ij})$ 为 $n\times m$ 矩阵时，上述结论仍然成立，不过 e_i 要作相应变化，比如，右乘 e_i，e_i 为 m 维列向量，左乘 e_i' 的 e_i 为 n 维列向量.

1182.　设 $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n\end{pmatrix}\in S_n$，$A$ 为 n 阶矩阵，则

1) $AI_\sigma=(A_{j_1},\cdots,A_{j_n})$；

2) $I_\sigma A=\begin{bmatrix} B_{j_1} \\ \vdots \\ B_{j_n} \end{bmatrix}$.

证 1) $AI_\sigma=A(e_{j_1},\cdots,e_{j_n})$

$$=(Ae_{j_1},\cdots,Ae_{j_n})=(A_{j_1},\cdots,A_{j_n}).$$

2) 设 $\rho=(i,j)$为对换,则

$$I_\rho A=I_\rho\begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_i \\ \vdots \\ B_j \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_j \\ \vdots \\ B_i \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix}.$$

而 σ 可以表成对换之积,故由上述论证可知,结论仍然成立.

1183. 1) 置换矩阵之积为置换矩阵;

2) 若 A 为置换矩阵,则 A',A^{-1}也是置换矩阵,且 $A'=A^{-1}$;

3) 置换矩阵是正交矩阵;

4) 置换矩阵是幂幺矩阵.

证 1) 由定义,此结果是显然的.

2) 因为任一置换都可表为对换之积,令置换 $\sigma=\rho_1\rho_2\cdots\rho_t$,其中 $\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_t$ 是对换. 设 $A=I_\sigma$,则由第 **1179** 条,并注意到 $I_\rho'=I_\rho$,有

$$A'=I_\sigma'=I'_{\rho_1\rho_2\cdots\rho_t}=I_{\rho_t\cdots\rho_2\rho_1},$$

即 A'是置换矩阵.

若 ρ 是对换,则 $I_\rho'=I_\rho,I_\rho^{-1}=I_\rho$. 于是

$$A^{-1}=I_\sigma^{-1}=(I_{\rho_1\rho_2\cdots\rho_t})^{-1}=(I_{\rho_1}I_{\rho_2}\cdots I_{\rho_t})^{-1}$$

$$=I_{\rho_t}^{-1}\cdots I_{\rho_2}^{-1}I_{\rho_1}^{-1}=I_{\rho_t}\cdots I_{\rho_2}I_{\rho_1}=I_{\rho_t\cdots\rho_2\rho_1},$$

即 A^{-1}是置换矩阵，并且 $A^{-1}=A'$.

3) 由 2)可知.

4) 因为 A 的各行与各列有且只有一个元素为 1，由第 **1078** 条可得.

注 由于置换矩阵既是正交矩阵又是幂幺矩阵，因此它具有这两类矩阵的所有性质.

1184. 设 A 是置换矩阵，则

1) $|A|=1$ 或 -1；

2) A 相似于对角矩阵；

3) A 的特征值为单位根；

4) $A^m=E$，m 是自然数.

证 由第 **1183** 条之注可知.

十四、 哈达玛(Hadamard)矩阵

1185. 什么叫做哈达玛矩阵?

答 设 $H=(a_{ij})$为 n 阶矩阵，若 H 满足

1) $a_{ij}=1$ 或 -1，i、$j=1,2,\cdots,n$，

2) $HH'=nE$，

则称 H 为哈达玛矩阵.

注 一阶哈达玛矩阵为(1)或(−1)，二阶哈达玛矩阵为

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\text{或}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}.$$

1186. 设 $H=(a_{ij})$是 n 阶哈达玛矩阵，则

1) H 可逆；

2) H' 和 $-H$ 都是哈达玛矩阵；

3) 不同行是正交的；

4) 不同列是正交的；

5) $|H|^2=n^n$；

6) H 相似于对角矩阵.

证　1) 因为 $HH'=nE$,所以 $H^{-1}=\frac{1}{n}H'$.

2) $H'(H')'=H'H=nE$;$(-H)(-H)'=HH'=nE$.

3) 由 $HH'=nE$ 知

$$a_{i1}a_{j1}+a_{i2}a_{j2}+\cdots+a_{in}a_{jn}=\begin{cases}n, & i=j;\\0, & i\neq j.\end{cases}$$

4) 因为 $H'H=nE$,所以

$$a_{1i}a_{1j}+a_{2i}a_{2j}+\cdots+a_{ni}a_{nj}=\begin{cases}n, & i=j;\\0, & i\neq j.\end{cases}$$

5) 由 $HH'=nE$ 两边取行列式,得 $|H|^2=n^n$.

6) 因为 $H\overline{H'}=HH'=H'H=\overline{H'}H$,故 H 为正规矩阵,从而相似于对角矩阵.

1187.　设 $H=(a_{ij})$ 为 n 阶哈达玛矩阵,且 $n>2$,则 $n=4k$.

证　由第 **1186** 条的正交性及 $a_{ij}=1$ 或 -1 得

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{1k}+a_{2k})(a_{1k}+a_{3k})=\sum_{k=1}^{n}a_{1k}^2=n. \tag{1}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}&a_{1k}+a_{2k}=2\text{ 或 }-2\text{ 或 }0,\\&a_{1k}+a_{3k}=2\text{ 或 }-2\text{ 或 }0.\end{aligned} \tag{2}$$

于是(1)式左端的和总是 4 的倍数,从而 n 为 4 的倍数.

注　到目前为止充分性还无人知道,即是否存在一切 $4n$ 阶哈达玛矩阵,尚待解决.

1188.　设 H_1,H_2 分别为 n 阶与 m 阶哈达玛矩阵,则 $H_1\otimes H_2$ 为 mn 阶哈达玛矩阵.

证　$H_1\otimes H_2$ 的元素仍为 1 或 -1,且

$$\begin{aligned}(H_1\otimes H_2)(H_1\otimes H_2)'&=(H_1\otimes H_2)(H_1'\otimes H_2')\\&=H_1H_1'\otimes H_2H_2'=nE\otimes mE=nmE.\end{aligned}$$

1189.　存在 2^k 阶哈达玛矩阵，其中 k 为非负整数.

证　当 $k=0,1$ 时，第 **1185** 条之注已给出. 令 $H=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$，利用 $H\otimes H\otimes\cdots\otimes H$ 可构造出 2^k 阶哈达玛矩阵，其中 $k>1$.

1190.　设 A,B,C,D 均为 n 阶哈达玛矩阵，满足

1) $AA'+BB'+CC'+DD'=4nE$；

2) $XY'=YX'$，其中 $Y,X\in\{A,B,C,D\}$.

记

$$H=\begin{bmatrix}A & B & C & D\\ -B & A & -D & C\\ -C & D & A & -B\\ -D & -C & B & A\end{bmatrix},$$

则 H 是 $4n$ 阶哈达玛矩阵.

证　因为 $HH'=4nE$.

注　此条称为 Williamson 方法.

1191.　存在 12 阶哈达玛矩阵.

解　设

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix},B=C=D=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}.$$

则 A,B,C,D 满足第 **1190** 条的条件 1) 和 2). 从而由第 **1190** 条给出的分块矩阵 H 就是 12 阶哈达玛矩阵.

注　由第 **1188** 条，可构造出 24 阶、$2^k\cdot 12^m$ 阶以及 $4^t\cdot 12^m$ 阶哈达玛矩阵.

第十三章　矩阵范数

一、　向量范数

1192.　什么叫做向量范数？

答　设 V 是数域 P 上的一个线性空间，在 V 上定义一个实函数 $\|\cdot\|: V \longrightarrow R$，对于所有的 $x, y \in V$，有以下性质：

1）非负性：$\|x\| \geqslant 0, \forall x \in V$；

2）正性：当且仅当 $x=0$ 时，有 $\|x\|=0$；

3）齐次性：$\|kx\|=|k|\cdot\|x\|, \forall k \in P, \forall x \in V$；

4）三角不等式：$\|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\|, \forall x, y \in V$，则称 $\|\cdot\|$ 为向量的范数，V 为线性赋范空间.

1193.　在 C^n（或 R^n）上常见的范数有哪几种？

答　常见的有 4 种：

1）最大范数（或 l_∞ 范数），即　$\forall x=(x_1, \cdots, x_n) \in C^n$，规定：

$$\|x\|_\infty=\max\{|x_1|, \cdots, |x_n|\}.$$

显然有非负性、正性与齐次性.

$$\forall x=(x_1, \cdots, x_n), y=(y_1, \cdots, y_n) \in C^n,$$

则

$$x+y=(x_1+y_1, \cdots, x_n+y_n),$$

所以　$|x_i+y_i| \leqslant |x_i|+|y_i| \leqslant \max\limits_i\{|x_i|\}+\max\limits_i\{|y_i|\}$，

$$\max_i|x_i+y_i| \leqslant \max_i\{|x_i|\}+\max_i\{|y_i|\},$$

此即证得三角不等式.

2）和范数（或 l_1 范数），即　$\forall x=(x_1, \cdots, x_n) \in C^n$，规定：$\|x\|_1=\sum\limits_{i=1}^n |x_i|$. 不难证明 $\|x\|_1$ 满足范数的四条公理.

3) 欧氏范数(或 l_2 范数),即　$\forall\ x\in(x_1,\cdots,x_n)\in C^n$,规定:

$$\|x\|_2=(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2)^{\frac{1}{2}}=(x\overline{x'})^{\frac{1}{2}}.$$

4) Hölder 范数(或 l_p 范数),即$\forall\ x=(x_1,\cdots,x_n)\in C^n$,规定:

$$\|x\|_p=(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p)^{\frac{1}{p}},\text{其中 } p\geqslant 1.$$

下证 $\|x\|_p$ 满足范数的四条公理.非负性、正性、齐次性显然.利用 Minkowski 不等式得

$$(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p)^{\frac{1}{p}}\leqslant(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p)^{\frac{1}{p}}+(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

即三角不等式也成立.

注　① 当 $p=1,2$ 时,l_p 范数即为 l_1 与 l_2 范数.

② 在酉空间(或欧氏空间)中,由内积定义的向量的长度,实际上就是这里的 l_2 范数.

③ 由此可见同一个线性空间上可以有多种范数.

1194.　$\|\cdot\|_\alpha,\|\cdot\|_\beta$ 是 V 上的两个向量范数,$r>0$,则下面 3 种都是 V 的新范数:

1) $\|x\|=\|x\|_\alpha+\|x\|_\beta,\forall\ x\in V$;

2) $\|x\|=\max\{\|x\|_\alpha,\|x\|_\beta\},\forall\ x\in V$;

3) $\|x\|=r\|x\|_\alpha,\forall\ x\in V$.

证　只证 2),其余类似可证.对于 2)式,不难知道非负性、正性、齐次性成立.

$\forall\ x,y\in V$,则

$$\|x+y\|=\max\{\|x+y\|_\alpha,\|x+y\|_\beta\}\leqslant\|x\|+\|y\|.$$

这是因为

$$\|x+y\|_\alpha\leqslant\|x\|_\alpha+\|y\|_\alpha\leqslant\|x\|+\|y\|,$$

$$\|x+y\|_\beta\leqslant\|x\|_\beta+\|y\|_\beta\leqslant\|x\|+\|y\|.$$

1195.　设 $\|\cdot\|$ 是 C^n 上的向量范数,A 是 n 阶可逆矩阵,

规定：

$$\|x\|_A=\|Ax\|,\forall x\in C^n,$$

那么 $\|\cdot\|_A$ 是 C^n 的范数.

证 非负性、正性、齐次性显然. $\forall x,y\in C^n$,三角不等式也成立：

$$\|x+y\|_A=\|A(x+y)\|\leqslant\|Ax\|+\|Ay\|=\|x\|_A+\|y\|_A.$$

1196. 设 A 是任何一个 $n\times n$ 实对称正定矩阵,则

$$\|x\|_A=(x'Ax)^{\frac{1}{2}}(x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'\in R^n)\text{是 } R^n \text{ 上的范数.}$$

证 非负性、正性显然. 对任何实数 a,有

$$\|ax\|_A=(ax'Aax)^{\frac{1}{2}}=|a|\cdot\|x\|_A.$$

由于 A 正定,所以存在唯一的正对角线元素的下三角阵 L,使得 $A=LL'$. 从而有

$$\|x\|_A=[(L'x)'(L'x)]^{\frac{1}{2}}=\|L'x\|_2.$$

因此,对任意 $x,y\in R^n$,总有

$$\begin{aligned}\|x+y\|_A&=\|L'(x+y)\|_2=\|L'x+L'y\|_2\\&\leqslant\|L'x\|_2+\|L'y\|_2=\|x\|_A+\|y\|_A.\end{aligned}$$

从而 $\|x\|_A$ 是 R^n 的向量范数.

1197. 设 $A\in C^{n\times n}$是正定的 Hermite 矩阵,则

$$\|x\|_A=(\bar{x}'Ax)^{\frac{1}{2}}\quad(\forall x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'\in C^n)$$

是 C^n 上的向量范数.

证 仿第 **1196** 条可证.

注 此范数称为椭圆范数.

1198. 设 $\|x\|$ 是线性空间 V 上的向量范数,则

1) $\|0\|=0$;

2) $\|x-y\|\geqslant|\|x\|-\|y\||,\forall x,y\in V$.

证 1) $\|0\|=\|0x\|=0\|x\|=0$.

2) 因为 $\|x\|=\|(x-y)+y\|\leqslant\|x-y\|+\|y\|$,所以

$\|x-y\| \geq \|x\| - \|y\|$；同理可得

$$\|x-y\| = \|y-x\| \geq \|y\| - \|x\| = -(\|x\| - \|y\|).$$

于是

$$-\|x-y\| \leqslant \|x\| - \|y\| \leqslant \|x-y\|,$$

即

$$\|x-y\| \geqslant |\|x\| - \|y\||.$$

二、 矩阵范数

1199. 什么叫做广义矩阵范数？

答 设 $P^{m\times n}$为数域 P 上一切 $m\times n$ 矩阵的全体，它是 P 上一个线性空间. 在 $P^{m\times n}$上定义一个范数 $\|\cdot\|$，则称它为广义矩阵范数.

1200. 什么叫做矩阵范数？

答 $P^{n\times n}$上一个广义矩阵范数 $\|\cdot\|$，且还满足

5）次乘性：$\|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|, \forall A, B \in P^{n\times n}$，则 $\|\cdot\|$ 为 $P^{n\times n}$上的矩阵范数。

1201. 设 $A=(a_{ij})\in P^{m\times n}$，规定：

1） $\|A\|_\infty = \max\limits_{i,j} |a_{ij}|$；

2） $\|A\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$；

3） $\|A\|_2 = \left[\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right]^{\frac{1}{2}}$；

4） $\|A\|_p = \left[\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|^p\right]^{\frac{1}{p}}, p\geqslant 1$，

那么它们都是广义矩阵范数.

证 1）容易验证 $\|\cdot\|_\infty$，$\|\cdot\|_1$ 是广义矩阵范数，下面证明 $\|\cdot\|_p$ 是广义矩阵范数.

非负性、正性、齐次性都容易验证. 下证三角不等式成立. 假设

$A=(a_{ij}),B=(b_{ij})\in P^{m\times n}$，则

$$(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}+b_{ij}|^{p})^{\frac{1}{p}}\leqslant(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^{p})^{\frac{1}{p}}+(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|^{p})^{\frac{1}{p}}.$$

所以

$$\|A+B\|_{p}\leqslant\|A\|_{p}+\|B\|_{p}.$$

故 $\|\cdot\|_{p}$ 是广义矩阵范数. $p=2$ 时，$\|\cdot\|_{2}$ 也是广义矩阵范数.

1202. 在 $P^{n\times n}$ 里，

1）$\|\cdot\|_{\infty}$ 不是矩阵范数；

2）$\|\cdot\|_{1}$ 是矩阵范数.

证 1）设 $A=B=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$，则有 $\|A\|_{\infty}=\|B\|_{\infty}=1$，而 $AB=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}$，$\|AB\|_{\infty}=2$，不满足次乘性，所以 $\|\cdot\|_{\infty}$ 不是矩阵范数.

2）设 $A=(a_{ij}),B=(b_{ij})\in P^{n\times n}$，则

$$\|AB\|_{1}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}|\leqslant\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|\cdot|b_{kj}|$$

$$\leqslant(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|)(\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|b_{kj}|)=\|A\|_{1}\cdot\|B\|_{1}.$$

所以 $\|\cdot\|_{1}$ 满足次乘性，再由第 **1201** 条知 $\|\cdot\|_{1}$ 是矩阵范数.

1203. 设 $A=(a_{ij})\in P^{n\times n}$，则

$$\|A\|_{\infty}=n\max\{|a_{ij}|\,|\,i、j=1,2,\cdots,n\}$$

是矩阵范数.

证 容易验证非负性、正性、齐次性及三角不等式，下证次乘性. 设 $A=(a_{ij}),B=(b_{ij})$，则

$$\|AB\|_{\infty}=n\max_{i,j}\left|\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right|\leqslant n\max_{i,j}\sum_{k=1}^{n}(|a_{ik}|\cdot|b_{kj}|)$$

$$\leqslant n\max_{i,j}[n\max_{k}(|a_{ik}|\cdot|b_{kj}|)]$$

$$\leqslant [n\max_{i,k}|a_{ik}|]\cdot[n\max_{k,j}|b_{kj}|]=\|A\|_\infty\cdot\|B\|_\infty.$$

1204. 什么叫做矩阵范数与向量范数的相容性?

答 设 $\|\cdot\|$ 为 $P^{n\times n}$ 的矩阵范数，$\|\cdot\|_a$ 为 P^n 上(列)向量范数，如果满足

$$\|AX\|_a\leqslant\|A\|\cdot\|x\|_a,\forall A\in P^{n\times n},x\in P^n,$$

则称矩阵范数 $\|\cdot\|$ 与向量范数 $\|\cdot\|_a$ 是相容的，这时还称矩阵范数是向量范数的从属范数.

1205. 设 $\|A\|$ 是 $C^{n\times n}$ 上的一个矩阵范数，则在 C^n 上必存在一个与 $\|A\|$ 相容的向量范数.

证 设 $\alpha\in C^n$ 是非零向量，对任意 $x\in C^n$，定义

$$\|x\|_a=\|x\alpha'\|，其中 x,\alpha 都是列向量， \tag{1}$$

则

1) 非负性由(1)式知.

2) 当 $x\neq0$ 时，$x\alpha'\neq0$，所以 $\|x\|_a=\|x\alpha'\|>0$.

3) $\forall k\in C,\forall x\in C^n$，有

$$\|kx\|_a=\|kx\alpha'\|=|k|\,\|x\alpha'\|=|k|\cdot\|x\|_a.$$

4) $\forall x,y\in C^n$，有

$$\begin{aligned}\|x+y\|_a&=\|(x+y)\alpha'\|=\|x\alpha'+y\alpha'\|\\&\leqslant\|x\alpha'\|+\|y\alpha'\|=\|x\|_a+\|y\|_a.\end{aligned}$$

于是 $\|x\|_a$ 是 C^n 的向量范数，且有

5) $$\begin{aligned}\|Ax\|_a&=\|Ax\alpha'\|=\|A(x\alpha')\|\leqslant\|A\|\,\|x\alpha'\|\\&=\|A\|\cdot\|x\|_a.\end{aligned}$$

即 $\|x\|_a$ 与 $\|A\|$ 是相容的.

1206. 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，则

$$\|A\|_F=\left[\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n|a_{ij}|^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{1}$$

是一个与向量范数 $\|x\|_2$ 相容的矩阵范数. $\|\cdot\|_F$ 称为 Frobenius 范数，简称 F—范数(F 范数是一种常用的矩阵范数).

证 1) $\| A \|_F$ 显然满足非负性与正性.

2) $\forall\, k\in C$,有 $\| kA \|_F=|k|\cdot\| A \|_F$.

3) 设 $A=(A_1,A_2,\cdots,A_n)$,其中 A_i 为 A 的列向量. 由(1)式知

$$\| A \|_F^2=\| A_1 \|_2^2+\| A_2 \|_2^2+\cdots+\| A_n \|_2^2. \tag{2}$$

这样 $\forall\, A,B\in C^{n\times n}$,记 $A=(A_1,\cdots,A_n)$,$B=(B_1,\cdots,B_n)$,则

$$\begin{aligned}\| A+B \|_F^2 &= \| A_1+B_1 \|_2^2+\cdots+\| A_n+B_n \|_2^2\\ &\leqslant \| A_1 \|_2^2+\| B_1 \|_2^2+\cdots+\| A_n \|_2^2+\| B_n \|_2^2\\ &=\| A \|_F^2+\| B \|_F^2\leqslant(\| A \|_F+\| B \|_F)^2.\end{aligned}$$

所以

$$\| A+B \|_F\leqslant\| A \|_F+\| B \|_F.$$

4) 再证满足相容条件. $\forall\, x\in C^n$,$A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$,设 $A=(A'_1,\cdots,A'_n)'$,$x=(x_1,\cdots,x_n)'$,其中 A_i 为 A 的行向量,则

$$Ax=(A'_1,\cdots,A'_n)'x=(A_1x,\cdots,A_nx)',$$

由 Cauchy 不等式得

$$\begin{aligned}|A_ix|^2 &= |a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots a_{in}x_n|^2\\ &\leqslant\Big[\sum_{j=1}^n|a_{ij}|^2\Big]\Big[\sum_{j=1}^n|\bar{x}_j|^2\Big]\\ &=\Big[\sum_{j=1}^n|a_{ij}|^2\Big]\Big[\sum_{j=1}^n|x_j|^2\Big]\\ &=\| A_i \|_2^2\| x \|_2^2,\ i=1,2,\cdots,n.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\| Ax \|_2^2 &= \sum_{i=1}^n|A_ix|^2\leqslant\sum_{i=1}^n(\| A_i \|_2^2\| x \|_2^2)\\ &=\Big[\sum_{i=1}^n\| A_i \|_2^2\Big]\| x \|_2^2=\| A \|_F^2\| x \|_2^2.\end{aligned}$$

从而

$$\| Ax \|_2\leqslant\| A \|_F\| x \|_2.$$

5) 最后证明三角不等式.

记 $B=(b_{ij})\in C^{n\times n}$ 的第 j 列为 $B_j(j=1,2,\cdots,n)$，则有

$$\begin{aligned}\|AB\|_F^2&=\|(AB_1,AB_2,\cdots,AB_n)\|_F^2\\&=\|AB_1\|_2^2+\|AB_2\|_2^2+\cdots+\|AB_n\|_2^2\\&\leqslant\|A\|_F^2\|B_1\|_2^2+\|A\|_F^2\|B_2\|_2^2+\cdots+\|A\|_F^2\|B_n\|_2^2\\&=\|A\|_F^2(\|B_1\|_2^2+\cdots+\|B_n\|_2^2)\\&=\|A\|_F^2\|B\|_F^2,\end{aligned}$$

即
$$\|AB\|_F\leqslant\|A\|_F\|B\|_F.$$
从而 $\|A\|_F$ 是与 $\|x\|_2$ 相容的矩阵范数.

1207. 设 $A\in C^{n\times n}$，则

1) 令 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，$\|A\|_F^2=\sum\limits_{i=1}^n\|\alpha_i\|_2^2$（其中 $\|\alpha_i\|_2^2=\overline{\alpha}'_i\alpha_i$）是 C^n 上的向量范数）；

2) $\|A\|_F^2=\mathrm{tr}\overline{A}'A=\sum\limits_{i=1}^n\lambda_i$（其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 为 $\overline{A}'A$ 的 n 个特征值）；

3) $\|A\|_F=\|\overline{A}'\|_F$；

4) 对任意酉矩阵 U,V，有
$$\|UA\|_F=\|AV\|_F=\|UAV\|_F=\|A\|_F;$$

5) 对任意酉矩阵 U,V，有
$$\|\overline{U}AV\|_F=\|UA\overline{V}'\|_F=\|A\|_F;$$

6) A 的酉相似矩阵的范数 $\|\cdot\|_F$ 是相同的，即当 $B=U'AU$ 时，$\|B\|_F=\|A\|_F$，其中 U 为任一酉矩阵.

证 1)，2)，3) 显然.

4) 因为 $U\overline{U}'=\overline{U}'U=E$，所以
$$\|UA\|_F^2=\mathrm{tr}[(\overline{UA})'(UA)]=\mathrm{tr}(\overline{A}'\overline{U}'UA)=\mathrm{tr}(\overline{A}'A)=\|A\|_F^2.$$
从而　$\|UA\|_F=\|A\|_F.$

由于 $\|A\|_F=\|\overline{A}'\|_F$，且 $\overline{V}'$ 也是酉矩阵，因此由上面结果立

即有

$$\| AV \|_F = \| (\overline{AV})' \|_F = \| \overline{V}'\overline{A}' \|_F = \| \overline{A}' \|_F = \| A \|_F.$$

从而 $\| UAV \|_F = \| AV \|_F = \| A \|_F$. 于是$\forall A \in F^{n\times n}, \forall U, V \in U^{n\times n}$,有

$$\| UA \|_F = \| AV \|_F = \| UAV \|_F = \| A \|_F.$$

5) 由 4)知.

6) 由 U 为酉矩阵知 U' 为酉矩阵,于是

$$\| B \|_F = \| U'AU \|_F = \| A \|_F.$$

1208. 设 $\| x \|_a$ 为 P^n 上的向量范数,$A \in P^{n\times n}$,则

$$\| A \| = \max_{x\neq 0} \frac{\| Ax \|_a}{\| x \|_a} \tag{1}$$

是与 $\| x \|_a$ 相容的矩阵范数.

证 1) $\| A \| \geqslant 0$ 显然.

2) 对任意 $A\neq 0$,存在 $x\in P^n, x\neq 0$,使 $Ax\neq 0$. 因而由(1)知

$$\| A \| \geqslant \frac{\| Ax_0 \|_a}{\| x_0 \|_a} > 0.$$

故当且仅当 $A=0$ 时,$\| A \| = 0$.

3) $\| kA \| = \max\limits_{x\neq 0} \dfrac{\| kAx \|_a}{\| x \|_a} = |k| \cdot \| A \|$.

4) $$\| A+B \| = \max_{x\neq 0} \frac{\| (A+B)x \|_a}{\| x \|_a}$$

$$\leqslant \max_{x\neq 0} \frac{\| Ax \|_a + \| Bx \|_a}{\| x \|_a}$$

$$\leqslant \max_{x\neq 0} \frac{\| Ax \|_a}{\| x \|_a} + \max_{x\neq 0} \frac{\| Bx \|_a}{\| x \|_a} = \| A \| + \| B \|.$$

5) 因为 $\| A \| \geqslant \dfrac{\| Ax \|_a}{\| x \|_a}$,所以 $\| Ax \|_a \leqslant \| A \| \cdot \| x \|_a$.

注 $\| A \| = \max\limits_{\| x \|_a = 1} \| Ax \|_a$. 因为

$$\| A \| = \max_{x\neq 0} \frac{\| Ax \|_a}{\| x \|_a} \geqslant \max_{\| x \|_a = 1} \frac{\| A_x \|_a}{\| x \|_a} = \max_{\| x \|_a = 1} \| Ax \|_a,$$

其次任取 $x\neq 0$，存在 $y=\frac{1}{\|x\|_a}x$，使 $\|y\|_a=1$，令 $\|x\|_a=k$，则 $x=ky$. 于是

$$\frac{\|Ax\|_a}{\|x\|_a}=\frac{k\|Ay\|_a}{k\|y\|_a}=\|Ay\|_a.$$

所以

$$\max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_a}{\|x\|_a}=\max_{\|y\|_a=1}\|Ay\|_a.$$

第十四章　矩阵的稳定性

一、 矩阵的稳定性

1209. 什么是稳定矩阵?

答 若方阵 A 的特征值的实部都小于 0,则称 A 是稳定的.

注 矩阵 A 是稳定的当且仅当它的全部特征值都位于复平面的左半开平面内. 稳定矩阵在微分方程的稳定性理论中有着十分重要的作用.

1210. 研究下列矩阵的稳定性:

1) $A=\begin{bmatrix}-4 & 1 & 3 & 2\\ -2 & -1 & 2 & 0\\ -3 & 1 & 2 & 2\\ 1 & 0 & -1 & -1\end{bmatrix}$;

2) $A=\begin{bmatrix}-2 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}$;

3) $A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & -2 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$;

4) $A=\begin{bmatrix}-1 & -3 & 2\\ 3 & -1 & -1\\ -2 & 1 & -1\end{bmatrix}$;

5) $A=\begin{bmatrix}-2 & -1\\ a & -4\end{bmatrix}$;

6) $A=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1\\ 1 & -2 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$.

解 1) A 的特征多项式是

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-4-\lambda & 1 & 3 & 2\\ -2 & -1-\lambda & 2 & 0\\ -3 & 1 & 2-\lambda & 2\\ 1 & 0 & -1 & -1-\lambda\end{vmatrix}=(1+\lambda)^4,$$

其特征值都是-1,从而 A 稳定.

2) A 的特征多项式是

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+2 & -1 & 1\\ -1 & \lambda+1 & 0\\ -1 & -1 & \lambda+1\end{vmatrix}=\lambda^3+4\lambda^2+5\lambda+3. \qquad (1)$$

首先,当 $\lambda\geqslant 0$ 时,$f(\lambda)\geqslant 3>0$,所以(1)没有非负的根. 其次,若 $\lambda=\alpha+i\beta$ $(\beta\neq 0)$是(1)的复根,则

$$\begin{cases}\alpha^3-3\alpha\beta^2+4(\alpha^2-\beta^2)+5\alpha+3=0, & (2)\\ 3\alpha^2\beta-\beta^3+8\alpha\beta+5\beta=0. & (3)\end{cases}$$

因 $\beta\neq 0$,由(3)得 $\beta^2=3\alpha^2+8\alpha+5$. 代入(2),得

$$-8\alpha^3-32\alpha^2-42\alpha-17=0.$$

当 $\alpha\geqslant 0$ 时,上式不可能成立,从而 $\alpha<0$,即 A 稳定.

3) A 的特征多项式是

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+1 & 0 & -1\\ 0 & \lambda+2 & 1\\ 0 & -1 & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda^2+3\lambda+3).$$

解得 $\lambda_1=-1,\lambda_2=-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\lambda_3=-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$. 从而 A 稳定.

4) A 的特征多项式是

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+1 & 3 & -2\\ -3 & \lambda+1 & 1\\ 2 & -1 & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda+1)(3\lambda^2+2\lambda+15).$$

解得 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\frac{-1-2\sqrt{11}i}{3},\lambda_3=\frac{-1+2\sqrt{11}i}{3}$,即 A 稳定.

5) A 的特征多项式是

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+2 & 1\\ -a & \lambda+4\end{vmatrix}=\lambda^2+6\lambda+8+a.$$

解得 $\lambda_{1,2}=-3\pm\sqrt{1-a}$.

当 $a>1$ 时,两根都是复数,且 $\mathrm{Re}\lambda_{1,2}=-3<0$;当 $-8<a\leqslant 1$ 时,两根都是负实数;所以当 $a>-8$ 时 A 稳定.

6) A 的特征多项式是

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+1 & 1 & -1\\ -1 & \lambda+2 & -2\\ -1 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda^3+2\lambda-5\lambda-9.$$

因为 $f(0)=-9,f(3)=21$,所以 $f(\lambda)$必有正根,从而 A 不稳定.

二、 多项式的稳定性

1211. 什么叫做多项式是稳定的?

答 若 n 次($n\geqslant 1$)复系数多项式 $f(z)$的根都具有负实部,则称多项式 $f(z)$是稳定的,或称 $f(z)$为赫尔茨(Hurwitz)多项式.

1212. 设 A 是 $n\times n$ 矩阵,则 A 稳定的充要条件为 $|\lambda E-A|$ 是稳定多项式.

1213. 设 n 次实系数多项式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0, \tag{1}$$

$a_n>0$, $f(x)$是稳定的,则 $a_i>0,i=0,1,\cdots,n-1$.

证 设 $f(x)$的全部根为

$$-c_1,\cdots,-c_q,-\alpha_1\pm i\beta_1,\cdots,-\alpha_p\pm i\beta_p,$$

其中 $c_k>0,k=1,\cdots,q;\alpha_j>0,\beta_j\neq 0,j=1,\cdots,p;2p+q=n$，则

$$f(x)=a_n(x+c_1)\cdots(x+c_q)(x^2+2\alpha_1x+\alpha_1^2+\beta_1^2)\cdots(x^2+2\alpha_px+\alpha_p^2+\beta_p^2). \tag{2}$$

比较(1)、(2)两式右端系数，并注意(2)式右端系数均为正实数，以及 $a_n>0$ 得

$$a_0>0,a_1>0,\cdots,a_{n-1}>0.$$

1214. 设实系数多项式 $f(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$，其中 $a_2>0$，则 $f(x)$ 为稳定的充要条件是 $a_0>0,a_1>0$.

证 必要性由第 **1213** 条可知，下证充分性．因为 $f(x)$ 的两个根为 $x_{1,2}=-\frac{a_1}{2a_2}\pm\frac{\sqrt{a_1^2-4a_0a_2}}{2a_2}$，由假设条件知此两根均具有负实部.

注 当 $f(x)$ 的次数 $\geqslant 3$ 时，充分性不再成立．事实上，$f(x)=(x+1)(x^2+1)$ 的系数全为正，但它有两个根 $i,-i$，其实部为 0.

1215. α,β 满足什么条件时，实矩阵

$$A=\begin{bmatrix}-1 & \alpha & 0\\ \beta & -1 & \alpha\\ 0 & \beta & -1\end{bmatrix}$$

是稳定的．

解 A 的特征多项式 $|\lambda E-A|=(\lambda+1)[\lambda^2+2\lambda+(1-2\alpha\beta)]$. 已知 A 有一特征根 $\lambda_1=-1$. 而 $\lambda^2+2\lambda+(1-2\alpha\beta)$ 的稳定性由第 **1214** 条知只要 $1-2\alpha\beta>0$ 即可.

1216. 什么叫做赫尔茨多项式的相伴多项式?

答 设 $f(z)$ 是赫尔茨多项式，则称

$$F(z)=(1+\alpha z)f(z)+f(-z),\text{其中 }\alpha>0 \tag{1}$$

为 $f(z)$ 的相伴多项式．

注　① 当 $\partial(f(z))=n$ 时，$\partial(F(z))=n+1$.

② 记 $f(x)$的相伴多项式 $F(z)=Sf(z)$.

1217.　设实系数多项式为

$$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0,\quad a_n\neq 0,a_0>0. \tag{1}$$

若 $f(x)$是稳定的，则其相伴多项式

$$Sf(x)=F(x)=(1+\alpha x)f(x)+f(-x) \tag{2}$$

也是稳定的.

证　令

$$\Phi_\mu(x)=(1+\alpha x)f(x)+\mu f(-x), \tag{3}$$

其中实系数 $\mu\in[0,1]$. 显然 $\Phi_1(x)=F(x)$.

可证 $\Phi_\mu(x)$是赫尔茨多项式. 由 $f(x)$是赫尔茨多项式及第**1213**条知 $a_0>0,a_1>0,\cdots,a_n>0$. 由(3)式得

$$\Phi_1(x)=b_0(\mu)+b_1(\mu)x+\cdots+b_n(\mu)x^n+\alpha a_nx^{n+1}, \tag{4}$$

其中 $b_k(\mu)(k=0,1,\cdots,n)$是 μ 的线性函数. 由于 $\alpha a_n>0$. 因此得

$$|\Phi_1(x)|>0,\text{当}|x|\geqslant c,\mu\in[0,1], \tag{5}$$

其中 c 充分大，且不依赖于 μ.

设 $z_1(\mu),\cdots,z_{n+1}(\mu)$为 $\Phi_\mu(x)$的全部根，由(5)式知

$$|z_k(\mu)|<c. \tag{6}$$

这就是说 $Z_k(\mu)$是参数 μ 的有界连续函数.

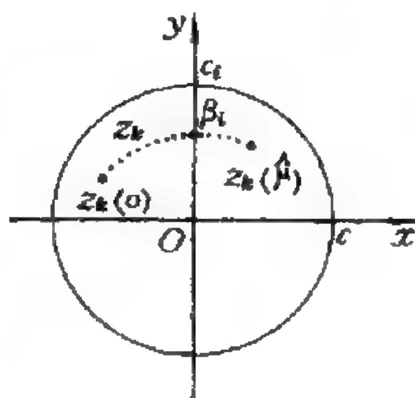


图 14-1

当 $\mu=0$ 时，$\Phi_\mu(x)=(1+\alpha x)f(x)$，其全部根都在左半平面内，即 $\Phi_0(x)$是稳定的.

用反证法. 若 $\Phi_\mu(x)$不是赫尔茨多项式，即存在 $\hat{\mu}\in[0,1]$，使 $\Phi_{\hat{\mu}}(x)$不是赫尔茨多项式，则 $z_k=z_k(\mu)$中至少有一条离开左半平面. 所以曲线 $z_k=z_k(\hat{\mu})$与虚

轴$[-ci,ci]$有一交点，从而$\Phi_{\hat{\mu}}(z)$有虚根βi即

$$\Phi_{\hat{\mu}}(\beta i)=(1+\alpha\beta i)f(\beta i)+\hat{\mu}f(-\beta i)=0,$$

$$|1+\alpha\beta i|\cdot|f(\beta i)|=\hat{\mu}|f(-\beta i)|. \tag{7}$$

因为$f(x)$是实系数多项式，所以

$$f(\bar{z})=\overline{f(z)}.$$

因为$f(x)$是赫尔茨多项式，所以$f(\beta i)\neq 0$. 于是

$$|f(-\beta i)|=|f(\overline{\beta i})|=|\overline{f(\beta i)}|=|f(\beta i)|\neq 0.$$

由(7)式得

$$\hat{\mu}=|1+\alpha\beta i| \quad 或\ \hat{\mu}^2=1+\alpha^2\beta^2. \tag{8}$$

因为$\Phi_{\mu}(0)=(1+\mu)a_0\neq 0$，即$\beta\neq 0$，所以(8)式与$\hat{\mu}\in[0,1]$矛盾.

1218. 设实系数多项式

$$F(x)=b_{n+1}x^{n+1}+\cdots+b_1x+b_0, \tag{1}$$

其中$b_{n+1}\neq 0, b_0>0$. 若$F(x)$是稳定的，则存在稳定的实系数多项式

$$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0(a_n\neq 0,a_0>0) \tag{2}$$

以$F(x)$为相伴多项式.

证　令

$$F(x)=Sf(x)=(1+\alpha x)f(x)+f(-x), \tag{3}$$

其中$\alpha>0$，则

$$F(-x)=(1-\alpha x)f(-x)+f(x). \tag{4}$$

$(4)-(1-\alpha x)\times(3)$，得

$$\alpha^2x^2f(x)=F(-x)-(1-\alpha x)F(x). \tag{5}$$

由(1)式及$F(x)$是稳定的，得$b_0>0,b_1>0,\cdots,b_{n+1}>0$.

令　$\alpha=\dfrac{2b_1}{b_0}>0$，得

$$F(-x)-(1-\alpha x)F(x)=[b_0-b_1x+\cdots+(-1)^{n+1}b_{n+1}x^{n+1}]$$

$$-\left(1-\frac{2b_1}{b_0}x\right)\cdot(b_0+b_1x+\cdots+b_{n+1}x^{n+1})=c_0x^2+\cdots+c_nx^{n+2},$$

其中 $c_0=\frac{2b_1^2}{b_0}>0$，$c_n=\frac{2b_1b_{n+1}}{b_0}>0$. 代入(5)式，消去 x^2，得

$$f(x)=\frac{c_0}{\alpha^2}+\cdots+\frac{c_n}{\alpha^2}x^n.$$

则 $a_k=\frac{c_k}{\alpha^2}(k=0,1,\cdots,n)$即可求出.

下证 $f(x)$是稳定的. 令

$$\Phi_\mu(x)=-(1-\alpha x)F(x)+\mu F(-x). \tag{6}$$

其中 $\mu\in[0,1]$，$\alpha=\frac{2b_1}{b_0}$. 当 $\mu=1$ 时，

$$\Phi_1(x)=-(1-\alpha x)F(x)+F(-x)=\alpha^2x^2f(x). \tag{7}$$

由(6)式知

$$\begin{aligned}\Phi_\mu(x)=&-(1-\mu)b_0+(1-\mu)b_1x+[\alpha b_1-(1-\mu)b_2]x^2\\&+\cdots+[\alpha b_{n-1}-(1-\mu(-1)^n)b_n]x^n\\&+[\alpha b_n-(1-\mu(-1)^{n+1})b_{n+1}]x^{n+1}+\alpha b_{n+1}x^{n+2}.\end{aligned} \tag{8}$$

设 $\Phi_\mu(x)$的 $n+2$ 个根为 $z_k=z_k(\mu)$ $(k=1,2,\cdots,n+2)$.

当参数 μ 跑遍$[0,1]$时，z_k 是 μ 的有界连续函数.

当 $\mu=0$ 时，由(6)式知

$$\Phi_0(x)=-(1-\alpha x)F(x). \tag{9}$$

这时 $\Phi_0(x)$有 $n+2$ 个根，由(9)式知其中 $n+1$ 个根都是 $F(x)$的根. 不妨设为 $z_1,\cdots,z_{n+1}$，它们都在左半平面. 由(9)式知 $\Phi_0(x)$的最后一个根 $z_{n+2}=\frac{1}{\alpha}>0$，它位于右半平面.

可以证明，当 $\mu\in[0,1]$时，$\Phi_\mu(x)$所有根仍保持原来位置. 用反证法. 若有一个根 z_k 从一个半平面变到另一个半平面，则曲线 $z_k=z_k(\mu)$将与虚轴有一个交点. 从而存在 $\hat{\mu}\in(0,1)$使 $\Phi_{\hat{\mu}}(x)$有虚根 βi，即$-(1-\alpha\beta i)F(\beta i)+\hat{\mu}F(-\beta i)=0$. 仿第 **1216** 条的证明可得

$$1+\alpha^2\beta^2=\hat{\mu}^2. \tag{10}$$

这与 $\alpha>0$，$\beta\neq0$ 矛盾. 从而证得 $z_1,\cdots,z_{n+1}$仍在左半平面，z_{n+2}仍

在右半平面.

由(7)式知，当 $\mu=1$ 时，$\Phi_1(x)$ 有二重零根，从而当 $\mu\longrightarrow 1-0$ 时，设两根 $z_k(\mu)\longrightarrow 0, z_j(\mu)\longrightarrow 0$. 当 $\mu\in[0,1]$ 时，由(8)式及倒根变换及根与系数的关系可得

$$\frac{1}{z_1(\mu)}+\cdots+\frac{1}{z_{n-2}(\mu)}=\frac{(1-\mu)b_1}{(1-\mu)b_0}=\frac{b_1}{b_0}.$$

取实部得

$$\sum_{j=1}^{n-2}\mathrm{Re}\Big[\frac{1}{z_j(\mu)}\Big]=\frac{b_1}{b_0}. \tag{11}$$

由此可知，当 $\mu\in[0,1)$ 时，$z_k(\mu), z_j(\mu)$ 中有具有正实部者. 否则，若 $\mathrm{Re}(z_k(\mu))<0, \mathrm{Re}(z_j(\mu))<0$，且 $z_k(\mu)\longrightarrow 0, z_j(\mu)\longrightarrow 0$（当 $\mu\longrightarrow 1-0$）时，则(11)式左端趋于 $-\infty$. 而(11)式右端有界，且是正的. 矛盾.

不失一般性，设 $\mathrm{Re}z_k(\mu)>0, \lim\limits_{\mu\to 1-0} z_k(\mu)=0$.

另外，当 $\mu\in[0,1)$ 时，$z_{n+2}(\mu)$ 是具有正实部的单根，因而可得 $k=n+2$. 不失一般性设 $j=n+1$，故 $\lim\limits_{\mu\to 1-0} z_{n+1}(\mu)=0$. 于是，当 $\mu\longrightarrow 1-0$ 时，有

$$ab_1-(1-\mu)b_2\longrightarrow ab_1\neq 0.$$

由(8)式知，当 $\mu\longrightarrow 1-0$ 时，

$$\Phi_\mu(x)\longrightarrow ab_1x^2+\cdots+ab_{n+1}x^{n+2},$$

即 $\Phi_\mu(x)$ 只有两个根趋于 0. 故当 $\mu\longrightarrow 1-0$ 时，有

$$\lim_{\mu\to 1-0} z_k(\mu)=c_k,\quad 其中\ \mathrm{Re}c_k<0, k=1,2,\cdots,n.$$

但 $\Phi_1(x)=ax^2f(x)$，所以 c_k 都是 $f(x)$ 的根，故 $f(x)$ 的根都具有负实部，因而 $f(x)$ 是稳定的.

注 所有 n 次实系数赫尔茨多项式全体记为 $H_n(n=1,2,\cdots)$. 由第 **1217** 条、第 **1218** 条可知，从 H_1 出发，利用相伴多项式可构造出 $H_2=SH_1, H_3=SH_2=S^2H_1,\cdots, H_n=S^{n-1}H_1$.

若记所有稳定的实系数多项式集合为 H，则

$$H=\bigcup_{k=0}^{\infty}S^kH_1.$$

1219.　设 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$，其中 $a_0>0, a_n\neq 0$. 令赫尔茨矩阵如下：

$$M_f=\begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & \cdots & a_n \end{bmatrix}. \qquad (1)$$

其中规定 $a_s=0$ ($s<0$ 或 $s>n$)，则 f 是稳定的充要条件是 M_f 的各阶顺序主子式满足：

$$\begin{cases} \Delta_1=a_1>0, \\ \Delta_2=\begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}>0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Delta_n=a_n\Delta_{n-1}>0. \end{cases} \qquad (2)$$

证　必要性　对 n 用数学归纳法.

当 $n=1$ 时，$f(x)=a_0+a_1x$. 若 $f(x)$ 是稳定的，由 $a_0>0, a_1\neq 0$，则由 $z_1=-\dfrac{a_0}{a_1}<0$，得 $\Delta_1=a_1>0$. 即对 $n=1$ 结论成立.

归纳假设结论对 n 成立. 再证结论对 $n+1$ 成立.

设实系数多项式 $F(x)$ 是 $n+1$ 次稳定的，由第 **1218** 条，多项式 $F(x)$ 可以看成是 n 次实系数多项式 $f(x)$ 的相伴多项式，即

$$F(x)=(1+2cx)f(x)+f(-x), \qquad (1)$$

其中 $\alpha=2c>0$. 设 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$，则

$a_0>0, a_1>0, \cdots, a_n>0$. 由(1)式知

$$F(x)=2\sum_{k=0}^{n+1}\left[ca_{k-1}+\frac{1+(-1)^k}{2}a_k\right]x^k,$$

其中令 $a_{-1}=a_{n+1}=0$，于是 $F(x)$ 的各阶顺序主子式为

$$D_1 = 2ca_0 > 0,$$

$$D_{k+1} = 2^{k+1}\begin{vmatrix} ca_0 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ ca_2 & ca_1 + a_2 & ca_0 & a_0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ca_{2k} & ca_{2k-1} + a_{2k} & & \cdots & & \end{vmatrix}.$$

将奇数列的公因子 c 提到行列式前，然后再分别将奇数列的 -1 倍加到后一列，得

$$D_{k+1} = 2^{k+1}c^{k+1}\begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{2k} & a_{2k-1} & a_{2k-2} & & \cdots & \end{vmatrix} = \alpha^{k+1}a_0\Delta_k,$$

$k=1,2,\cdots,n$，其中 Δ_k 是多项式 $f(x)$ 的顺序主子式，由归纳假设 $\Delta_k>0$，$k=1,2,\cdots,n$. 再由 $a_0>0$，$\alpha>0$ 得 $D_{k+1}>0$，$k=1,2,\cdots,n$. 故结论对 $n+1$ 也成立.

充分性　用数学归纳法. 当 $n=1$ 时，$f(x)=a_0+a_1x$，其中 $a_0>0$，$a_1\neq 0$. 由于 $\Delta_1=a_1>0$，由此多项式的根 $z=-\dfrac{a_0}{a_1}<0$. 结论成立.

归纳假设结论对 n 成立. 再证结论对 $n+1$ 成立. 设

$$F(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_{n+1}x^{n+1},\ b_0>0,\ b_{n+1}\neq 0,$$

且满足各阶顺序主子式大于 0，即

$$D_1 = b_1 > 0,\cdots,D_{n+1} > 0.$$

由第 **1218** 条，可以将 $F(x)$ 看作某个 $f(x)$ 的相伴多项式，并记其中 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$，$a_0>0$，$a_n\neq 0$.

如同必要性证明那样，可知

$$D_{k+1} = \alpha^{k+1}a_0\Delta_k > 0,\ k = 1,2,\cdots,n.$$

但 $\alpha>0$，$a_0>0$，$\therefore \Delta_k>0$，$k=1,2,\cdots,n$，由归纳假设知 $f(x)$ 是稳定多项式，而 $F(x)$ 是其相伴多项式，由第 **1217** 条知 $F(x)$ 是稳定的.

从而结论对 $n+1$ 成立.

1220. 设实系数多项式

$$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0, a_n>0, a_0>0 \tag{1}$$

是稳定的,则

$$g(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n \tag{2}$$

也是稳定的.反之亦然.

证 由(1),(2)知 $f(x)$ 的根与 $g(x)$ 的根互为倒数,设 $f(x)$ 的根为

$$-c_1,\cdots,-c_q,\ -\alpha_1+\beta_1 i,-\alpha_1-\beta_1 i,\cdots,-\alpha_p+\beta_p i,-\alpha_p-\beta_p i, \tag{3}$$

其中 $c_k>0(k=1,2,\cdots,q)$,$\alpha_j>0$,$\beta_j\neq 0$,$(j=1,2,\cdots,p)$ 其中 $q+2p=n$. (3)式说明 $f(x)$ 的根都具有负实部.

$g(x)$ 的全部根为

$$-\frac{1}{c_1},\cdots,-\frac{1}{c_q},\frac{1}{-\alpha_1+\beta_1 i},\frac{1}{-\alpha_1-\beta_1 i},\cdots,\frac{1}{-\alpha_p+\beta_p i},\frac{1}{-\alpha_p-\beta_p i}. \tag{4}$$

易证 $g(x)$ 的根都具有负实部.

反之亦然.

1221. 实系数多项式

$$f(x) = x^3 + px^2 + qx + r\ (r > 0)$$

是稳定的充要条件是:$q>0$ 且 $0<r<pq$.

证

$$M_f = \begin{bmatrix} q & r & 0 \\ 1 & p & q \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\Delta_1=q>0,\quad \Delta_2=pq-r>0,\quad \Delta_3=\Delta_2.$$

由第 **1219** 条即得结论.

1222. 如果第 **1219** 条中赫尔茨矩阵的各阶顺序主子式都非

负,能否断定 $f(x)$ 是稳定的?

答　不能. 比如, $f(x)=x^4+x^2+1$,

$$M_f=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&1\\0&1&0&1\\0&0&0&1\end{bmatrix},$$

$\Delta_1=\Delta_2=\Delta_3=\Delta_4=0$,满足各阶顺序主子式都 $\geqslant 0$,但是

$$f(x)=\left[x-\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right]\left[x-\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right]$$

$$\left[x-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right]\left[x-\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right].$$

由于 $f(x)$ 有两个根在右半平面,故 $f(x)$ 不是稳定的多项式.

1223.　设 A 的特征多项式

$$f(\lambda)=|\lambda E-A|=\lambda^4+2\lambda^3+3\lambda^2+4\lambda+5,$$

问 A 是否为稳定矩阵?

解

$$M_f=\begin{bmatrix}4&5&0&0\\2&3&4&5\\0&1&2&3\\0&0&0&1\end{bmatrix},$$

$$\Delta_1=4,\quad \Delta_2=2,\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}4&5&0\\2&3&4\\0&1&2\end{vmatrix}=-12<0,$$

故 A 不是稳定的.

第十五章 矩阵分解

一、 定义

1224. 什么叫做矩阵分解?

答 矩阵分解就是将一个已知矩阵分解为若干个满足一定条件的矩阵之积或和.

1225. 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$,e_i 表示第 i 行分量为 1 其余分量为零的 n 维列向量,$\tilde{e}_i$ 表示第 i 行分量为 1 其余分量为零的 m 维列向量,则

$$A=\begin{bmatrix}\tilde{e}'_1Ae_1 & \cdots & \tilde{e}'_1Ae_n\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \tilde{e}'_mAe_1 & \cdots & \tilde{e}'_mAe_n\end{bmatrix}.$$

证 因为 $a_{ij}=\tilde{e}'_iAe_j, i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n$.

注 ①取 A 的第 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 行,第 $j_1,j_2,\cdots,j_l$ 列所得的子矩阵为:

$$A\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_l\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \cdots & a_{i_1j_l}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ a_{i_kj_1} & a_{i_kj_2} & \cdots & a_{i_kj_l}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\tilde{e}'_{i_1}Ae_{j_1} & \tilde{e}'_{i_1}Ae_{j_2} & \cdots & \tilde{e}'_{i_1}Ae_{j_l}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \tilde{e}'_{i_k}Ae_{j_1} & \tilde{e}'_{i_k}Ae_{j_2} & \cdots & \tilde{e}'_{i_k}Ae_{j_l}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\tilde{e}'_{i_1}\\ \tilde{e}'_{i_2}\\ \vdots\\ \tilde{e}'_{i_k}\end{bmatrix}A(e_{j1},e_{j2},\cdots,e_{jl}).$$

② 设 $m\times n$ 矩阵 A 的第 i 行为 α_i，第 j 列为 β_j，则有 $\alpha_i=e'_iA$，$\beta_j=Ae_j$.

二、 积因子分解

1226. （等价分解）设 A 是秩为 r 的 $m\times n$ 矩阵，则存在 m 阶可逆矩阵 P 与 n 阶可逆矩阵 Q，使得

$$A=P\begin{bmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}Q.$$

1227. （满秩分解）设 $m\times n$ 矩阵 A 的秩为 $r>0$，则必存在 $m\times r$ 列满秩矩阵 G，$r\times n$ 行满秩矩阵 H，使得 $A=GH$.

证 由等价分解，存在 m 阶和 n 阶可逆矩阵 P,Q，使得

$$A=P\begin{bmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}Q=P\begin{pmatrix}E_r\\ 0\end{pmatrix}(E_r,0)Q=GH,$$

其中 $G=P\begin{bmatrix}E_r\\ 0\end{bmatrix}$，$H=(E_r,0)Q$，且秩$(G)=r=$秩 H.

1228. 如果 $A=GH=G_1H_1$，其中 G 与 G_1 都是 $m\times r$ 列满秩矩阵，H 与 H_1 都是 $r\times n$ 行满秩矩阵，则必存在 r 阶非奇异矩阵 P，使得

$$G=G_1P,\ H=P^{-1}H_1.$$

证 对 $r\times n$ 行满秩矩阵 H，必存在一个 $n\times r$ 列满秩矩阵 $N=H'(HH')^{-1}$，使得 $HN=E_r$. 故 $G=GE_r=G(HN)=G_1(H_1N)$.

记 $H_1N=P$，则 $G=G_1P$. 由于 G 是 $m\times r$ 列满秩矩阵，因此存在 $r\times m$ 行满秩矩阵 $M=(G'G)^{-1}G'$，使得 $MG=E_r$. 因而有 $E_r=(MG_1)P$. 这说明了 P 是 r 阶非奇异矩阵，且 $P^{-1}=MG_1$. 于是

$$H=E_rH=(MG)H=(MG_1)H_1=P^{-1}H_1.$$

注 由此可见满秩分解不是唯一的，随 P 的不同可以有不同的分解.

1229. 设 A,B 是 $m\times n$ 矩阵，则

$$秩(A+B)\leqslant 秩 A+秩 B.$$

证 设秩$(A)=r$,秩$(B)=s$,则由第 **1227** 条可令 $A=P_1Q_1$,$B=P_2Q_2$,其中 P_1,P_2 分别是 $m\times r$,$m\times s$ 的列满秩矩阵,Q_1,Q_2 分别是 $r\times n$,$s\times n$ 行满秩矩阵.于是

$$A+B=(P_1,P_2)\begin{pmatrix}Q_1\\Q_2\end{pmatrix}.$$

从而

$$\begin{aligned}秩(A+B)&\leqslant 秩(P_1,P_2)\leqslant(P_1,P_2)的列数\\&=r+s=秩(A)+秩(B).\end{aligned}$$

这是第 **237** 条的另一证法.

1230. 设 A 是秩为 r 的 $m\times n$ 矩阵,则存在非奇异矩阵 P,使 PA 的后 $m-r$ 行全为零;存在非奇异矩阵 Q,使 AQ 的后 $n-r$ 列全为零.

证 由 A 的秩为 r 和等价分解知,存在非奇异矩阵 P 和 Q,使得

$$PAQ=\begin{bmatrix}E_r&0\\0&0\end{bmatrix}.$$

设 $Q^{-1}=\begin{pmatrix}Q_1\\Q_2\end{pmatrix}$,$P^{-1}=(P_1,P_2)$.那么

$$PA=\begin{bmatrix}E_r&0\\0&0\end{bmatrix}Q^{-1}=\begin{bmatrix}E_r&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Q_1\\Q_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Q_1\\0\end{bmatrix},$$

$$AQ=P^{-1}\begin{bmatrix}E_r&0\\0&0\end{bmatrix}=(P_1,P_2)\begin{bmatrix}E_r&0\\0&0\end{bmatrix}=(P_1,0).$$

1231. 设 A,B 都是 $m\times n$ 矩阵,$A=BU$,$B=AV$,这里 U,V 都是 n 阶方阵,则存在可逆矩阵 T,使得 $B=AT$.

证 由题设可知秩 $A=$秩 B.记秩 $A=$秩 $B=r$.由第 **1230** 条知,存在可逆矩阵 P,Q,分别使

$$AP=(A_1,0),\tag{1}$$

$$BQ=(B_1,0),\tag{2}$$

其中 A_1,B_1 分别为 $m\times r$ 列满秩矩阵. 令

$$P=(P_1,P_2),Q^{-1}=\begin{bmatrix}Q_1\\Q_2\end{bmatrix},$$

其中 P_1,Q_1 分别为 $n\times r$ 与 $r\times n$ 矩阵,则由(1)式得 $AP_1=A_1$,由(2)式得

$$B=(B_1,0)Q^{-1}=(B_1,0)\begin{pmatrix}Q_1\\Q_2\end{pmatrix}=B_1Q_1.$$

故

$$A_1=AP_1=BUP_1=B_1Q_1UP_1=B_1W_1,\tag{3}$$

其中 $W_1=Q_1UP_1$ 为 r 阶矩阵. 又因秩 $W_1\geqslant$ 秩 $A_1=r$,因此秩 $W_1=r$,即 W_1 可逆.

再利用(3)式推出欲求之结论. 事实上,

$$\begin{aligned}B&=(B_1,0)Q^{-1}=(A_1W_1^{-1},0)Q^{-1}\\&=(A_1,0)\begin{bmatrix}W_1^{-1}&0\\0&E\end{bmatrix}Q^{-1}=AP\begin{bmatrix}W_1^{-1}&0\\0&E\end{bmatrix}Q^{-1}\\&=AT,\end{aligned}$$

其中 $T=P\begin{bmatrix}W_1^{-1}&0\\0&E\end{bmatrix}Q^{-1}$ 为可逆矩阵.

1232. 设 n 阶矩阵 A 是秩为 r 的厄米特矩阵($r>0$),则有列满秩 $n\times r$ 矩阵 G 及非奇异的 r 阶厄米特矩阵 A_1,使得 $A=GA_1\overline{G}'$.

证 将 A 作满秩分解,得 $A=GH$,则 $G,\overline{H}'$ 都是 $n\times r$ 列满秩矩阵. 又因为 $\overline{A}'=A$,所以 $A=GH=\overline{H}'\overline{G}'$. 由第 **1228** 条得 $\overline{H}'=GP,\overline{G}'=P^{-1}H$,其中 P 是 r 阶非奇异矩阵,则 $H=P\overline{G}'$. 两边取共轭转置,得 $\overline{H}'=G\overline{P}'=GP$. 再左乘 $(\overline{G}'G)^{-1}\overline{G}'$,得 $\overline{P}'=P$.

由此令 $A_1=P$,则

$$A=GH=GP\overline{G}'=GA_1\overline{G}'.$$

1233. 设 A 是非零的实对称矩阵，则 A 是幂等矩阵的充要条件是存在列满秩矩阵 G，使得

$$A=G(G'G)^{-1}G'.$$

证 当 $A=G(G'G)^{-1}G'$ 时，易见 $A^2=A$；反之，将 A 作满秩分解 $A=GH$. 因为 $A'=A$，所以 $A=GH=H'G'$. 由第 **1228** 条 $H'=GP$，其中 P 是非奇异矩阵，因此 $A=GP'G'$. 又因为 $A^2=A$，即 $GP'G'GP'G'=GP'G'$，左乘 $(P')^{-1}(G'G)^{-1}G'$，右乘 $G(G'G)^{-1}$ 得 $G'GP'=E$，所以 $P'=(G'G)^{-1}$，代入 $A=GP'G'$，即得
$A=G(G'G)^{-1}G'$.

1234. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵 $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ 的 r 阶可逆子矩阵，而且秩 $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}=r$，$D-CA^{-1}B=0$，则 $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ 可满秩分解为

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}=\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}(E_r,A^{-1}B)=\begin{pmatrix} E_r \\ CA^{-1} \end{pmatrix}(A,B).$$

证 直接验证可知.

1235. （极分解）任意一个实满秩方阵 A 可以分解为正定矩阵与正交矩阵之积.

证 因 A 满秩，所以 AA' 正定. 从而存在正定矩阵 B，使 $AA'=B^2$. 因而

$$A=B^2(A')^{-1}=B(B(A')^{-1})=BC,$$

其中 $C=B(A')^{-1}$. 因为

$$CC'=B(A')^{-1}(B(A')^{-1})'=B(AA')^{-1}B=E,$$

故 C 为正交矩阵.

1236. 设 A 是一个 n 阶实矩阵，$A=PU$ 是极分解，其中 P 是正定矩阵，U 是正交矩阵，则 $AA'=A'A\Longleftrightarrow PU=UP$.

证 充分性 $AA'=PUU'P'=PP=P^2=U'UP^2=U'P^2U=U'P'PU=A'A$.

必要性　因为 $AA'=A'A$，所以 $P^2=U'P^2U$ 由 P^2 与 $U'P^2$ 均正定知它们均有正定平方根 P 和 $U'PU$. 但平方根是唯一的，所以 $P=U'PU$，即 $UP=PU$.

1237.　假如 A 为实满秩矩阵，则存在正交矩阵 P_1,P_2，使得

$$A=P_1\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)P_2^{-1},\lambda_i>0,i=1,2,\cdots,n.$$

证　见后面第 **1248** 条.

1238.　（QR 分解）任一实满秩矩阵 A 可分解成一个正交矩阵与一个主对角线元都大于零的上三角矩阵之积，且这种分解是唯一的.

证　见第 **1143** 条.

1239.　任一 n 阶可逆复矩阵可以唯一地分解为 $A=UT$，其中 U 为酉矩阵，T 为主对角线元都大于零的上三角矩阵.

证　见第 **1128** 条.

1240.　（三角分解或 LU 分解或 LR 分解）设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶方阵，若 A 的前 $n-1$ 个顺序主子式 $\triangle_i\neq0(i=1,2,\cdots,n-1)$，则 $A=LU$，其中

$$L=\begin{bmatrix}1 & & & 0\\ & 1 & & \\ * & & \ddots & \\ & & & 1\end{bmatrix}$$

称为单位下三角矩阵（主对角线元为 1），U 为上三角矩阵.

证　$a_{11}\neq0$，用 Gauss 消元法，即令 Frobenius 矩阵

$$L_1^{-1}=\begin{bmatrix}1 & & & \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -\frac{a_{n1}}{a_{11}} & & & 1\end{bmatrix},\text{则 } L_1^{-1}A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & a'_{n2} & \cdots & a'_{nn}\end{bmatrix}.$$

由于倍加初等变换不改变矩阵 A 的行列式的值，故 A 的二阶顺序主子式 $\Delta_2=a_{11}a'_{22}\neq0$. 因而 $a'_{22}\neq0$. 再令

$$L_2^{-1}=\begin{bmatrix}1 & & & & \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & -\dfrac{a'_{32}}{a'_{22}} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & -\dfrac{a'_{n2}}{a'_{22}} & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix},$$

则

$$L_2^{-1}L_1^{-1}A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2n}\\ 0 & 0 & a''_{33} & \cdots & a''_{3n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & a''_{n3} & \cdots & a''_{nn}\end{bmatrix}$$

这样继续下去，则存在单位下三角矩阵 $L_1,L_2,\cdots,L_{n-1}$，使

$$L_{n-1}^{-1}L_{n-2}^{-1}\cdots L_2^{-1}L_1^{-1}A=\begin{bmatrix}a_{11} & & & \\ & a'_{22} & & * \\ & & \ddots & \\ & 0 & & a_{nn}^{(n-1)}\end{bmatrix}.$$

令上式为 U，故 $A=LU$，其中 $L=L_1L_2\cdots L_{n-1}$ 为单位下三角矩阵，而 U 为上三角矩阵.

1241. （LDU 分解）设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶方阵，则当且仅当 A 的前 $n-1$ 个顺序主子式

$$\Delta_k\neq0,k=1,2,\cdots,n-1$$

时，$A=LDU$，其中 L 为单位下三角矩阵，U 为单位上三角矩阵，D 为对角矩阵，且这种分解是唯一的.

证 首先设 A 有唯一的 LDU 分解 $A=LDU$，则将此式子写

成分块矩阵的形式

$$\begin{bmatrix} A_{n-1} & \gamma \\ \mu & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{n-1} & 0 \\ \sigma & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{n-1} & 0 \\ 0 & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{n-1} & \tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{1}$$

其中 $L_{n-1}, D_{n-1}, U_{n-1}, A_{n-1}$ 分别是 L, D, U, A 的 $n-1$ 阶顺序主子阵. 于是由(1)式得

$$\begin{cases} A_{n-1} = L_{n-1}D_{n-1}U_{n-1}, & (2) \\ \mu = \sigma D_{n-1}U_{n-1}, & (3) \\ \gamma = L_{n-1}D_{n-1}\tau, & (4) \\ a_{nn} = \sigma D_{n-1}\tau + d_n. & (5) \end{cases}$$

若 $\Delta_{n-1} = |A_{n-1}| = 0$，则由(2)式知 $|D_{n-1}| = 0$. 故 $|L_{n-1}D_{n-1}| = 0$. 因而齐次线性方程组 $L_{n-1}D_{n-1}x = 0$ 有非零解，而 $L_{n-1}D_{n-1}x = \gamma$ 有无穷多个解，即有 $\hat{\tau} \neq \tau$，使

$$L_{n-1}D_{n-1}\tau = L_{n-1}D_{n-1}\hat{\tau} = \gamma.$$

同理 $|D_{n-1}U_{n-1}| = 0$，存在 $\hat{\sigma} \neq \sigma$ 有

$$\mu = \sigma D_{n-1}U_{n-1} = \hat{\sigma} D_{n-1}U_{n-1}.$$

取 $d'_n = a_{nn} - \hat{\sigma} D_{n-1}\hat{\tau}$，故

$$A = \begin{bmatrix} A_{n-1} & \gamma \\ \mu & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{n-1} & 0 \\ \hat{\sigma} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{n-1} & 0 \\ 0 & d'_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{n-1} & \hat{\tau} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

这与分解的唯一性矛盾，故 $\Delta_{n-1} \neq 0$.

再考察 A 的 $n-1$ 阶顺序主子阵，用类似的方法可证

$$\Delta_{n-2} = |A_{n-2}| \neq 0.$$

依次下去可证得

$$\Delta_k \neq 0, k = 1, 2, \cdots, n-1.$$

另一方面，设 $\Delta_k \neq 0, k = 1, 2, \cdots, n-1$. 先证存在性.

由第 **1240** 条知 $A = LB$，其中 L 为单位下三角矩阵，

$$B=\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & b_{nn} \end{bmatrix}$$

为上三角矩阵，且 $b_{11}\cdots b_{n-1,n-1}\neq 0$.

于是 $B=DU$，其中 $D=\mathrm{diag}(b_{11},b_{22},\cdots,b_{nn})$，

$$U=\begin{bmatrix} 1 & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ & 1 & \cdots & c_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix},c_{ij}=\frac{b_{ij}}{b_{ii}}.$$

所以 $A=LDU$. 存在性得证.

再证唯一性. 若 $A=LDU=\hat{L}\hat{D}\hat{U}$，而 $\Delta_{n-1}\neq 0$. 设 A_{n-1}，D_{n-1}，U_{n-1}，L_{n-1}，$\hat{D}_{n-1}$，$\hat{U}_{n-1}$，$\hat{L}_{n-1}$ 分别为 $A,D,U,L,\hat{D},\hat{U},\hat{L}$ 的 $n-1$ 阶顺序主子阵，则

$$L_{n-1}D_{n-1}U_{n-1}=A_{n-1}=\hat{L}_{n-1}\hat{D}_{n-1}\hat{U}_{n-1}. \tag{6}$$

从而

$$\hat{L}_{n-1}^{-1}L_{n-1}=\hat{D}_{n-1}\hat{U}_{n-1}U_{n-1}^{-1}D_{n-1}^{-1}. \tag{7}$$

(7)式左端为单位下三角矩阵，右端为上三角矩阵. 从而由(7)式知 $\hat{L}_{n-1}^{-1}L_{n-1}=E_{n-1}$. 所以 $\hat{L}_{n-1}=L_{n-1}$.

再由(6)式得 $D_{n-1}U_{n-1}=\hat{D}_{n-1}\hat{U}_{n-1}$. 所以

$$\hat{D}_{n-1}^{-1}D_{n-1}=\hat{U}_{n-1}U_{n-1}^{-1}. \tag{8}$$

(8)式左端为对角矩阵，右边为单位上三角矩阵，所以

$$\hat{D}_{n-1}^{-1}D_{n-1}=E_{n-1},\hat{D}_{n-1}=D_{n-1},\hat{U}_{n-1}=U_{n-1}.$$

由 A_{n-1} 分解唯一. 再由(3)，(4)可知 σ,τ 也是唯一确定的. 由 σ,τ 唯一，以及(5)式知 d_n 唯一确定，从而 A 的分解的唯一性得证.

注 ① 若把 DU 合起来记为 U_1，则 $A=LU_1$ 称为 Doolittle 分解. 即第 **1240** 条的三角分解.

② 若将 LD 合起来记为 L_1，则 $A=L_1U$ 称为 Crout 分解.

1242. 任意可逆实方阵 A 必有唯一分解式 $A=QL$，其中 Q 为正交矩阵，L 为主对角线上元素大于零的下三角矩阵.

证 对于 $(A')^{-1}$，由 QR 分解知，存在正交矩阵 Q_1 及主对角线上元素全大于零的上三角矩阵 R_1，使得 $(A')^{-1}=Q_1R_1$. 于是 $A'=R_1^{-1}Q_1^{-1}$. $\therefore A=(Q_1^{-1})'(R_1^{-1})'$.

令 $Q=(Q_1^{-1})'$，$L=(R_1^{-1})'$，则 $A=QL$ 为所求之分解.

再证唯一性. 设 $A=QL=Q_1L_1$，则 $Q_1^{-1}Q=L_1L^{-1}$.

由 $Q_1^{-1}Q$ 既为正交矩阵又为下三角矩阵知其必为对角矩阵，从而 $Q_1^{-1}Q=E$，即 $Q=Q_1$. 故 $L=L_1$.

1243. 将

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

分解为正交矩阵与上三角形矩阵之积.

解 令 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，其中 α_i 为 A 的列向量. 对 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 用 Schmidt 正交化方法得正交向量 β_1,β_2,β_3，即

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1 & -1 & -\frac{7}{6}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

再单位化得 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$，即

$$(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & & \\ & \frac{1}{\sqrt{2}} & \\ & & \frac{\sqrt{6}}{5}\end{bmatrix}.$$

令

$$Q=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-\sqrt{6}}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}, R=\begin{bmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} & \frac{5}{\sqrt{3}} \\ 0 & \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{5}{\sqrt{6}} \end{bmatrix},$$

则 Q 为正交矩阵，R 为上三角形矩阵，并且 $A=QR$.

1244. (Cholesky 分解或平方根分解或对称三角分解) 设 A 是正定矩阵，则 $A=BB'$，其中 B 为主对角线元全为正的下三角形矩阵.

证 由 A 正定得 $A=C'C$，其中 $|C|\neq 0$. 由 QR 分解得 $C=QB'$，其中 Q 为正交矩阵，B 为主对角元全为正的下三角矩阵. 于是

$$A=C'C=(QB')'(QB')=BB'. \tag{1}$$

注 这种分解也是唯一的. 实际上，令 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶方阵，$B=(b_{ij})$，则由(1)式有

$$\begin{cases} a_{ij}=b_{i1}b_{j1}+b_{i2}b_{j2}+\cdots+b_{ij}b_{jj}, i>j, \\ a_{ii}=b_{i1}^2+b_{i2}^2+\cdots+b_{ii}^2. \end{cases} \tag{2}$$

从而用逆推公式(2)，可求出 B 来. 故分解是唯一确定的.

1245. (若当分解) 设 A 为任意复矩阵，则

$$A=PJP^{-1},$$

其中 P 为满秩矩阵，J 为上三角矩阵，且为 A 的若当标准形.

1246. (Voss) 1) 每个若当形矩阵可以表示为实对称矩阵和复对称矩阵的乘积，并且其中一个为可逆对称矩阵；

2)每个复方阵可以表示为两个复对称矩阵的乘积，并且其中一个为可逆矩阵.

证 1) 因为若当形矩阵是主对角线上由若当块组成的矩阵，

而若当块

$$\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & & & 1 \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ 1 & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & & & \lambda_i \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & 1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ \lambda_i & 1 & & 0 \end{bmatrix},$$

即每个若当块可分解为两个对称矩阵之积，并且其中一个为可逆实对称矩阵. 因此

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & 0 & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & \ddots & 1 & & & & \\ & & & \lambda_1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \lambda_r & 1 & 0 \\ & & & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & & & & \lambda_r \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & & 1 & & & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & & \\ 1 & & 0 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 0 & & 1 \\ & & & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & & & & 1 & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & & & \lambda_1 & & & & \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & 1 & & & & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & & & \\ \lambda_1 & 1 & & 0 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & 0 & & \lambda_r \\ & & & & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & 1 \\ & & & & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & & & & & \lambda_r & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$=HM$,

其中 H 为实对称阵，M 为复对称阵.

2) 对任意的复方阵 A，存在可逆矩阵 B，使得 $A=B^{-1}JB$，这里 J 是若当形矩阵. 由 1)知，存在可逆对称矩阵 S 和复对称矩阵 C，使 $J=SC$，则

$$A=B^{-1}SCB=B^{-1}S(B^{-1})'B'CB=(B^{-1}S(B^{-1})')(B'CB).$$

显然 $B^{-1}S(B^{-1})'$，$B'CB$ 都是对称矩阵. 且 $B^{-1}S(B^{-1})'$ 可逆.

1247. 设 A 是一个正定对称矩阵，则存在一个正定对称矩阵 S 使得 $A=S^2$.

注 ①结论对 A 是半正定也成立. 即 $A=S^2$，其中 S 是半正定阵.

②无论是正定阵或半正定阵，当 $A=S^2$ 时，记 $S=A^{\frac{1}{2}}$.

1248. （奇异值分解）设 A 为 $m\times n$ 实矩阵，秩 $A=r$，则矩阵 $A=P\begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q'$，其中 P，Q 分别为 m 阶和 n 阶的正交矩阵，而 $D=\mathrm{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_r)$，$a_i>0$，$i=1,2,\cdots,r$.

证 由假设，存在 m 阶与 n 阶可逆矩阵 T，S，使

$$A=T\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}S.$$

对 T，S' 作 QR 分解，$T=P_1R$，$S'=Q_1L'$，其中 P_1，Q_1 分别为 m 阶与 n 阶正交矩阵，R，L 分别为非奇异的上三角矩阵与下三角矩阵，则

$$A=P_1\begin{bmatrix} R_1 & R_2 \\ 0 & R_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ L_2 & L_3 \end{bmatrix}Q_1'=P_1\begin{bmatrix} R_1L_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q_1', \quad (1)$$

其中 R_1 为 R 的 r 阶顺序主子阵，L_1 为 L 的 r 阶下三角顺序主子阵. 因 R_1，L_1 非奇异，所以 R_1L_1 是 r 阶可逆矩阵. 因而存在正交矩阵 P_2，Q_2' 使

$$P_2(R_1L_1)Q_2'=\mathrm{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_r), \quad (2)$$

其中 $a_i>0$，$i=1,2,\cdots,r$. 令 $D=\mathrm{diag}(a_1,\cdots,a_r)$，

$$P=P_1\begin{bmatrix} P_2' & 0 \\ 0 & E_{m-r} \end{bmatrix}, Q=Q_1\begin{bmatrix} Q_2' & 0 \\ 0 & E_{n-r} \end{bmatrix},$$

则将(2)代入(1)，得

$$A=P\begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q',$$

且 $P'P=E_m, Q'Q=E_n$.

1249. （极因子分解）设 A 为 n 阶实方阵，那么：

1）A 必有分解式

$$A=(AA')^{\frac{1}{2}}Q=Q(A'A)^{\frac{1}{2}}, \tag{1}$$

其中 Q 为正交矩阵，$(AA')^{\frac{1}{2}}$ 见第 **1247** 条之注；

2）当 $|A|\neq 0$ 时，(1)式中的 Q 是唯一的.

证 1）由第 **1248** 条知存在 n 阶正交矩阵 P, R'，使

$$A=P\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_r\end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}R'.$$

所以

$$A'A=R\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & a_r^2\end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}R',$$

$$AA'=P\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & a_r^2\end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}P'.$$

所以

$$(A'A)^{\frac{1}{2}}=R\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_r\end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}R', \tag{2}$$

$$(AA')^{\frac{1}{2}}=P\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_r\end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}P'. \tag{3}$$

用 PR' 左乘(2)式两边得

$$PR'(A'A)^{\frac{1}{2}}=P\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_r\end{bmatrix} & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}R'=A.$$

用 PR' 右乘(3)式两边得

$$(AA')^{\frac{1}{2}}PR'=A.$$

令 $Q=PR'$ 即得 1).

2) 由 A 可唯一地决定 $(A'A)^{\frac{1}{2}}$, $(AA')^{\frac{1}{2}}$, 而当 A 非奇异时, $(AA')^{-\frac{1}{2}}$ 存在, 可唯一决定 $Q=(AA')^{-\frac{1}{2}}A$.

1250. 设 A,B 为任意 n 阶实矩阵, 且 $A'A=B'B$, 则 $B=QA$, 这里 Q 为正交矩阵.

证 $\because A'A=B'B$, $\therefore (B'B)^{\frac{1}{2}}=(A'A)^{\frac{1}{2}}$. 由第 **1249** 条得

$$B=Q_2(B'B)^{\frac{1}{2}}=Q_2(A'A)^{\frac{1}{2}},$$
$$A=Q_1(A'A)^{\frac{1}{2}},$$

其中 Q_1,Q_2 为正交阵. 所以 $B=Q_2Q_1'Q_1(A'A)^{\frac{1}{2}}=QA$, 这里 $Q=Q_2Q_1'$ 为正交矩阵.

注 当 A 是非奇异矩阵时, 本条极易证明.

因为由 $A'A=B'B$, 得

$$(BA^{-1})'(BA^{-1})=(A^{-1})'B'BA^{-1}=E,$$

这说明 $Q=BA^{-1}$ 是正交矩阵, 由此即得 $B=QA$.

1251. $2n$ 阶矩阵 $\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & A^{-1}\end{bmatrix}$ 总可写成 n 个形如 $\begin{bmatrix}E & P\\ 0 & E\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}E & 0\\ Q & E\end{bmatrix}$ 的矩阵的乘积.

证 因为

$$\begin{bmatrix}E & -E\\ 0 & E\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E & 0\\ E-A^{-1} & E\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E & A\\ 0 & E\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & A^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E & 0\\ E-A & E\end{bmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix},$$

所以

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E & A \\ 0 & E \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} E & 0 \\ E-A^{-1} & E \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} E & -E \\ 0 & E \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} E & 0 \\ E-A & E \end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix} E & -A \\ 0 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & 0 \\ A^{-1}-E & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & E \\ 0 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & 0 \\ A-E & E \end{pmatrix}.$$

1252. 任何 n 阶方阵可表为一个满秩矩阵与一个幂等矩阵的积.

证 设秩 $A=r$,存在满秩矩阵 P,Q,使得

$$PAQ=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

于是

$$A=P^{-1}\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q^{-1}=(P^{-1}Q^{-1})\left[Q\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q^{-1}\right],$$

其中 $P^{-1}Q^{-1}$是满秩矩阵,$Q\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q^{-1}$是幂等矩阵.

1253. 任何 n 阶实正规矩阵 A 必可分解为两个实对称矩阵的乘积,且其中有一个是正交对合矩阵.

证 设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ 是 A 的所有实特征值,$a_i+\sqrt{-1}b_i$ 是 A 的所有复特征值,$i=1,\cdots,s$,其中 $r+2s=n$,则

$$A=Q\left[\lambda_1,\cdots,\lambda_r,\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix} a_s & b_s \\ -b_s & a_s \end{pmatrix}\right]Q', \qquad (1)$$

其中 Q 是正交矩阵. 因为

$$\begin{bmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_i & a_i \\ a_i & -b_i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=B_iJ_2,i=1,\cdots,s, \qquad (2)$$

此处

$$B_i=\begin{bmatrix} b_i & a_i \\ a_i & -b_i \end{bmatrix},J_2=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

分别是实对称矩阵与对称、正交矩阵,故由(1)与(2)式即得

$$A=(Q[\lambda_1,\cdots,\lambda_r,B_1,\cdots,B_s]Q')(Q[I_r,J_2,\cdots,J_2]Q')=SP$$

易知矩阵 $S=Q[\lambda_1,\cdots,\lambda_r,B_1,\cdots,B_s]Q'$ 是对称矩阵,而 $P=Q[I_r,J_2,\cdots,J_2]Q'$ 是正交对合矩阵,即 $P'P=E,P^2=E$.

1254. 设 A 为复数域上可逆矩阵,则存在 B,使 $A=B^2$.

证 存在可逆阵 C 使 $C^{-1}AC=\begin{bmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_s \end{bmatrix}$, $J_i(i=1,\cdots,s)$ 为若当块. 设

$$J_i=\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & 0 \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & \lambda_i \end{bmatrix},\lambda_i\neq 0,B_i=\begin{bmatrix} x & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ & x & \cdots & b_{2r} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & x \end{bmatrix},$$

令 $B_i^2=J_i$,这样可由下至上得到 $x^2=\lambda_i$. 取 $x=\sqrt{\lambda_i}$,由 $2xb_{r-1,r}=1$ 得 $b_{r-1,r}=\frac{1}{2x}$. 再求: $b_{r-2,r-1},b_{r-2,r},\cdots$,因而求出 B_i,故

$$C^{-1}AC=\begin{bmatrix} B_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & B_s^2 \end{bmatrix}.$$

所以

$$A=\left(C\begin{bmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_s \end{bmatrix}C^{-1}\right)^2=B^2,$$

这里

$$B=C\begin{bmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_s \end{bmatrix}C^{-1}.$$

1255. 设 A 与 B 为数域 K 上的同阶方阵，则矩阵 $\lambda E-A$ 与 $\lambda E-B$ 等价的充要条件是 A 与 B 有分解式：$A=PQ,B=QP$，其中 P 与 Q 都是 K 上的方阵，且其中至少有一个是可逆矩阵.

证　必要性. $\lambda E-A$ 与 $\lambda E-B$ 等价，故 A 与 B 相似，因而存在可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP=B$. 令 $P^{-1}A=Q$，则 $A=PQ,B=QP$.

充分性. 设有分解式 $A=PQ,B=QP$，且 P 为可逆阵，故 $Q=BP^{-1}$. 所以 $A=PBP^{-1}$. 从而 A 相似于 B，自然就有 $\lambda E-A$ 与 $\lambda E-B$ 等价.

三、和因子分解

1256. （谱分解），设 n 阶矩阵 A 相似于对角矩阵，则

$$A=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\alpha_i\beta_i',$$

$$\beta_i'\alpha_j=\begin{cases}1, i=j,\\0, i\neq j,\end{cases}$$

其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的全部特征值，α_i 为 A 的属于 λ_i 的特征向量，β_i 为 A' 的属于 λ_i 的特征向量.

证　A 相似于对角矩阵，即存在可逆矩阵 $T=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，使得

$$A=T\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)T^{-1}.$$

令 $(T^{-1})'=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$，则

$$A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)(\beta_1,\cdots,\beta_n)'=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\alpha_i\beta_i'.$$

由 $E_n=T^{-1}T=(\beta_1,\cdots,\beta_n)'(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，易得

$$\beta_i'\alpha_j=\begin{cases}0, i\neq j,\\1, i=j.\end{cases}$$

由 $AT=T\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$，得

$$A\alpha_i = \lambda_i\alpha_i, i=1,2,\cdots,n.$$

此即表明 α_i 为 A 的属于 λ_i 的特征向量. 由

$$A'(T^{-1})' = (T^{-1})'\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n),$$

得

$$A'\beta_i = \lambda_i\beta_i, i=1,2,\cdots,n.$$

1257. 设 A 为 n 阶矩阵, 则 $A=B+C$, 其中 B 相似于对角矩阵, C 为幂零矩阵, 且 $BC=CB$.

证 由第 **1245** 条知, 存在可逆矩阵 P, 使得 $A=P^{-1}JP$, 其中 $J=\mathrm{diag}(J_1,\cdots,J_s)$, 而且 $J_i(i=1,\cdots,s)$ 是主对角元为 λ_i 的上三角 Jordan 块. 令

$$C_i = J_i - \lambda_i E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}, i=1,\cdots,s,$$

易知 C_i 是幂零矩阵. 因而 $C=P^{-1}\mathrm{diag}(C_1,\cdots,C_s)P$ 也是幂零矩阵. 再令 $B=P^{-1}\mathrm{diag}(\lambda_1E_1,\cdots,\lambda_sE_s)P$, 则 B 相似于对角矩阵. 且 $B+C=A$, $BC=CB$.

1258. 一个秩为 r 的矩阵总可以表成 r 个秩为 1 的矩阵之和.

证 设 A 为秩等于 r 的 $m\times n$ 矩阵, 则存在可逆矩阵 P 与 Q, 使

$$\begin{aligned} A &= P\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q \\ &= P(e_1,\cdots,0)Q + \cdots + P(0,\cdots,e_r,\cdots,0)Q. \end{aligned} \tag{1}$$

其中 e_i 为第 i 行为 1, 其余为 0 的 n 维列向量.

显然(1)式右端每项的秩为 1.

1259. $m\times n$ 矩阵 A 的秩为 r 的充要条件是 A 有分解式

$$A = \alpha_1\beta_1' + \alpha_2\beta_2' + \cdots + \alpha_r\beta_r',$$

其中 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 为线性无关的 m 维列向量, $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 为线性无关的

n 维列向量.

证　必要性　由第 **1258** 条(1)式,令

$$P=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m),Q=(\beta_1,\cdots,\beta_n)',$$

则

$$A=\alpha_1\beta'_1+\alpha_2\beta'_2+\cdots+\alpha_r\beta'_r.$$

因 P,Q 是满秩方阵,故 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 为线性无关的 m 维列向量, $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 为线性无关的 n 维列向量.

充分性　由

$$A=\alpha_1\beta_1'+\cdots+\alpha_r\beta_r'=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)(\beta_1,\cdots,\beta_r)'$$

知秩 $A\leqslant r$. 因为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 是线性无关的,所以 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)$ 中一定存在 r 阶子式不为零. 利用行变换,把它换到前 r 行,即存在可逆矩阵 P_1,使

$$P_1(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)=\begin{bmatrix}C_1\\C_2\end{bmatrix},|C_1|\neq 0.$$

因而 $P_1A=\begin{bmatrix}A_1\\A_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_1\\C_2\end{bmatrix}B$,这里 $B=\begin{bmatrix}\beta_1'\\\vdots\\\beta_r'\end{bmatrix}$.

$\therefore A_1=C_1B$,于是有秩 $A_1=$ 秩 $B=r$. 由此得秩 $A\geqslant$ 秩 $A_1=r$,故而秩 $A=r$.

第十六章　广义逆、矩阵方程、不等式

一、减号广义逆

1260. 什么叫做减号广义逆?

答 设 A 为 $n\times m$ 矩阵,若存在 $m\times n$ 矩阵 G,使 $AGA=A$,则称 G 为 A 的一个减号广义逆.

注 A 的全部减号广义逆的集合记为 $A\{1\}$,$A\{1\}$的元素用 $A_1^-,A_2^-,\cdots$表示.

1261. 设 $A=0$ 为 $n\times m$ 矩阵,则 $A\{1\}=P^{m\times n}$.

证 $A\{1\}\subseteq P^{m\times n}$是显然的.

$\forall X\in P^{m\times n}$, 则 $AXA=0X0=0=A$. 所以 $X\in A\{1\}$,即 $P^{m\times n}\subseteq A\{1\}$.即证.

1262. 设 $m\times n$ 矩阵 A 的秩为 r,且 $A=H\begin{bmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}Q$,则

$$A\{1\}=\left\{Q^{-1}\begin{pmatrix}E_r & C\\ D & F\end{pmatrix}H^{-1}\,\middle|\,C\in P^{r\times(m-r)},D\in P^{(n-r)\times r},F\in P^{(n-r)\times(m-r)}\right\}.$$

1263. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix}$,求 $A\{1\}$.

解

$$\begin{bmatrix}A & E_2\\ E_3 & \end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \end{bmatrix}\longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc:cc}1&0&0&1&0\\2&4&-1&0&1\\ \hdashline 1&1&-2&&\\0&1&0&&\\0&0&1&&\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc:cc}1&0&0&1&0\\0&0&-1&0&1\\ \hdashline -3&-7&-2&&\\0&1&0&&\\2&4&1&&\end{array}\right]\longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc:cc}1&0&0&1&0\\0&-1&0&0&1\\ \hdashline -3&-2&-7&&\\0&0&1&&\\2&1&4&&\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc:cc}1&0&0&1&0\\0&1&0&0&-1\\ \hdashline -3&-2&-7&&\\0&0&1&&\\2&1&4&&\end{array}\right].$$

令　$H=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$，　$Q=\begin{bmatrix}-3&-2&-7\\0&0&1\\2&1&4\end{bmatrix}$，则

$$HAQ=(E_2,0),\quad A=H^{-1}(E_2,0)Q^{-1}.$$

所以　$A\{1\}=\left\{Q\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\a&b\end{bmatrix}H\ \middle|\ \text{其中 } a,b \text{ 为任意数}\right\}.$

1264.　设 A 是 $m\times n$ 矩阵，则 A 的减号广义逆唯一的充要条件是 $m=n$，且 A^{-1}存在.

证　先证充分性.　这时 $A^{-1}\in A\{1\}$. 任取 $X\in A\{1\}$，因为 $AXA=A$，用 A^{-1}左右乘之得 $X=A^{-1}$.　故 $A\{1\}=\{A^{-1}\}$为单元素集. 从而减号广义逆唯一.

再证必要性.　设秩 $A=r$.　当 $r=0$ 时，$A=0$. 由第 **1261** 条知 $A\{1\}$不是单元素集，这与必要性假设矛盾. 所以 $r>0$.

当 $m\neq n$ 时，A 通过初等变换可变为下列三种矩阵之一：

$$\begin{bmatrix}E_r&0\\0&0\end{bmatrix},\quad (E_r\quad 0),\quad \begin{bmatrix}E_r\\0\end{bmatrix}.$$

从而不管变为哪一种，比如第一种，则 $A=P\begin{bmatrix}E_r&0\\0&0\end{bmatrix}Q$. 从而由第

1262 条知

$A\{1\}=\left\{Q^{-1}\begin{bmatrix}E_r & * \\ * & *\end{bmatrix}P^{-1}\middle|\ *\text{为相应阶数的任意子矩阵}\right\}$，这与 $A\{1\}$是单元素集矛盾．所以 $m=n$.

下证 A^{-1}存在．用反证法．若 A^{-1}不存在，则$|A|=0$. 从而 $r<n$，$A=P\begin{bmatrix}E_r & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}Q$. 由上述讨论可得出 $A\{1\}$为非单元素集，矛盾． $\therefore A^{-1}$存在.

1265. 1) 秩 $A^{-}\geqslant$秩 A.

2) 秩 $A=$秩 $AA^{-}=$秩 $A^{-}A$.

证 1) 因为 $A=AA^{-}A$，所以秩 $A\leqslant$秩 A^{-}.

2) 由 $A=AA^{-}A$，得秩 $A\leq$秩 $AA^{-}\leqslant$秩 A，故秩 $A=$秩 AA^{-}. 另一等式同理可证.

1266. 若秩$(AB)=$秩 B，则

$$ABX_1=ABX_2\Longleftrightarrow BX_1=BX_2.$$

证 充分性显然．下证必要性.

由秩$(AB)=$秩 B 知齐次线性方程组

$$ABX=0 \quad \text{与 } BX=0 \tag{1}$$

同解．令

$$X_1=(\alpha_1,\cdots,\alpha_s),\quad X_2=(\beta_1,\cdots,\beta_s), \tag{2}$$

由 $ABX_1=ABX_2$ 及(2)式得

$$AB\alpha_i=AB\beta_i,\quad \text{即 } AB(\alpha_i-\beta_i)=0,i=1,2,\cdots,s. \tag{3}$$

由(1)可知 $B(\alpha_i-\beta_i)=0$， $i=1,2,\cdots,s$. 此即 $BX_1=BX_2$.

1267. 若秩$(AB)=$秩 A，则

$$X_1AB=X_2AB\Longleftrightarrow X_1A=X_2A.$$

证 由秩$(AB)=$秩 A 得秩 $A'=$秩$(AB)'=$秩$(B'A')$. 于是 $X_1(AB)=X_2(AB)\Longleftrightarrow(AB)'X_1'=(AB)'X_2'$ $\Longleftrightarrow B'A'X_1'=B'A'X_2'$. 由第 **1266** 条知

$X_1(AB)=X_2(AB)\Longleftrightarrow A'X_1{}'=A'X'_2\Longleftrightarrow X_1A=X_2A$.

1268. 1) $\overline{A'}A(\overline{A'}A)^-\overline{A'}=\overline{A'}$;

2) $A(\overline{A'}A)^-\overline{A'}A=A$.

证 因为 $\overline{A'}A(\overline{A'}A)^-\overline{A'}A=\overline{A'}A$，且秩$(\overline{A'}A)=$秩$\overline{A'}$，所以由第 **1267** 条即得 1).

2)由秩$(\overline{A'}A)=$秩 A 及第 **1266** 条即得 2).

二、 加号广义逆

1269. 什么叫做加号广义逆？

答 设 A 为 $n\times m$ 复矩阵，若存在复矩阵 X，使

1) $AXA=A$， 2) $XAX=X$，

3) $\overline{(AX)'}=AX$， 4) $\overline{(XA)'}=XA$，

则称 X 为 A 的一个加号广义逆，或称 Moore-Penrose 广义逆，记 X 为 A^+.

注 ① $AA^+A=A$， $A^+AA^+=A^+$，

$\overline{(AA^+)'}=AA^-$， $\overline{(A^+A)'}=A^+A$.

② $A^+\in A\{1\}$.

1270 设 A 为 $m\times n$ 复矩阵，秩 $A=r$，且 $A=PQ$ 为满秩分解（见第 **1227** 条），则 $G=\overline{Q'}(Q\overline{Q'})^{-1}(\overline{P'}P)^{-1}\overline{P'}$ 为 A 的加号广义逆.

证 1) $AGA=(PQ)[\overline{Q'}(Q\overline{Q'})^{-1}(\overline{P'}P)^{-1}\overline{P'}](PQ)$

$=PQ=A$.

2) $GAG=\overline{Q'}(Q\overline{Q'})^{-1}(\overline{P'}P)^{-1}\overline{P'}PQ\overline{Q'}(Q\overline{Q'})^{-1}(\overline{P'}P)^{-1}\overline{P'}$

$=G$.

3) $\because AG=PQ\overline{Q'}(Q\overline{Q'})^{-1}(\overline{P'}P)^{-1}\overline{P'}=P(\overline{P'}P)^{-1}\overline{P'}$，

$\therefore$ $\overline{(AG)'}=AG$.

4) $\overline{(GA)'}=GA$ 也易于验证.

由第 **1269** 条知 G 是 A 的加号广义逆.

1271.　A 的 Moore-Penrose 广义逆是唯一的.

证　设 X_1, X_2 是 A 的两个加号广义逆，则

$$\begin{aligned} X_1 &= X_1AX_1 = \overline{(X_1A)'}X_1 = \overline{A'X'_1}X_1 = \overline{(AX_2A)'X'_1}X_1 \\ &= \overline{A'}\,\overline{X'_2}\,\overline{A'}\,\overline{X'_1}X_1 = \overline{(X_2A)'A'X'_1}X_1 = X_2A\overline{A'}\,\overline{X'_1}X_1 \\ &= X_2\overline{(AX_2)'}AX_1 = X_2\overline{X'_2A'}AX_1 = X_2\overline{X'_2}\,\overline{A'}\,\overline{(AX_1)'} \\ &= X_2\overline{X'_2}\,\overline{A'}\,\overline{X'_1}\,\overline{A'} = X_2\overline{X'_2(AX_1A)'} = X_2\overline{X'_2A'} \\ &= X_2\overline{(AX_2)'} = X_2AX_2 = X_2. \end{aligned}$$

注　当 A^{-1} 存在时，$A^{-1} = A^{+} = A^{-}$.

1272.　$(A^{+})^{+} = A$.

证　由第 **1269** 条知 A 与 A^{+} 的地位是对称的，所以

$$(A^{+})^{+} = A.$$

1273.　$(A')^{+} = (A^{+})'$.

证　下证 $(A^{+})'$ 是 A' 的加号广义逆.

1）$(A')(A^{+})'A' = (AA^{+}A)' = A'$；

2）$(A^{+})'(A')(A^{+})' = (A^{+}AA^{+})' = (A^{+})'$；

3）$\overline{(A'(A^{+})')'} = \overline{A^{+}A} = \overline{\overline{(A^{+}A)'}} = (A^{+}A)' = A'(A^{+})'$；

4）$\overline{((A^{+})'A')'} = (A^{+})'A'$ 也易于验证.

1274.　设 A, B 是实方阵，且 $A = P_1BP_2$，其中 P_1, P_2 都是正交矩阵，则 $A^{+} = P_2{}'B^{+}P_1{}'$.

证　记 $X = P_2{}'B^{+}P'_1$，则

$$\begin{aligned} AXA &= (P_1BP_2)(P_2{}'B^{+}P_1{}')(P_1BP_2) = P_1(BB^{+}B)P_2 \\ &= P_1BP_2 = A; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{(AX)'} &= (AX)' = (P_1BP_2P_2{}'B^{+}P_1{}')' \\ &= (P_1BB^{+}P_1{}')' = P_1(BB^{+})'P_1{}' = P_1(BB^{+})P_1{}' = AX; \end{aligned}$$

$XAX = X$，$\overline{(XA)'} = XA$ 均易于验证，故 $X = A^{+}$.

1275.　1）$A^{+} = (\overline{A'}A)^{+}\overline{A'}$.

2）$A^{+} = \overline{A'}(A\overline{A'})^{+}$.

证　1) 令 $X=(\overline{A}'A)^{+}\overline{A}'$，则

$AXA=A[(\overline{A}'A)^{+}\overline{A}']A=A(\overline{A}'A)^{+}\overline{A}'A=A$，（第 **1268** 条）

$XAX=[(\overline{A}'A)^{+}\overline{A}']A[(\overline{A}'A)^{+}\overline{A}']=(\overline{A}'A)^{+}\overline{A}'=X$，

$\overline{(AX)'}=\overline{(A(\overline{A}'A)^{+}\overline{A}')'}=A[(\overline{A}'A)^{+}]'\overline{A}'=A(\overline{A}'A)^{+}\overline{A}'=AX$，

$\overline{(XA)'}=XA$，由此即得 1)．

2) 可类似于 1) 验证．

1276.　秩 $A=$ 秩 A^{+}．

证　秩 $A^{+}=$ 秩 $A^{++}\geqslant$ 秩 A．再由 $A^{+}=A^{+}AA^{+}$ 得

$$秩\ A^{+}\leqslant 秩\ A.\ 所以秩\ A=秩\ A^{+}.$$

1277.　秩$(A^{+}A)=$ 秩$(AA^{+})=$ 秩 A．

证　秩$(AA^{+})\leqslant$ 秩 A，再由 $A=AA^{+}A$ 得

秩 $A\leqslant$ 秩(AA^{+})．故　秩$(AA^{+})=$ 秩 A．

另一等式同理可证．

1278.　1) $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，求 A^{+}．

2) $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 0 & -2\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{bmatrix}$，求 A^{+}．

解　1) 因为 $|A|=1$，所以 A 为可逆矩阵，故

$$A^{+}=A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

2) 可求出秩 $A=2$．令

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 0 & -2\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\\ -1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & x\\ 0 & 1 & y\end{bmatrix},$$

解得 $x=-1, y=0$. 从而得出 A 的满秩分解为 $A=PQ$,其中

$$P=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\\ -1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix},\quad Q=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

由第 **1270** 条,因为 P,Q 都是实矩阵,所以

$$A^+=Q'(QQ')^+(P'P)^{-1}P'=\frac{1}{20}\begin{bmatrix}2 & 3 & -1 & 1\\ 4 & 1 & 3 & -3\\ -2 & -3 & 1 & -1\end{bmatrix}.$$

三、 线性方程组的解的公式

1279. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵,$N(A)$ 为 $Ax=0$ 的解空间,其中 x 为 $n\times 1$ 矩阵,则

$$N(A)=\{(E-A^+A)x \mid x\in P^{n\times 1}\}. \qquad (1)$$

证 令 $M=\{(E-A^+A)x \mid x\in P^{n\times 1}\}$. 任取 $y_0\in M$,那么存在 $x_0\in P^{n\times 1}$,使 $y_0=(E-A^+A)x_0$,于是 $Ay_0=(A-AA^+A)x_0=0$. 故 $y_0\in N(A)$. 此即 $M\subseteq N(A)$.

反之,任取 $x_0\in N(A)$,则 $Ax_0=0$,于是 $A^+Ax_0=0$,因而 $x_0=(E-A^+A)x_0\in M$. 此即 $N(A)\subseteq M$. 故(1)式成立.

1280. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵,则

$Ax=0$ 只有零解 $\Longleftrightarrow N(A)=\{0\}\Longleftrightarrow$ 秩 $A=n\Longleftrightarrow E=A^+A$.

证 秩 $A=n\Longleftrightarrow Ax=0$ 只有零解 $\Longleftrightarrow N(A)=\{0\}$ $\Longleftrightarrow E-A^+A=0\Longleftrightarrow E=A^+A$.

1281. 若非齐次线性方程组 $AX=B$ 有解,则 A^+B 为它的一个特解.

证 设 $Ax_0=B$,那么

$$A(A^+B)=A(A^+(Ax_0))=(AA^+A)x_0=Ax_0=B.$$

1282. 设 M 为非齐次线性方程组 $Ax=B$ 的解集,那么

$$M=\{A^+B+(E-A^+A)x \mid x\in P^{n\times 1}\},$$

其中 A 为 $m\times n$ 矩阵.

证　因为非齐次线性方程组的全部解由它的一个特解与它的导出组的全部解之和构成，所以由第 **1279** 条与第 **1281** 条即得.

四、 矩阵方程

1283.　什么叫做齐次矩阵方程？

答　设 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $s\times t$ 矩阵，则称 $AXB=0$ 为齐次矩阵方程，其中 X 为 $n\times s$ 未知矩阵.

注　齐次矩阵方程显然有零解.

1284.　在第 **1283** 条假设及记号下，令 $N(A,B)$ 为齐次矩阵方程 $AXB=0$ 的全部解的集合，则 $N(A,B)$ 为 $P^{n\times s}$ 的一个子空间.

证　$\forall X_1,X_2\in N(A,B)$，$\forall k,l\in P$，由 $AX_1B=0$，$AX_2B=0$ 易证 $A(kX_1+lX_2)B=0$. 即得 $N(A,B)$ 为 $P^{n\times s}$ 的子空间.

1285.　设 $N(A,B)$ 为 $AXB=0$ 的解空间，则

$$N(A,B)=\{X-A^+AXBB^+ \mid X\in P^{n\times s}\},\tag{1}$$

其中 $A\in P^{m\times n}$，　$B\in P^{s\times t}$.

证　令 M 为(1)式右端，任取 $Y_0\in M$，则

$$Y_0=X_0-A^+AX_0BB^+,$$

$$AY_0B=AX_0B-A(A^+AX_0BB^+)B=AX_0B-AX_0B=0.$$

此即 $Y_0\in N(A,B)$，$M\subseteq N(A,B)$.

反之，　$\forall X_0\in N(A,B)$，则 $AX_0B=0$，$A^+AX_0BB^+=0$. 故 $X_0=X_0-A^+AX_0BB^+\in M$. 此即 $N(A,B)\subseteq M$.

综上即得(1)式.

1286.　$AXB=D$ 有解的充要条件是 $AA^+DB^+B=D$.

证　充分性　由 $A(A^+DB^+)B=D$ 知 $AXB=D$ 有解为 A^+DB^+.

必要性　设 $AXB=D$ 有解为 X_0，即 $AX_0B=D$，那么

$$D=AX_0B=AA^+AX_0BB^+B=AA^+(AX_0B)B^+B=AA^+DB^+B.$$

1287.　若 $AXB=D$ 有解，则 A^+DB^+ 为它的一个解.

证　由第 1286 条可知.

1288.　设非齐次矩阵方程 $AXB=D$ 有解，其解集为 M，则

$$M=\{A^+DB^++(X-A^+AXBB^+)\mid X\in P^{n\times s}\},\qquad (1)$$

其中 A,B 分别为 $m\times n$ 与 $s\times t$ 矩阵.

证　令(1)式右端为 S. 下证 $M=S$.　$\forall\, Y_0\in S$，则

$$Y_0=A^+DB^++(X_0-A^+AX_0BB^+),$$

$$AY_0B=AA^+DB^+B-A(X_0-A^+AX_0BB^+)B=D.$$

所以 $Y_0\in M$，即 $S\subseteq M$.

反之，$\forall\, Y_1\in M$，　$AY_1B=D$. 但 $A(A^+DB^+)B=D$，故 $A(Y_1-A^+DB^+)B=0$. 此即 $Y_1-A^+DB^+\in N(A,B)$. 从而存在 $X_1\in P^{n\times s}$，使

$$Y_1-A^+DB^+=X_1-A^+AX_1BB^+,$$

$$Y_1=A^+DB^++(X_1-A^+AX_1BB^+)\in S.$$

此即 $M\subseteq S$.

综上所述即得(1)式.

1289.　设

$$A=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&1&-1\\2&0&-2\\-1&1&1\\1&-1&-1\end{bmatrix},$$

求 $AXB=0$ 的解空间 $N(A,B)$

解　由于

$$A^+=\begin{bmatrix}1&-2\\0&1\end{bmatrix},\quad B^+=\frac{1}{20}\begin{bmatrix}2&3&-1&1\\8&2&6&-6\\-2&-3&1&-1\end{bmatrix},$$

$$A^+A=E,BB^+=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}3&2&1&-1\\2&3&-1&1\\1&-1&2&-2\\-1&1&-2&2\end{bmatrix}.$$

所以由第 **1285** 条得

$$N(A,B)=\left\{X-\frac{1}{5}X\begin{bmatrix}3&2&1&-1\\2&3&-1&1\\1&-1&2&-2\\-1&1&-2&2\end{bmatrix}\middle| X\in P^{2\times 4}\right\}.$$

1290. 设

$$A=\begin{bmatrix}1&2&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&1&-1\\2&0&-2\\-1&1&1\\1&-1&-1\end{bmatrix}=D,$$

求 $AXB=D$ 的解集 M.

证 由于 $A^+=A^{-1}$,所以 $AA^+DB^+B=BB^+B=B=D$,故矩阵方程 $AXB=D$ 有解. 而

$$\begin{aligned}A^+DB^+&=A^{-1}BB^+\\&=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1&-2&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2&1&-1\\2&3&-1&1\\1&-1&2&-2\\-1&1&-2&2\end{bmatrix}\\&=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-1&-4&3&-3\\2&3&-1&1\\1&-1&2&-2\\-1&1&-2&2\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

故
$$M=\{A^+DB^++X-A^+AXBB^+\mid X\in P^{4\times 4}\}$$

$$=\left\{\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-1 & -4 & 3 & -3\\ 2 & 3 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 2 & -2\\ -1 & 1 & -2 & 2\end{bmatrix}+X-\frac{1}{5}X\begin{bmatrix}3 & 2 & 1 & -1\\ 2 & 3 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 2 & -2\\ -1 & 1 & -2 & 2\end{bmatrix}\middle| X\in P^{4\times 4}\right\}.$$

五、 凸函数

1291. 什么叫做凸函数?

答 设 $f(x)$ 是 (a,b) 上的实函数,如果对任意 $x_1,x_2\in(a,b)$,以及任意 $\alpha\in(0,1)$,都有

$$f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)\leqslant \alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2),\qquad(1)$$

成立,则称 $f(x)$ 为 (a,b) 上的一个凸函数.

注 凸函数的几何意义是下凸的 (见图 16-1 所示). 在图 16—1中,设有 $P_1(x_1,f(x_1))$,$P_2(x_2,f(x_2))$,且 Z 是 (x_1,x_2) 中任一点,则

$$z=\alpha x_1+(1-\alpha)x_2,\alpha\in(0,1).\ (2)$$

设 $P_3(z,f(z))$,且 $P(z,y_0)$ 为弦 P_1P_2 上对应横坐标为 z 的点,

$f(z)=f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)$,

$y_0=\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)$,由(1)知 $f(z)\leqslant y_0$,即 $y=f(x)$ 是下凸的.

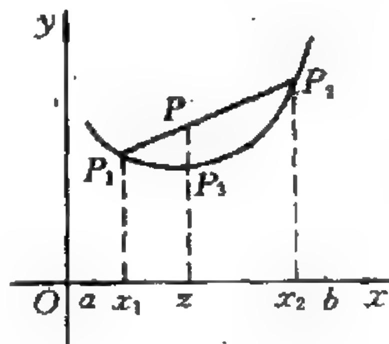


图 16-1

1292. 设 $f(x)$ 是 (a,b) 上的连续实函数,则 $f(x)$ 是 (a,b) 上凸函数的充要条件是对任意 $x_1,x_2\in(a,b)$,都有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)].$$

证 必要性显然,因为只要令 $\alpha=\frac{1}{2}$,由第 **1291** 条即得.

下证充分性. 用反证法. 若 $f(x)$ 不是凸函数,则一定存在两点 $x_1,x_2\in(a,b)$,不失一般性,设 $x_1<x_2$,且对应曲线 $y=f(x)$

上的点为 $P_1(x_1,f(x_1))$，$P_2(x_2,f(x_2))$，而曲线 $y=f(x)$ 上至少有一点 M 在弦 P_1P_2 的上方(见图 16-2).

由于 $f(x)$ 连续，这时在 M 的左边曲线 $y=f(x)$ 与弦 P_1P_2 有一个最右的交点 S(不排斥 S 就是 P_1). 同样在 M 右边一定有最左的交点 T(不排斥它就是 P_2). 设 S 与 T 的横坐标分别为 x_3,x_4，那么在 (x_3,x_4) 内，曲线的所有点都在弦 ST 的上方，从而有

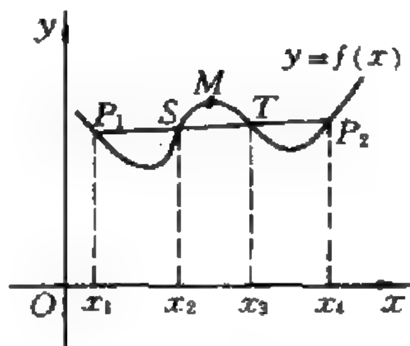


图 16-2

$$f\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)>\frac{1}{2}[f(x_3)+f(x_4)].$$

这与充分性假设矛盾.

1293. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上有二阶导数 $f''(x)$，那么 $f(x)$ 为 (a,b) 上的凸函数的充要条件为 $f''(x)\geqslant 0,\forall\, x\in(a,b)$.

证　必要性　用反证法. 若存在 $x_0\in(a,b)$ 使 $f''(x_0)<0$，则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=f''(x_0)=-\delta_1<0,\text{其中 }\delta_1>0.$$

由上式知 $f'(x)$ 在 x_0 附近递减，从而存在 $h>0$，使得对 $0<u\leqslant h$，有 $\dfrac{f'(x_0+u)-f'(x_0)}{u}<-\delta$，其中 $\delta>0$. 从而

$$f'(x_0+u)-f'(x_0)<-\delta u,$$

$$f'(x_0+u)-f'(x_0-u)\leqslant f'(x_0+u)-f'(x_0)<-\delta u.$$

将上式两边积分得

$$\int_0^h[f'(x_0+u)-f'(x_0-u)]du<\int_0^h(-\delta u)du=-\frac{1}{2}\delta h^2<0.$$

但

$$\int_0^h[f'(x_0+u)-f'(x_0-u)]du=f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0),$$

所以
$$f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)<0,$$

即
$$f(x_0)>\frac{1}{2}[f(x_0+h)+f(x_0-h)].$$
这与凸函数的假设矛盾.

充分性　任取 $x_1,x_2\in(a,b)$,并设 $x_1\leqslant x_2$. 令 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$,有展开式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(\xi)(x-x_0)^2,$$

其中 ξ 在 x 与 x_0 之间. 在上式中令 $x=x_1$,得

$$f(x_1)=f(x_0)+f'(x_0)(x_1-x_0)+\frac{1}{2!}f''(\xi_1)(x_1-x_0)^2,$$

其中 $x_1<\xi_1<x_0$,但 $f''(\xi_1)\geqslant 0$,所以

$$f(x_1)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x_1-x_0). \tag{1}$$

类似地有

$$f(x_2)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x_2-x_0). \tag{2}$$

由　$\frac{1}{2}\times(1)+\frac{1}{2}\times(2)$　得

$$\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]\geqslant f(x_0)=f(\frac{x_1+x_2}{2}),$$

即 $f(x)$ 为凸函数.

1294.　设 $f(x)=ax^2+bx+c,a\geqslant 0$,则 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 内的凸函数.

1295.　$f(x)=-\ln x$ 是 $(0,+\infty)$ 内的凸函数.

1296. (Jenson)设 $f(x)$ 是 (a,b) 上的实函数,则 $f(x)$ 是 (a,b) 上的凸函数 $\Longleftrightarrow$ 对任意 $x_i\in(a,b),\lambda_i\geqslant 0,i=1,2,\cdots,k,\sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1$,都有

$$f(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i x_i)\leqslant\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f(x_i). \tag{1}$$

证　充分性　令 $k=2$,由第 **1191** 条即得.

必要性　用数学归纳法证明. 当 $k=1,2$ 时,结论都是显然的.

归纳假设结论对 x_i 的个数小于 k 时都成立. 下证结论对 x_i 的个数等于 k 时成立.

$$f(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i x_i)=f\left[\lambda_1 x_1+\cdots+\lambda_{k-2}x_{k-2}+(\lambda_{k-1}+\lambda_k)\frac{\lambda_{k-1}x_{k-1}+\lambda_k x_k}{\lambda_{k-1}+\lambda_k}\right]$$

$$\leqslant\lambda_1 f(x_1)+\cdots+\lambda_{k-2}f(x_{k-2})+(\lambda_{k-1}+\lambda_k)f\left[\frac{\lambda_{k-1}x_{k-1}+\lambda_k x_k}{\lambda_{k-1}+\lambda_k}\right]$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f(x_i).$$

1297. 设 $f(x)$是(a,b)上的连续凸函数,对 $x_1,x_2\in(a,b)$, $x_1<x_2$,任意 $\alpha,\beta\in(0,1)$,其中 $\alpha+\beta=1$,有

$$f(\alpha x_1+\beta x_2)\leqslant\alpha f(x_1)+\beta f(x_2),\tag{1}$$

那么(1)式等号成立$\Longleftrightarrow f(x)$在$[x_1,x_2]$内是线性的.

证 充分性 显然.

必要性 用反证法,设 $f(x)$在$[x_1,x_2]$内不是线性的,则存在 $x_4\in(x_1,x_2)$,点 $P_4(x_4,f(x_4))$在弦 $P_1P_2(P_1(x_1,f(x_1))$, $P_2(x_2,f(x_2)))$的下方(见图 16-3). 由于(1)式取等号,即

$$f(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha f(x_1)+\beta f(x_2).\tag{2}$$

如果令 $x_3=\alpha x_1+\beta x_2$,那么点 $P_3(x_3,f(x_3))$在弦 P_1P_2 上. 这时有 $x_4\in(x_1,x_3)$或 $x_4\in(x_3,x_2)$.

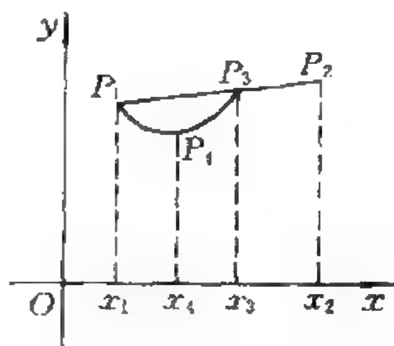


图 16-3

不失一般性,设 $x_4\in(x_1,x_3)$(见图 16-3), 从而 $x_3\in(x_4,x_2)$. 由于 $f(x)$是凸函数,那么 P_3 或者在弦 P_1P_2 上,或者在 P_2P_4 的下方,而 P_2P_4 在 P_1P_2 的下方,所以 P_3 在 P_1P_2 的下方. 这就与 P_3 在 P_1P_2 上矛盾.

1298. 设 $f(x)$是(a,b)上的连续凸函数,则

1) $f(\alpha x_1+\beta x_2)\leqslant\alpha f(x_1)+\beta f(x_2)$,

其中 $x_1,x_2\in(a,b),\alpha,\beta\in(0,1),\alpha+\beta=1$； (1)

2) 当 $f(x)$ 在 (a,b) 的任意区间内都非线性时，(1)式成立等号 $\Longleftrightarrow x_1=x_2$.

证 1) 显然.

2) 若 $x_1=x_2$，则(1)式等号成立. 否则，假定 $x_1\neq x_2$，由第 **1297** 条，$f(x)$ 一定是线性的. 这与假设矛盾.

1299. 设 $f(x)$ 是 (a,b) 上的连续凸函数，如果 $f(x)$ 在包含 $x_i(i=1,\cdots,n)$ 的任一区间内都不是线性的，且

$$f\Big(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\Big)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i), \tag{1}$$

其中 $\lambda_i\in(0,1),x_i\in(a,b),i=1,2,\cdots,n,\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=1$，则(1)式成立等号的充要条件是 $x_1=x_2=\cdots=x_n$.

证 充分性显然.

下证必要性. 当 $n=2$ 时，由第 **1298** 条知结论成立. 归纳假设结论对 x_i 的个数小于 n 的自然数成立. 下证结论对 n 成立. 由第 **1296** 条有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)&=f\Big(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\Big)\\&=f\Big[\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_{n-2}x_{n-2}+(\lambda_{n-1}+\lambda_n)\frac{\lambda_{n-1}x_{n-1}+\lambda_nx_n}{\lambda_{n-1}+\lambda_n}\Big]\\&=\lambda_1f(x_1)+\cdots+\lambda_{n-2}f(x_{n-2})+(\lambda_{n-1}+\lambda_n)f\Big(\frac{\lambda_{n-1}x_{n-1}+\lambda_nx_n}{x_{n-1}+\lambda_n}\Big)\\&=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i).\end{aligned}\tag{2}$$

因此

$$(\lambda_{n-1}+\lambda_n)f\Big(\frac{\lambda_{n-1}x_{n-1}+\lambda_nx_n}{\lambda_{n-1}+\lambda_n}\Big)=\lambda_{n-1}f(x_{n-1})+\lambda_nf(x_n).$$

那么

$$f\Big[\frac{\lambda_{n-1}x_{n-1}+\lambda_nx_n}{\lambda_{n-1}+\lambda_n}\Big]=\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_{n-1}+\lambda_n}f(x_{n-1})+\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}+\lambda_n}f(x_n).$$

由归纳假设，则 $x_{n-1}=x_n$. 代入(2)，得

$$\lambda_1 f(x_1)+\cdots+\lambda_{n-2}f(x_{n-2})+(\lambda_{n-1}+\lambda_n)f(x_{n-1})$$
$$=f[\lambda_1 x_1+\cdots+\lambda_{n-2}x_{n-2}+(\lambda_{n-1}+\lambda_n)x_{n-1}].$$

由归纳假设，有 $x_1=x_2=\cdots=x_{n-1}$，故　$x_1=x_2=\cdots=x_n$.

六、 几个著名不等式

1300.　设 $x_i>0, i=1,2,\cdots,n$，则

1) $H_n\leqslant G_n\leqslant M_n$　　　(1)

其中 $M_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$ 为算术平均数，$G_n=(x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{1}{n}}$ 为几何平均数，$H_n=\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x_i}\right)^{-1}$ 为调和平均数；

2) (1)式成立等号 $\Longleftrightarrow x_1=\cdots=x_n$.

证　1) 先证 $G_n\leqslant M_n$.　令 $f(x)=-\ln x$，则它是 $(0,+\infty)$ 内的凸函数. 在第 **1296** 条(1)式中令 $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=\dfrac{1}{n}$，则

$$-\ln M_n=-\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\leqslant-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=-\ln G_n.$$

所以

$$G_n\leqslant M_n. \tag{2}$$

在(2)式中用 $\dfrac{1}{x_i}$ 换 x_i，则

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\geqslant\left[\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right]^{\frac{1}{n}},$$

所以

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)^{-1}\leqslant\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\frac{1}{n}}\quad 即\quad H_n\leqslant G_n. \tag{3}$$

2) 由于 $f(x)=-\ln x$ 不是线性函数，因此由第 **1299** 条知 $M_n=G_n\Longleftrightarrow x_1=x_2=\cdots=x_n$. 当然也有 $H_n=G_n\Longleftrightarrow x_1=\cdots=x_n$.

1301. 设 $p>1,q>1$,且$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $x>0$, $y>0$,则

1) $x^{\frac{1}{p}}\cdot y^{\frac{1}{q}}\leqslant\frac{x}{p}+\frac{y}{q}$; (1)

2) 上式成立等号$\Longleftrightarrow x=y$.

证 1) 令 $f(x)=-\ln x$,再令 $\lambda_1=\frac{1}{p},\lambda_2=\frac{1}{q}$,则

$$-\ln\left(\frac{x}{p}+\frac{y}{q}\right)\leqslant-\left(\frac{1}{p}\ln x+\frac{1}{q}\ln y\right)=-\ln(x^{\frac{1}{p}}\cdot y^{\frac{1}{q}}).$$

所以 $x^{\frac{1}{p}}\cdot y^{\frac{1}{q}}\leqslant\frac{x}{p}+\frac{y}{q}$.

2) 由第 **1299** 条,(1)式成立等号$\Longleftrightarrow$ $x=y$.

1302. (Hölder) 设 $x_i,y_i>0,i=1,2,\cdots,n,p>1,q>1$,且$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,那么

1) $\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i\leqslant\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$; (1)

2) 上式成立等号$\Longleftrightarrow x_i=\lambda y_i^{q/p},i=1,2,\cdots,n$.

证 1) 令 $a=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^p,b=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^q$. 在第 **1301** 条(1)式中令 $x=\frac{x_i^p}{a},y=\frac{y_i^q}{b}$, 则

$$\frac{x_iy_i}{a^{1/p}\cdot b^{1/q}}\leqslant\frac{x_i^p}{ap}+\frac{y_i^q}{bq},i=1,2,\cdots,n. \tag{2}$$

因此
$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i}{a^{1/p}\cdot b^{1/q}}\leqslant\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

去分母即得(1)式.

2) (1)式成立等号$\Longleftrightarrow$(2)式中每个式子都要成立等号$\Longleftrightarrow\frac{x_i^p}{a}=\frac{y_i^q}{b},i=1,2,\cdots,n$.

$$\Longleftrightarrow x_i=\left(\frac{a}{b}y_i^q\right)^{1/p}=\lambda y_i^{q/p},i=1,2,\cdots,n,$$

其中　$\lambda=(\frac{a}{b})^{1/p}$.

1303. (Cauchy－Schwarz)　设 x,y 是 n 维实列向量,则

1) $(x'y)^2\leqslant(x'x)\cdot(y'y)$;

2) 上式成立等号$\Longleftrightarrow x=\lambda y$.

1304. (Minkowski)　设 $x_i>0,y_i>0,i=1,2,\cdots,n,k>1$. 则

1) $\left(\sum_{i=1}^n(x_i+y_i)^k\right)^{1/k}\leqslant\left(\sum_{i=1}^n x_i^k\right)^{1/k}+\left(\sum_{i=1}^n y_i^k\right)^{1/k}$;　　(1)

2) 上式成立等号$\Longleftrightarrow x_i=y_i,i=1,2,\cdots,n$.

证　1)在第 **1302** 条(1)式中用$(x_i+y_i)^{k-1}$换 x_i,用 x_i 换 y_i,令 $p=\frac{k}{k-1},q=k$,则

$$\sum_{i=1}^n(x_i+y_i)^{k-1}\cdot x_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^n((x_i+y_i)^{k-1})^{\frac{k}{k-1}}\right)^{\frac{k-1}{k}}\cdot\left(\sum_{i=1}^n x_i^k\right)^{1/k}$$

$$=\left(\sum_{i=1}^n(x_i+y_i)^k\right)^{\frac{k-1}{k}}\cdot\left(\sum_{i=1}^n x_i^k\right)^{1/k}\tag{2}$$

类似可得

$$\sum_{i=1}^n(x_i+y_i)^{k-1}\cdot y_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^n(x_i+y_i)^k\right)^{\frac{k-1}{k}}\cdot\left(\sum_{i=1}^n y_i^k\right)^{1/k}.\tag{3}$$

(2)+(3)得

$$\sum_{i=1}^n(x_i+y_i)^k\leqslant\left(\sum_{i=1}^n(x_i+y_i)^k\right)^{\frac{k-1}{k}}\cdot\left(\left(\sum_{i=1}^n x_i^k\right)^{\frac{1}{k}}+\left(\sum_{i=1}^n y_i^k\right)^{\frac{1}{k}}\right).$$

两边乘以$\left(\sum_{i=1}^n(x_i+y_i)^k\right)^{-\frac{k-1}{k}}$,即得(1)式.

2) (1)成立等号$\Longleftrightarrow$(2)(3)均取等号.

$\Longleftrightarrow(x_i+y_i)^{k-1}=\lambda(x_i^k)^{\frac{k-1}{k}}=\lambda x_i^{k-1}=\lambda y_i^{k-1}$,　$i=1,2,\cdots,n$.

$\Longleftrightarrow x_i=y_i$,　$i=1,2,\cdots,n$.

七、 极值

1305. 设 $x_i>0, i=1,2,\cdots,n, p>1, q>1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}=\max_D \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \tag{1}$$

其中 $D=\left\{(y_1,\cdots,y_n)\,\middle|\, y_i>0, \sum_{i=1}^{n} y_i^q=1\right\}$.

证 由 Hölder 不等式，并注意 $\sum_{i=1}^{n} y_i^q=1$，则

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

所以 $\max_D \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

当 $y_i=\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{-\frac{1}{q}} x_i^{\frac{p}{q}} (i=1,2,\cdots,n)$ 时极值达到，从而得证(1)式.

1306. 设 $x_i>0, i=1,2,\cdots,n, G_n=\left[\prod_{i=1}^{n} x_i\right]^{\frac{1}{n}}$ 为几何平均，那么 $G_n=\min_D \frac{1}{n} x'z$，其中 $x'=(x_1,\cdots,x_n)$，$z'=(z_1,\cdots,z_n)$，且 $D=\left\{(z_1,\cdots,z_n)\,\middle|\, z_i>0, \prod_{i=1}^{n} z_i=1\right\}$.

证 因为 $\prod_{i=1}^{n} z_i=1$，所以 $G_n=\left(\prod_{i=1}^{n} x_i z_i\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i z_i = \frac{1}{n} x'z$. 从而

$$\min_D \frac{1}{n} x'z \geqslant G_n.$$

令 $z_i=\frac{G_n}{x_i}$, $(i=1,2,\cdots,n)$，则 $\prod_{i=1}^{n} z_i=1$，而

$$\frac{1}{n}x'z=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iz_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}G_n=G_n,$$

故极值可以达到.

1307. (Minkowski)　设 $x_i>0,y_i>0$，$i=1,2,\cdots,n$，则

$$\left[\prod_{i=1}^{n}(x_i+y_i)\right]^{\frac{1}{n}}\geqslant\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\frac{1}{n}}+\left(\prod_{i=1}^{n}y_i\right)^{\frac{1}{n}},\tag{1}$$

即和的几何平均不小于几何平均的和.

证　令 $D=\left\{(z_1,\cdots,z_n)\middle| z_i>0,\quad \prod_{i=1}^{n}z_i=1\right\}$，则由第 **1306** 条，有

$$\left[\prod_{i=1}^{n}(x_i+y_i)\right]^{\frac{1}{n}}=\min_D\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)z_i$$

$$\geqslant\min_D\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iz_i+\min_D\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_iz_i=\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\frac{1}{n}}+\left(\prod_{i=1}^{n}y_i\right)^{\frac{1}{n}}.$$

1308.　设 A 为 n 级正定矩阵，则

$$|A|^{\frac{1}{n}}=\min_D\frac{1}{n}\mathrm{tr}AB,\tag{1}$$

其中 $D=\{B\in R^{n\times n}|B$ 为正定矩阵，且 $|B|=1\}$.

证　因为 B 正定，所以存在正定矩阵 G 使 $B=G^2$. 于是

$$\frac{1}{n}\mathrm{tr}AB=\frac{1}{n}\mathrm{tr}AG^2=\frac{1}{n}\mathrm{tr}GAG.\tag{2}$$

设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 为 GAG 的 n 个特征值，则由(2)式

$$\frac{1}{n}\mathrm{tr}AB=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\geqslant\left(\prod_{i=1}^{n}\lambda_i\right)^{\frac{1}{n}}=|GAG|^{\frac{1}{n}}$$

$$=(|G||A||G|)^{\frac{1}{n}}=(|A|\cdot|B|)^{\frac{1}{n}}=|A|^{\frac{1}{n}}.$$

$$\therefore\qquad \min_D\ \mathrm{tr}AB\geqslant|A|^{\frac{1}{n}}.\tag{3}$$

再取 $B_0=|A|^{\frac{1}{n}}A^{-1}$，则 $B_0\in D$，且

$$\frac{1}{n}\mathrm{tr}AB_0=\frac{1}{n}\mathrm{tr}|A|^{\frac{1}{n}}E=|A|^{\frac{1}{n}}.$$

即(3)的极值可达到．因此(1)式成立．

1309. 设 A,B 都是 $n\times n$ 正定矩阵，则

$$|A+B|^{\frac{1}{n}}\geqslant|A|^{\frac{1}{n}}+|B|^{\frac{1}{n}}.$$

证 令 $D=\left\{C\in R^{n\times n}\,\middle|\,C\text{ 为正定矩阵，且}|C|=1\right\}$，则

$$\begin{aligned}|A+B|^{\frac{1}{n}}&=\min_{D}\frac{1}{n}\mathrm{tr}(A+B)C\\&\geqslant\min_{D}\frac{1}{n}\mathrm{tr}AC+\min_{D}\frac{1}{n}\mathrm{tr}BC\\&=|A|^{\frac{1}{n}}+|B|^{\frac{1}{n}}.\end{aligned}$$

八、 实对称矩阵的特征值表示

1310. 什么叫做瑞利(Rayleigh)商？

答 设 A 为实对称矩阵，且 $x\neq0$，则称

$$\frac{x'Ax}{x'x}$$

为瑞利商．

1311. 设 n 阶实对称矩阵 A 的 n 个特征值为

$$\lambda_1(A)\geqslant\lambda_2(A)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n(A),$$

则 $\lambda_1(A)=\max\limits_{x\neq0}\dfrac{x'Ax}{x'x},\lambda_n(A)=\min\limits_{x\neq0}\dfrac{x'Ax}{x'x}.$

证 存在正交矩阵 $P=(\gamma_1,\cdots,\gamma_n)$，使

$$A=P\mathrm{diag}(\lambda_1(A),\cdots,\lambda_n(A))P'=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(A)\gamma_i\gamma_i',$$

其中 $\gamma_i'\gamma_j=\begin{cases}1, & i=j;\\0, & i\neq j.\end{cases}$

令 $y=P'x$，则 $x=Py$. 从而

$$\frac{x'Ax}{x'x}=\frac{y'P'APy}{y'y}=\frac{y'\mathrm{diag}(\lambda_1(A),\cdots\lambda_n(A))y}{y'y}.$$

记 $y'=(y_1,\cdots,y_n)$，则

$$\frac{x'Ax}{x'x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(A)y_i^2}{\sum_{i=1}^{n}y_i^2}\leqslant\lambda_1(A).$$

所以 $\max\limits_{x\neq 0}\dfrac{x'Ax}{x'x}\leqslant\lambda_1(A).$

再取 $x_0=\gamma_1$，则

$$\frac{x_0'Ax_0}{x_0'x_0}=\frac{\gamma_1'A\gamma_1}{\gamma_1'\gamma_1}=\lambda_1(A).$$

即极大值可达到.

类似地可证得另一极值等式.

1312. 设 n 阶实对称矩阵 A 的 n 个特征值为

$$\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n,$$

则 1) 存在正交矩阵 $P=(\gamma_1,\cdots,\gamma_n)$ 使

$$P'AP=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n);$$

2) 当 $D_i=L(\gamma_i,\cdots,\gamma_n),i=1,2,\cdots,n$ 时，

$$\lambda_i=\max_{0\neq x\in D_i}\frac{x'Ax}{x'x},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

证 1) 显然.

2) 设 $x\in D_i$，则 $x=c_i\gamma_i+\cdots+c_n\gamma_n$. 因此

$$\frac{x'Ax}{x'x}=\frac{\left(\sum_{k=i}^{n}c_k\gamma_k\right)'\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\gamma_j\gamma_j'\right)\left(\sum_{k=1}^{n}c_k\gamma_k\right)}{\left(\sum_{k=i}^{n}c_k\gamma_k\right)'\left(\sum_{k=i}^{n}c_k\gamma_k\right)}=\frac{\sum_{k=i}^{n}c_k^2\lambda_k}{\sum_{k=i}^{n}c_k^2}\leqslant\lambda_i.$$

再令 $x_0=\gamma_i\in D_i$，则

$$\frac{x_0'Ax_0}{x_0'x_0}=\frac{\gamma_i'\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\gamma_j\gamma_j'\right)\gamma_i}{\gamma_i'\gamma_i}=\lambda_i.$$

由此即得 2).

1313. 在第 1312 条的假设与记号下，有

$$\lambda_i = \max_{\substack{\|x\|=1 \\ x\in D_i}} x'Ax,$$

其中 $\|x\|^2 = x'x$.

证 $\lambda_i = \max\limits_{0\neq x\in D_i} \dfrac{x'Ax}{x'x} \geqslant \max\limits_{\substack{\|x\|=1 \\ x\in D_i}} \dfrac{x'Ax}{x'x} = \max\limits_{\substack{\|x\|=1 \\ x\in D_i}} x'Ax.$

另一方面,取 $x_0 = \gamma_i$,则

$$x_0'Ax_0 = r_i'\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \gamma_j \gamma_j'\right)\gamma_i = \lambda_i.$$

1314. 设 A 是实对称矩阵,A 的 n 个特征值为:$\lambda_1(A) \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n(A)$,而 $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ 分别是 A 的属于 $\lambda_1(A), \cdots, \lambda_n(A)$ 的单位正交的特征向量,$1 \leqslant k \leqslant l \leqslant n$,$W = L(\gamma_k, \cdots, \gamma_l)$,则对于任意单位向量 $x \in W$,均有

$$\lambda_k(A) \geqslant x'Ax \geqslant \lambda_l(A).$$

证 由单位向量 $x \in W$ 有 $x = \sum\limits_{i=k}^{l} a_i \gamma_i$ 且 $\sum\limits_{i=k}^{l} a_i^2 = 1$. 故

$$x'Ax = \sum_{i=k}^{l} \lambda_i(A) a_i^2 \leqslant \lambda_k(A).$$

也易得 $x'Ax \geqslant \lambda_l(A)$.

1315. (Courant-Fischer) 设 A 是实对称矩阵,A 的 n 个特征值为 $\lambda_1(A) \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n(A)$,$W$ 是任意 i 维子空间,则

$$\lambda_i(A) = \max_{\dim W = i} \min_{\substack{x\in W \\ x'x=1}} x'Ax. \tag{1}$$

证 记 $K_i = L(\gamma_i, \cdots, \gamma_n)$,这里 γ_i 是 A 的属于 $\lambda_i(A)$ 的单位正交特征向量,$i = 1, \cdots, n$. 易见 $\dim K_i = n - i + 1$. 于是 $W \cap K_i \neq 0$. 故必存在单位向量 $x \in W \cap K_i$,且由第 **1314** 条得 $x'Ax \leqslant \lambda_i(A)$. 此即表明

$$\max_{\dim W = i} \min_{\substack{x\in W \\ x'x=1}} x'Ax \leqslant \lambda_i(A). \tag{2}$$

另一方面,取 $W_i = L(\gamma_1, \cdots, \gamma_i)$,则 $\dim W_i = i$. 再由第 **1314** 条,对任意单位向量有 $x'Ax \geqslant \lambda_i(A)$. 此即表明

$$\max_{\dim W=i}\min_{\substack{x\in W\\ x'x=1}} x'Ax\geqslant\lambda_i(A). \tag{3}$$

由(2)、(3)两式即得(1)式.

1316. (Weyl) 设 A,B 都是 n 阶实对称矩阵,A 的 n 个特征值为 $\lambda_1(A)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n(A)$,$B$ 的 n 个特征值为 $\lambda_1(B)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n(B)$,$A+B$ 的 n 个特征值为:$\lambda_1(A+B)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n(A+B)$,则

$$\lambda_i(A)+\lambda_n(B)\leqslant\lambda_i(A+B)\leqslant\lambda_i(A)+\lambda_1(B),i=1,\cdots,n.$$

证 由第 1315 条得

$$\begin{aligned}\lambda_i(A+B)&=\max_{\dim W=i}\min_{\substack{x\in W\\ x'x=1}} x'(A+B)x\\ &=\max_{\dim W=i}\min_{\substack{x\in W\\ x'x=1}}(x'Ax+x'Bx)\\ &\geqslant\max_{\dim W=i}\min_{\substack{x\in W\\ x'x=1}}(x'Ax+\lambda_n(B))\\ &=\lambda_i(A)+\lambda_n(B).\end{aligned}$$

类似地可以得到另一不等式.

1317. 设 A,B 都是 n 阶实对称矩阵,则

1) 当 $B-A$ 为半正定矩阵时,$\lambda_i(A)\leqslant\lambda_i(B),i=1,\cdots,n$;

2) 当 $B-A$ 为正定矩阵时,$\lambda_i(A)<\lambda_i(B),i=1,\cdots,n$;

其中 $\lambda_1(A)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n(A)$ 为 A 的特征值,$\lambda_1(B)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n(B)$ 为 B 的特征值.

证 只证 1). 2)可类似证得.

由第 1316 条知 $\lambda_i(A)+\lambda_n(B-A)\leqslant\lambda_i(A+(B-A))=\lambda_i(B)$. 注意到 $\lambda_n(B-A)\geqslant0$,即得 1).

1318. 设 A,B 是 n 阶实对称矩阵,$\rho(B)$ 是 B 的谱半径,则对所有 $i=1,\cdots,n$,有

$$|\lambda_i(A+B)-\lambda_i(A)|\leqslant\rho(B).$$

证 由第 1316 条得 $\lambda_n(B)\leqslant\lambda_i(A+B)-\lambda_i(A)\leqslant\lambda_1(B)$. 因而

$$|\lambda_i(A+B)-\lambda_i(B)|\leqslant\rho(B),i=1,\cdots,n.$$

1319.　若 A,B 不是对称的，则第 **1316** 条的不等式不再成立.

解　考虑 $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}$，这时

$$\lambda_1(A)=\lambda_2(A)=\lambda_1(B)=\lambda_2(B)=0,$$

而 $\lambda_1(A+B)=1,\lambda_2(A+B)=-1$.

第十七章　非负矩阵与 M 矩阵

一、 定义

1320. 什么叫做非负矩阵?

答 设 $A=(a_{ij})$是 $n\times m$ 实矩阵,若

$$a_{ij}\geqslant 0, i=1,2,\cdots,n;\quad j=1,2,\cdots m,$$

则称 A 为非负矩阵,记为 $A\geqslant 0$ 或 $0\leqslant A$.

注 ① 类似地可定义正矩阵,即

$a_{ij}>0$, $i=1,2,\cdots,n$; $j=1,2,\cdots,m$,记为 $A>0$ 或 $0<A$.

② 还可定义 $A\geqslant B$ 和 $A>B$,即设矩阵 $A=(a_{ij})$,$B=(b_{ij})$都是 $n\times m$ 实矩阵,则 $A\geqslant B$ 意即 $A-B\geqslant 0$,$A>B$ 意即 $A-B>0$. 由此可知

$$A\geqslant B\Longleftrightarrow a_{ij}\geqslant b_{ij},\ i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m.$$

$$A>B\Longleftrightarrow a_{ij}>b_{ij},\ i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m.$$

③ 对 $A\geqslant B$,不要求 A(或 B)是非负矩阵.

④ 不特别声明,本章涉及的矩阵都是实矩阵.

1321. $A\geqslant 0$,$A\neq 0$ 是否有 $A>0$?

答 当 A 是 1 阶方阵时,结论成立. 其它情况不一定成立. 比如,设 $A=(1,0)$,这时 $A\geqslant 0$,$A\neq 0$,但 $A\not>0$.

1322. 1) 若 $A\geqslant 0$,$B\geqslant 0$,则 $kA+lB\geqslant 0$,其中 $k\geqslant 0$,$l\geqslant 0$.

2) 若 $A\geqslant B$,则 $kA\geqslant kB$,其中 $k\geqslant 0$.

3) 若 $A\geqslant B$,则 $A+C\geqslant B+C$,其中 C 为与 A,B 同阶的任意矩阵.

4) 若 $A\geqslant B$,$B\geqslant C$,则 $A\geqslant C$.

5) 若 $A\geqslant B$,$C\geqslant D$,则 $A+C\geqslant B+D$.

证　由定义可证.

1323.　1）两非负矩阵之积是非负矩阵.

2）两个正矩阵之积是正矩阵.

证　由定义可证.

1324.　设 $A\in R^{n\times m}$，则

1）$A\geqslant 0\Longleftrightarrow\forall\ x\in R^{m\times 1}$ 且 $x\geqslant 0$，都有 $Ax\geqslant 0$；

2）$A>0\Longleftrightarrow\forall\ x\in R^{m\times 1}$ 且 $x\geqslant 0, x\neq 0$，都有 $Ax>0$.

证　1）必要性　由第 **1323** 条得.

充分性　用反证法.　设存在某个 $a_{ij}<0$，则取
$x'=(0,\cdots,1,\cdots,0)$，有

$$Ax=(*\cdots*,a_{ij}*\cdots*)',$$

这与 $Ax\geqslant 0$ 矛盾.

2）可类似地证得.

1325.　设 $A\geqslant 0$，若 $\forall\ B>0$ 且 $AB=0$，则 $A=0$.

证　若 $n\times m$ 矩阵 $A=(a_{ij})\neq 0$，则存在某个 $a_{ij}>0$. 取 $B=(1,\cdots,1)'$，则 $AB\neq 0$，矛盾.

1326.　设 $A=(a_{ij})$ 是 $n\times m$ 实矩阵，令 $\widetilde{A}=(|a_{ij}|)_{n\times m}$，则

1）$\widetilde{A}\geqslant 0$；　　2）$\widetilde{A}\geqslant A$；　　3）$\widetilde{A}=0\Longleftrightarrow A=0$.

证　由定义可证.

1327.　设 $A=(a_{ij}),B=(b_{ij})$ 都是 $n\times m$ 实矩阵，k 是实数，则

1）$\widetilde{kA}=|k|\widetilde{A}$；　　2）$\widetilde{A+B}\leqslant\widetilde{A}+\widetilde{B}$.

证　1）$\widetilde{kA}=(|ka_{ij}|)=|k|(|a_{ij}|)=|k|\widetilde{A}$.

2）因为$\widetilde{A+B}$的(i,j)元 $|a_{ij}+b_{ij}|\leqslant|a_{ij}|+|b_{ij}|$，所以
$\widetilde{A+B}\leqslant\widetilde{A}+\widetilde{B}$.

1328.　设 A,B 都是 n 阶实矩阵，$A\geqslant B$，C 是 n 阶非负矩阵，则 $AC\geqslant BC, CA\geqslant CB$.

证　设 $A=(a_{ij}),B=(b_{ij}),C=(c_{ij})$，令 $AC=(\alpha_{ij})$，$BC=$

(β_{ij})，那么

$$\alpha_{ij}=a_{i1}c_{1j}+a_{i2}c_{2j}+\cdots+a_{in}c_{nj},$$

$$\beta_{ij}=b_{i1}c_{1j}+b_{i2}c_{2j}+\cdots+b_{in}c_{nj},$$

$$\alpha_{ij}-\beta_{ij}=(a_{i1}-b_{i1})c_{1j}+\cdots+(a_{in}-b_{in})c_{nj}.$$

因为 $a_{ij}-b_{ij}\geqslant 0, c_{ij}\geqslant 0$，所以 $\alpha_{ij}\geqslant\beta_{ij}$，即 $AC\geqslant BC$.

另一式子可类似地证明.

1329. 设 A,B 都是 n 阶非负矩阵，且 $A\geqslant B$，则 $A^k\geqslant B^k$，其中 k 为任意自然数.

证 当 $k=1$ 时，结论成立. 归纳假定结论对 $k-1$ 成立，即 $A^{k-1}\geqslant B^{k-1}$. 由 $A\geqslant 0, B^{k-1}\geqslant 0$ 及第 **1328** 条得

$A^k\geqslant AB^{k-1}\geqslant BB^{k-1}=B^k$，故对任意自然数 k，$A^k\geqslant B^k$.

注 A,B 不都是非负矩阵时，由 $A\geqslant B$，不一定有 $A^k\geqslant B^k$. 比如，设 $A=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&0\\0&-1\end{pmatrix}$，则 $A\geqslant B$，但 $A^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$，$B^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$，此时 $A^2\geqslant B^2$ 不成立.

1330. $\widetilde{AB}\leqslant\widetilde{A}\cdot\widetilde{B}$.

证 设 $A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$，分别为 $n\times m$ 与 $m\times s$ 实矩阵，$\widetilde{AB}=(c_{ij})$，$\widetilde{A}\cdot\widetilde{B}=(d_{ij})$，则

$$\begin{aligned}c_{ij}&=|a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{im}b_{mj}|\\&\leqslant|a_{i1}||b_{1j}|+\cdots+|a_{im}||b_{mj}|=d_{ij}.\end{aligned}$$

所以 $\widetilde{AB}\sim\leqslant\widetilde{A}\cdot\widetilde{B}$.

1331. 设 A 是 n 阶实矩阵，则 $\widetilde{A^k}\leqslant(\widetilde{A})^k$，其中 k 为任意自然数.

证 用数学归纳法，由第 **1330** 条可证.

1332. 设 A,B 都是 n 阶实矩阵，若 $\widetilde{A}\leqslant B$，则 $A^k\leqslant\widetilde{A^k}\leqslant(\widetilde{A})^k\leqslant B^k$，其中 k 为自然数.

证 由第 **1326** 条得$\widetilde{A^k}\geqslant A^k$. 由第 **1331** 条得$\widetilde{A^k}\leqslant(\widetilde{A})^k$. 由第 **1329** 条得$(\widetilde{A})^k\leqslant B^k$.

1333. 设 $A=(a_{ij})$和 $B=(b_{ij})$都是 n 阶实矩阵,则

1) $\|A\|_2=\|\widetilde{A}\|_2$,其中$\|\cdot\|$为 l_2 矩阵范数;

2) 当 $0\leqslant A\leqslant B$ 时$\|A\|_2\leqslant\|B\|_2$.

证 1) 因为 $A=(a_{ij})$为 n 阶实矩阵,所以

$$\|A\|_2=\left(\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\|\widetilde{A}\|_2.$$

2) 由假设知 $b_{ij}\geqslant a_{ij}\geqslant 0$,所以

$$\|A\|_2=\left(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}=\|B\|_2.$$

二、 非负矩阵的谱

1334. 设$\|\cdot\|$是任意的矩阵范数,$A\in R^{n\times n}$,则

$$\rho(A)\leqslant\|A\|.$$

证 设 λ_k 是 A 的特征值,且 $\lambda_k=\rho(A)$,而 α 为 A 的属于 λ_k 的一个特征向量,则

$$|\lambda_k|\,\|\alpha\|=\|\lambda_k\alpha\|=\|A\alpha\|\leqslant\|A\|\,\|\alpha\|.$$

所以 $\rho(A)=|\lambda_k|\leqslant\|A\|$.

注 设 $A=(a_{ij})$,则

$$\rho(A)\leqslant\|A\|_2=\left(\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\rho(A)\leqslant\|A\|_\infty=n\cdot\max_{i,j}|a_{ij}|.$$

1335. 设$\|\cdot\|$为 $R^{n\times n}$上的矩阵范数,则

$$\rho(A)=\lim_{k\to\infty}\|A^k\|^{\frac{1}{k}},\forall\ A\in R^{n\times n}.\tag{1}$$

证 设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的特征值,则 $\lambda_1^k,\cdots,\lambda_n^k$ 为 A^k 的特征值. 所以 $\rho(A^k)=[\rho(A)]^k$. 由第 **1334** 条,有

$$[\rho(A)]^k\leqslant\|A^k\| \text{ 即 } \rho(A)\leqslant\|A^k\|^{\frac{1}{k}}. \tag{2}$$

任意 $\varepsilon>0$，令 $B=\dfrac{1}{\rho(A)+\varepsilon}A$，则 $\rho(B)<1$. 因而 $\lim\limits_{k\to\infty}B^k=0$. 从而存在 N，使 $k>N$ 时，有 $\|B^k\|<1$. 即

$$1\geqslant\|B^k\|=\frac{1}{(\rho(A)+\varepsilon)^k}\|A^k\|,$$

此即
$$\|A^k\|^{\frac{1}{k}}\leqslant\rho(A)+\varepsilon. \tag{3}$$

由(2)、(3)得

$$\rho(A)\leqslant\|A^k\|^{\frac{1}{k}}\leqslant\rho(A)+\varepsilon, \tag{4}$$

由 ε 的任意性即证得(1)式.

1336. $\rho(A)\leqslant\rho(\widetilde{A})$.

证 由第 **1332** 条知 $A^k\leqslant(\widetilde{A})^k$，从而 $\|A^k\|_2\leqslant\|(\widetilde{A})^k\|_2$，$\lim\limits_{k\to\infty}\|(A^k)\|_2^{\frac{1}{k}}\leqslant\lim\limits_{k\to\infty}\|\widetilde{A}^k\|_2^{\frac{1}{k}}$. 由第 **1335** 条知 $\rho(A)\leqslant\rho(\widetilde{A})$.

1337. 设 $A\in R^{n\times n}$，$\widetilde{A}\leqslant B$，则 $\rho(A)\leqslant\rho(\widetilde{A})\leqslant\rho(B)$.

证 由第 **1336** 条知 $\rho(A)\leqslant\rho(\widetilde{A})$. 由第 **1332** 条知$(\widetilde{A})^k\leqslant B^k$，$\|\widetilde{A}^k\|_2\leqslant\|B^k\|_2$. 所以

$$\rho(\widetilde{A})=\lim_{k\to\infty}\|(\widetilde{A}^k)\|_2^{\frac{1}{k}}\leqslant\lim_{k\to\infty}\|\widetilde{A}^k\|_2^{\frac{1}{k}}=\rho(B).$$

1338. 设 $0\leqslant A\leqslant B$，则 $\rho(A)\leqslant\rho(B)$.

证 仿第 **1337** 条可证.

注 若 $A\leqslant B$，不一定有 $\rho(A)\leqslant\rho(B)$. 比如，$A=\begin{pmatrix}-1 & \\ & -1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0 & \\ & 0\end{pmatrix}$，$A\leqslant B$， 但 $\rho(A)>\rho(B)$.

1339. 设 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})\geqslant0$，A_k 为 A 的任意 k 阶主子阵，则 $\rho(A_k)\leqslant\rho(A)$.

证 若把 A 中 A_k 以外的所有元换为 0 而得的矩阵记为 B，则 $0\leqslant B\leqslant A$. 由第 **1338** 条知 $\rho(B)\leqslant\rho(A)$. 但因 $\rho(B)=\rho(A_k)$，故 $\rho(A_k)\leqslant\rho(A)$.

注 当 $A\geqslant 0$ 时，特别地有 $a_{ii}\leqslant\rho(A)$，$i=1,2,\cdots,n$.

1340. $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$，矩阵范数定义为

$$\|A\|_{\infty}=\max_{i}\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|.$$

设 $A\geqslant 0$，则当 A 的各个行和是同一常数时，有 $\rho(A)=\|A\|_{\infty}$.

证 设 $a=\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}$，则 $\|A\|_{\infty}=a$. 由第 **1334** 条知 $\rho(A)\leqslant\|A\|_{\infty}=a$.

另一方面，令 $\beta'=(1,1,\cdots,1)$，则 $A\beta=a\beta$. 即 a 是 A 的一个特征值，故 $\rho(A)=a=\|A\|_{\infty}$.

1341. $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$，矩阵范数定义为

$$\|A\|_{1}=\max_{k}\sum_{i=1}^{n}|a_{ik}|.$$

设 $A\geqslant 0$，则当 A 的各个列和为同一常数时，则 $\rho(A)=\|A\|_{1}$.

证 考虑 A'，因为 $\rho(A)=\rho(A')$，且 A' 各个行和为同一常数，所以 $\rho(A')=\|A'\|_{\infty}$. 但 $\|A'\|_{\infty}=\|A\|_{1}$，故 $\rho(A)=\|A\|_{1}$.

1342. (Frobenius) 设 $A=(a_{ij})$ 是 $n\times n$ 非负矩阵，则

1)
$$\min_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\leqslant\rho(A)\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij},\tag{1}$$

$$\min_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\leqslant\rho(A)\leqslant\max_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij},\tag{2}$$

2) 对任意 n 个正数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，有

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{1}{x_i}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqslant\rho(A)\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{1}{x_i}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j,\tag{3}$$

$$\min_{1\leqslant j\leqslant n}x_j\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{ij}}{x_i}\leqslant\rho(A)\leqslant\max_{1\leqslant j\leqslant n}x_j\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{ij}}{x_i};\tag{4}$$

3) 当 $Ax=\lambda x$，且 $x'=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是正特征向量(各分量

为正者)时，$\lambda=\rho(A)$，即非负矩阵 A 的正特征向量相应的特征值就是 A 的谱半径．

证 1) 令 $a=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}\geqslant 0$，$b_{ij}=aa_{ij}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}\right)^{-1}\geqslant 0$，$B=(b_{ij})$，则 $a_{ij}-b_{ij}\geqslant 0$，$i、j=1,2,\cdots,n$．即 $0\leqslant B\leqslant A$．又 $a=\sum\limits_{j=1}^{n}b_{ij}$ 对所有的 $i(i=1,2,\cdots,n)$ 成立．由第 **1340** 条知 $\rho(B)=a$．再由第 **1338** 条，得

$$\min_{i}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=a=\rho(B)\leqslant\rho(A).$$

类似令 $b=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}$，可证 $\rho(A)\leqslant b$．从而证得(1)式．

在(1)式中，用 A' 换 A，并注意 $\rho(A)=\rho(A')$，便得(2)式．

2) 令 $S=\mathrm{diag}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，其中 $x_i>0$，$i=1,2,\cdots,n$，则当 A 是非负矩阵时，$S^{-1}AS=(a_{ij}x_jx_i^{-1})$ 也是非负矩阵，且有 $\rho(A)=\rho(S^{-1}AS)$．将(1)式与(2)式应用于 $S^{-1}AS$ 及其转置矩阵，便得到(3)，(4)式．

3) 由 A 是非负矩阵，x 是正特征向量，$Ax=\lambda x$ 知 $\lambda\geqslant 0$，且 $\lambda=x_i^{-1}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j$，$i=1,2,\cdots,n$．利用(3)式，

$$\lambda=\min_{1\leqslant i\leqslant n}x_i^{-1}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqslant\rho(A)\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}x_i^{-1}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=\lambda.$$

从而 $\lambda=\rho(A)$．

1343. 什么叫做随机矩阵与双随机矩阵？

答 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}\geqslant 0$，且每行和等于 1，则称 A 为随机矩阵．

若 A 与 A' 都是随机矩阵，则称 A 为双随机矩阵．

注 因为这样的矩阵的每一行可以看成有 n 个点的样本空间上的离散概率分布，故称之为随机矩阵．随机矩阵在离散的

Markov 链理论中起了重要的作用.

1344. 设 $A=(a_{ij})$是 $n\times n$ 非负矩阵,$e'=(1,1,\cdots,1)$,则

1) A 是(行)随机矩阵,当且仅当 $Ae=e$;

2) A 是双随机矩阵,当且仅当 $Ae=e$ 及 $A'e=e$;

3) 当 A 是(行)随机矩阵时,$\rho(A)=1$.

证 1) 与 2) 由第 **1343** 条即得.

3) 因 A 是(行)随机矩阵,由 1) 知 $Ae=e$,即 1 是 A 的特征值,从而 $1\leqslant\rho(A)$. 另一方面,由第 **1342** 条知 $\rho(A)\leqslant 1$,故 $\rho(A)=1$.

1345. 1) 设 $0<a<1$,则双随机矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a\end{pmatrix}$的特征值全是实数.

2) 设 $b_i(2\leqslant i\leqslant n-1)$是两两不等的小于 $n-1$ 的正实数,而且 $n-1-\sum\limits_{i=2}^{n-1}b_i>0$,则双随机矩阵

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & \frac{n-b_2-1}{n} & 0 & \cdots & 0 & \frac{b_2}{n} \\ \frac{1}{n} & 0 & \frac{n-b_3-1}{n} & \cdots & 0 & \frac{b_3}{n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{n} & \frac{b_2}{n} & \frac{b_3}{n} & \cdots & \frac{b_{n-1}}{n} & \frac{n-\sum\limits_{i=2}^{n-1}b_i-1}{n} \end{pmatrix}$$

的特征值全为实数.

证 1) 因为$|\lambda E-A|=\lambda^2-2a\lambda+(2a-1)$的判别式

$$\Delta=4a^2-4(2a-1)=4(a-1)^2>0,$$

所以 A 的特征值全是实数.

2) $|A-\lambda E|=-\lambda(1-\lambda)\left[(n-1)\varphi(\lambda)+\left(\frac{n-1}{n}-\lambda\right)\varphi'(\lambda)\right]$,

其中 $\varphi(\lambda)=\prod_{i=2}^{n-1}\left(\frac{n-b_i-1}{n}-\lambda\right)$. 由于 $b_i(2\leqslant i\leqslant n-1)$是两两不等的小于 $n-1$ 的正实数,所以$\frac{n-b_i-1}{n}(2\leqslant i\leqslant n-1)$是两两不等的小于$\frac{n-1}{n}$的正实数. 因而$(n-1)\varphi(\lambda)$与$\left(\frac{n-1}{n}-\lambda\right)\varphi'(\lambda)$的根都是实数单根. 并且交错分隔,所以$(n-1)\varphi(\lambda)+\left(\frac{n-1}{n}-\lambda\right)\varphi'(\lambda)$的所有根全是实数. 由此可得

$$|A-\lambda E|=-\lambda(1-\lambda)\left[(n-1)\varphi(\lambda)+\left(\frac{n-1}{n}-\lambda\right)\varphi'(\lambda)\right]$$

的根全是实数.

三、 正矩阵

1346. (Wielandt) $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$是正矩阵,则

1) $A\alpha=\rho(A)\alpha$,其中 $\rho(A)>0,\alpha>0$;

2) $-\rho(A)$不是 A 的特征值.

证 1) 设 λ_0 是 A 的特征值,且$|\lambda_0|=\rho(A)$,则 $A\alpha=\lambda_0\alpha$,其中 $\alpha'=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\neq0$.

令 $\beta'=(|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_n|)$. 因为

$$\lambda_0x_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j,\quad i=1,2,\cdots,n,$$

所以

$$\rho(A)|x_i|=|\lambda_0|\cdot|x_i|=|\lambda_0x_i|\leqslant\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}||x_j|.\tag{1}$$

由(1)得

$$\rho(A)\beta\leqslant A\beta\quad 或\quad (A-\rho(A)E)\beta\geqslant0.\tag{2}$$

下证(2)式成立等号,用反证法.

若$(A-\rho(A)E)\beta=y\neq0$，则由(2)式知 $y\geqslant0$. 但 $A>0,y\neq0$，从而 $Ay>0$.

其次，$A>0,\beta'\geqslant0,\beta'\neq0$，故 $A\beta>0$. 总存在充分小的 $\varepsilon>0$，使 $Ay\geqslant\varepsilon A\beta$. 因为 $Ay=A(A-\rho(A)E)\beta$，所以

$$A^2\beta=Ay+\rho(A)A\beta\geqslant(\varepsilon+\rho(A))A\beta.$$

令 $B=(\varepsilon+\rho(A))^{-1}A$，则由 ε 充分小，$(\varepsilon+\rho(A))^{-1}\geqslant1$，从而

$$BA\beta=(\varepsilon+\rho(A))^{-1}A\beta\geqslant A\beta. \tag{3}$$

类似地有 $BA^2\beta\geqslant A^2\beta$. 因而 $BA^2\beta\geqslant A^2\beta\geqslant(\varepsilon+\rho(A))A\beta$. 由(3)

$$B^2A\beta\geqslant BA\beta\geqslant A\beta. \tag{4}$$

由(4)可证得

$$B^kA\beta\geqslant A\beta,k=1,2,\cdots \tag{5}$$

由 $\varepsilon>0$，则 $\rho(B)=(\varepsilon+\rho(A))^{-1}\rho(A)<1$.

故$\lim\limits_{k\to\infty}B^k=0$，从而由(5)式得 $A\beta\leqslant0$. 这与 $A\beta>0$ 矛盾.

从而证得 $y=0$，即 $A\beta=\rho(A)\beta$. 因为 $A\beta>0$，所以 $\rho(A)>0$. 故 $\rho(A)$是 A 的正特征值，β 是相应的正特征向量.

2) 用反证法. 设 $\lambda_1=-\rho(A)$为 A 的特征值，其相应特征向量为 $\alpha'=(x_1,\cdots,x_n)$. 仿 1)，令 $\beta'=(|x_1|,\cdots,|x_n|)$，则

$$A\alpha=-\rho(A)\alpha,\quad A\beta=\rho(A)\beta, \tag{6}$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=-\rho(A)x_i,\quad \sum_{j=1}^{n}a_{ij}|x_j|=\rho(A)x_i.$$

由(6)式可得

$$\left|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right|=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}|x_j|. \tag{7}$$

因为 $a_{ij}>0$，则(7)式表明 x_j 有相同的幅角 θ，即

$$x_j=|x_j|e^{i\theta}\quad j=1,2,\cdots,n.$$

这样，$\alpha=e^{i\theta}\beta$. 因为 $\theta\neq0$，$e^{i\theta}\neq0$，由(6)式，$A(e^{i\theta}\beta)=\rho(A)(e^{i\theta}\beta)$，即 $A\alpha=\rho(A)\alpha=-\rho(A)\alpha$. 所以 $\rho(A)=0$，矛盾.

注　A的异于$\rho(A)$的特征值λ均有$|\lambda|<\rho(A)$.

1347.　设A是正矩阵，令$\beta=\frac{1}{\rho(A)}A$，则$\lim\limits_{k\to\infty}B^k$存在.

证　$\rho(B)=1, B>0$，由第**1346**条知，1是B的一个特征值，其它不等于1的特征值λ，都满足$|\lambda|<1$.

设$\alpha=(x_1,\cdots,x_n)'$为B属于特征值1的特征向量，则由第**1346**条知$\alpha>0$. 令

$$x_r=\max_i x_i,\quad x_s=\min_i x_i.$$

设$B^m=(b_{ij})$，那么由$B\alpha=\alpha$得$B^m\alpha=\alpha$. 因为

$$x_k=\sum_{j=1}^n b_{kj}x_j,\quad k=1,2,\cdots,n,$$

所以$x_r\geqslant x_k=\sum\limits_{j=1}^n b_{kj}x_j\geqslant b_{ij}x_s$. 故$0\leqslant b_{ij}\leqslant\frac{x_r}{x_s}$.

这就证明了B^m中每一个元素都是有界的. 从而B的若当标准形中，对应于$\lambda=1$的若当块一定是一阶的(否则不可能使B^m有界)，从而证明这一块的幂都是收敛的. 而其它若当块对应特征值的模都小于1，故它们的幂也是收敛的. 这就证明了B的幂是收敛的.

1348.　(Perron)　设$A>0$，则

1) $\rho(A)$是A的一个单特征值，且对应于$\rho(A)$的特征向量是正特征向量；

2) A异于$\rho(A)$的特征值λ都有$|\lambda|<\rho(A)$.

证　只需证明$\rho(A)$是A的单特征值，其它第**1346**条已证. 令$B=\frac{1}{\rho(A)}A$，设特征值$\rho(A)$的代数重数为k，那么1对B的代数重数也是k. 下证$k=1$.

设B的若当标准形为：

$$J=\mathrm{diag}(E_k,J_1,\cdots,J_s),$$

其中

$$J_m=\begin{pmatrix}\lambda_m & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & 0 & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_m\end{pmatrix}_{n_m\times n_m},\quad m=1,2,\cdots,s,$$

$$k+n_1+\cdots+n_s=n,\quad |\lambda_m|<1,\quad m=1,2,\cdots,s,$$

$$B-E_n=\mathrm{diag}(0,J_1-E_{n_1},\cdots,J_s-E_{n_s}).$$

但 $\mathrm{diag}(J_1-E_{n_1},\cdots,J_s-E_{n_s})$ 是可逆矩阵.

记 $N(C)=\{x|Cx=0\}$,那么

$$k=\dim N(J-E)=\dim N(B-E)\geqslant 1.$$

用反证法. 若 $k>1$,设 B 属于 1 的特征向量为 β,则

$$\beta'=(x_1,\cdots,x_n)>0,B\beta=\beta.$$

因为 $k>1,\dim N(B-E)=k>1$,故还存在 $\gamma'=(y_1,\cdots,y_n)$,使 β 与 γ 线性无关,且 $(B-E)\gamma=0$,即 $B\gamma=\gamma$.

令 $c=\dfrac{y_j}{x_j}=\max\limits_i\left(\dfrac{y_i}{x_i}\right)$,则 $c\beta\geqslant\gamma$. 但 $c\beta-\gamma\neq 0$,故 $B(c\beta-\gamma)>0$. 而 $0<B(c\beta-\gamma)=cB\beta-B\gamma=c\beta-\gamma$. 所以 $c\beta>\gamma$. 由此有 $cx_j>y_j$,这与 $c=\dfrac{y_j}{x_j}$ 矛盾. 从而证得 $k=1$.

1349. 设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶复矩阵,n 阶方阵 $B=(b_{ij})\geqslant 0$,且 $B\geqslant\bar{A}=(|a_{ij}|)$,$\lambda$ 是 A 的任一特征值,则存在 k,使

$$|\lambda-a_{kk}|\leqslant\rho(B)-b_{kk}.\tag{1}$$

证 先证 $B>0$ 的情形. 由第 **1346** 条知存在正向量 $x'=(x_1,\cdots,x_n)$,使 $Bx=\rho(B)x$. 令

$$X=\begin{pmatrix}x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & x_n\end{pmatrix},C=X^{-1}AX,$$

由圆盘定理,存在 k,使

$$|\lambda-a_{kk}|\leqslant\sum_{j\neq k}|a_{kj}|\leqslant\sum_{j\neq k}b_{kj}.$$

另一方面，由 C 的定义，

$$|\lambda-a_{kk}|\leqslant\sum_{j\neq k}|c_{kj}|=\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{kj}|x_j-|a_{kk}|x_k\right)\Big/x_k$$
$$\leqslant\left(\sum_{j=1}^{n}b_{kj}x_j-b_{kk}x_k\right)\Big/x_k$$
$$=(\rho(B)x_k-b_{kk}x_k)/x_k=\rho(B)-b_{kk},$$

故(1)式成立．

再证 $B\geqslant0$，但 B 不是正矩阵的情形． 令 $D_m=(d_{ij})_{n\times n}$，其中 $d_{ij}=b_{ij}+\frac{1}{m}$，$i、j=1,2,\cdots,n$，则 $D_m>0$. 于是由上面的证明知

$$|\lambda-a_{ii}|\leqslant\rho(D_m)-d_{ii}.$$

但 $\lim\limits_{m\to\infty}\rho(D_m)=\rho(B)$，$\lim\limits_{m\to\infty}d_{ij}=b_{ij}$，从而由上式可得

$$|\lambda-a_{ii}|\leqslant\rho(B)-b_{ii}.$$

四、 M矩阵

1350. 什么叫做M矩阵？

答 设 $A\in R^{n\times n}$，若 $A=aE-B$，其中 $a>0$，$B\geqslant0$，$a\geqslant\rho(B)$，则称 A 为M矩阵．

注 ①设 $B=(b_{ij})\geqslant0$，则

$$(a_{ij})=A=\begin{pmatrix}a-b_{11}&-b_{12}&\cdots&-b_{1n}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ -b_{n1}&-b_{n2}&\cdots&a-b_{nn}\end{pmatrix};$$

由此可见M矩阵 A 的(i,j)元素 $a_{ij}\leqslant0\ (i\neq j)$.

② 当 $a>\rho(B)$时，A 可逆．这时称 A 为非奇异的M矩阵．

③ M矩阵是为纪念Minkowski而命名的．

1351. 设 $A=(a_{ij})$是 n 阶M矩阵，且 $A=LU$，其中

$$L=\begin{pmatrix}l_{11}&&0\\ \vdots&\ddots&\\ l_{n1}&\cdots&l_{nn}\end{pmatrix},\qquad U=\begin{pmatrix}u_{11}&\cdots&u_{1n}\\ &\ddots&\vdots\\ 0&&u_{nn}\end{pmatrix},$$

且 $l_{ii}>0, u_{ii}>0, i=1,2,\cdots,n$，则 L, U 均为M矩阵．

证 下证 $l_{ij}\leqslant 0, u_{ij}\leqslant 0, i\neq j$. 用数学归纳法．当 $i+j=3$ 时，$l_{21}\leqslant 0, u_{12}\leqslant 0$. 事实上：

$$0\geqslant a_{12}=l_{11}u_{12},\quad l_{11}>0,\ \therefore\ u_{12}\leqslant 0;$$

$$0\geqslant a_{21}=l_{21}u_{11},\quad u_{11}>0,\ \therefore\ l_{21}\leqslant 0.$$

即 $i+j=3$ 时结论成立．归纳假定结论对 $<i+j$ 成立．再证 $i+j$ 时结论也成立．若 $i<j$，则

$$0\geqslant a_{ij}=l_{ii}u_{ij}+\sum_{k<i}l_{ik}u_{kj}.$$

因为 $l_{ik}\leqslant 0, u_{kj}\leqslant 0$，所以 $\sum\limits_{k<i}l_{ik}u_{kj}\geqslant 0, l_{ii}>0$. 从而 $u_{ij}\leqslant 0\ (\forall\ i<j)$.

类似可证 $l_{ij}\leqslant 0\ (\forall\ i>j)$.

1352 设 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$，则下面各条彼此等价：

1) A 的所有主子式大于0；

2) 若对角矩阵 $D\geqslant 0$，则 $A+D$ 的所有主子式不为零；

3) $\forall\ 0\neq x\in R^n, y=Ax=(y_1,\cdots,y_n)'$，则存在 i，使 $x_iy_i>0$；

4) 对任意 $0\neq x\in R^n$，存在正对角矩阵 D_x，使 $x'D_xAx>0$；

5) 对任意 $0\neq x\in R^n$，存在非负对角矩阵 H_x，使 $x'H_xAx>0$；

6) A 的每一个主子矩阵的任意实特征值都大于0；

7) 对任意 $0\neq x\in R^n$，且 $z=A'x=(z_1,\cdots,z_n)'$，存在 k，使得 $x_kz_k>0$；

8) 对任意 n 阶符号矩阵 S（即 S 为对角矩阵，且对角元素为1或−1），$SA'Sz\leqslant 0, z\geqslant 0$ 可推出 $z=0$.

证 1)⇒2) 因为 $D=\mathrm{diag}(d_1,\cdots,d_n)\geqslant 0$，所以当把 $A+D$ 的任意 k 阶主子式拆成 2^k 个行列式之和时，由于每一个行列式均非负，且至少有一个为正，故此 k 阶主子式不等于0.

2)⇒3) 用反证法．设存在 $x'=(x_1,\cdots,x_n)\neq 0$ 且使 $y=Ax=(y_1,\cdots,y_n)'$，有 $x_iy_i\leqslant 0, i=1,2,\cdots,n$.

设 x 分量中不为零的元是 $x_{i_1},\cdots,x_{i_m}$，其中 $i_1<\cdots<i_m$，并令

$B=A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_m \\ i_1 & \cdots & i_m \end{pmatrix}$为 A 的相应的主子矩阵，$z'=(x_{i1},\cdots,x_{im})$，$u'=(y_{i1},\cdots,y_{im})$，那么 $u=Bz$.

由于 $x_iy_i\leqslant 0$，故存在非负的对角矩阵 $D=\mathrm{diag}(d_{i1},\cdots,d_{im})$使 $u=-Dz$. 所以$(B+D)z=0$. 由 2)的假设可得$|B+D|\neq 0$，从而 $z=0$. 这与 z 的假设矛盾.

3)⇒4) 取 $x'=(x_1,\cdots,x_2)\neq 0$，令 $y=Ax=(y_1,\cdots,y_n)'$，存在 i，使 $x_iy_i>0$. 从而存在充分小的 $\varepsilon>0$，使 $x_iy_i+\varepsilon\sum\limits_{k\neq i}x_ky_k>0$. 令 $D=\mathrm{diag}(\varepsilon,\cdots,\underset{(i)}{1},\cdots,\varepsilon)$，则 $D>0$，$x'DAx=x'Dy=x_iy_i+\varepsilon\sum\limits_{k\neq i}x_ky_k>0$.

4)⇒5) 显然.

5)⇒6) 任取 $B=A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ i_1 & \cdots & i_k \end{pmatrix}$为 A 的主子矩阵，其中 $i_1<\cdots<i_k$. 设 λ 是 B 的任一实特征值，α 为其相应的实特征向量，$B\alpha=\lambda\alpha$，其中 $\alpha'=(x_{i_1},\cdots,x_{i_k})$. 令 $y'=(y_1,\cdots,y_n)$，其中 $y_{i_j}=x_{i_j}$，$j=1,2,\cdots,k$，其余 y_i 都取 0，则 $y\neq 0$. 由 5)的假设，存在 $H\geqslant 0$，使 $y'HAy>0$. 令 $S=\mathrm{diag}(h_{i_1},\cdots,h_{i_k})$，则

$$0<y'HAy=\alpha'SB\alpha=\alpha'S\lambda\alpha=\lambda\alpha'S\alpha.$$

但 $S\geqslant 0$，所以 $\alpha'S\alpha\geqslant 0$. 因而 $\lambda>0$.

6)⇒1) 设 $B=A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ i_1 & \cdots & i_k \end{pmatrix}$为 A 的任一主子式，则由 B 的复特征值成对，实特征值都大于 0. 知$|B|>0$.

7)⇒3) 由于 1)⟺3)等价，A 的所有主子式大于 0 又等价于 A'的所有主子式大于 0.

7)⇒8) 用反证法. 若存在符号矩阵 S，使得 $u\geqslant 0$，$SA'Su\leqslant 0$，$u\neq 0$，则

$$u'SA'Su\leqslant 0. \tag{1}$$

令 $Su=y=(y_1,\cdots,y_n)'$，由 $u\neq0$，S 可逆知 $y\neq0$. 再令 $A'y=z=(z_1,\cdots,z_n)'$，由(1)有

$$0\geqslant(Su)'A'Su=y'z.$$

所以 $y_iz_i\leqslant0,i=1,2,\cdots,n$. 这与 7)的假设矛盾.

8)⇒7) 用反证法. 若存在 $y=(y_1,\cdots,y_n)'\neq0$，使得 $z=A'y=(z_1,\cdots,z_n)'$，而 $y_kz_k\leqslant0,k=1,2,\cdots,n$. 可选取符号矩阵 S 使得 $u=Sy\geqslant0$ 且 $Sz\leqslant0$，而 $S^2=E$，

$$SA'Su=SA'S(Sy)=SA'y=Sz\leqslant0;u\geqslant0,$$

但 $u\neq0$，这与 8)的假设矛盾.

1353. 设 $A\in R^{m\times n}$，则下面两条等价：

1) 存在 $x\geqslant0$，使得 $Ax>0$；

2) 当 $y>0$ 与 $A'y\leqslant0$ 时，$y=0$.

证 1)⇒2) 用反证法. 若存在 $y\geqslant0,A'y\leqslant0,y\neq0$，则 $y'Ax=y'(Ax)>0$. 另一方面，$y'Ax=(A'y)'x\leqslant0$，矛盾.

2)⇒1) 令 $C_1=\{(x_1,\cdots,x_m)|x_i\geqslant0\}$，

$$C_2=\{(y_1,\cdots,y_n)|y_i\geqslant0\},C_3=\{-A'x|x\in C_1\},$$

则 $C_2\cap C_3=\{0\}$. 故 R^n 中有超平面 $u'x=0$，使得所有 $0\neq x\in C_2$ 满足 $u'x>0$. 从而 $u>0$.

对所有 $0\neq x\in C_3$ 满足 $u'x<0$，从而使 $A'z\neq0$ 的向量 $z\neq0$，$u'A'z>0$.

由 2)，对所有 $z\geqslant0,z\neq0$，有 $u'A'z\geqslant0$. 于是有 $u'A'>0$ 或 $Au>0$.

注 从证明过程看出，1)可改为"存在 $u>0$，使得 $Au>0$."

1354. 设 $A\in R^{n\times n}$，则 A 的所有主子式$>0\Longleftrightarrow$对任意 n 阶符号矩阵 S，存在 $x\geqslant0$，使 $SASx>0$.

证 必要性 由第 **1352** 条知，对任意的 n 阶符号矩阵 S，由 $SA'Sz\leqslant0$ 与 $z\geqslant0$ 可推出 $z=0$. 令 $B=SA'S$，则由 $Bz\leqslant0;z\geqslant0$ 可推出 $z=0$. 从而由第 **1353** 条知，存在 $x\geqslant0$，使 $Bx>0$. 此即表

明 $SA'Sx>0$.

充分性 令 $B=SAS$. 若对任意 n 阶符号矩阵 S，存在 $x\geqslant 0$，使 $0<SASx=Bx$，则由第 **35** 条，当 $y\geqslant 0, B'y\leqslant 0$ 时，$y=0$. 此即 $y\geqslant 0, SA'Sy\leqslant 0$ 可得 $y=0$. 再由第 **1352** 条即得 A 的所有主子式大于 0.

1355. 设 A 是 n 阶 M 矩阵，则下面几条等价：

1) A 是非奇异 M 矩阵；

2) 存在 $P,Q\in R^{n\times n}$，使得 $A=P-Q, P^{-1}\geqslant 0, Q\geqslant 0, \rho(P^{-1}Q)<1$；

3) A 可逆，且 $A^{-1}\geqslant 0$；

4) 存在 $x>0$，使 $Ax>0$；

5) A 的任一特征值的实部大于 0.

证 1)⇒2) 设 $A=sE-B, s>\rho(B)\geqslant 0, B\geqslant 0$. 令 $P=sE, Q=B$，则 $P^{-1}=\frac{1}{s}E\geqslant 0, Q\geqslant 0$. 于是 $A=P-Q$，且 $\rho(P^{-1}Q)=\rho(\frac{1}{s}Q)=\frac{1}{s}\rho(B)<1$.

2)⇒3) 由假设，$A=P-Q, P^{-1}\geqslant 0, Q\geqslant 0, \rho(P^{-1}Q)<1$. 令 $C=P^{-1}Q$，则 $A=P-Q=P(E-C)$. 因为 $\rho(C)<1$，所以就有 $|E-C|\neq 0$，从而 $|A|\neq 0$. 故 A 可逆. 且

$$A^{-1}=(E-C)^{-1}P^{-1}=(E+C+C^2+\cdots)P^{-1}.$$

由于 $P^{-1}\geqslant 0, Q\geqslant 0$，因此 $C=P^{-1}Q\geqslant 0$. 从而 $A^{-1}\geqslant 0$.

3)⇒4) 令 $x=A^{-1}e$，其中 $e'=(1,\cdots,1)$. 由于 $A^{-1}\geqslant 0$，因此 $x=A^{-1}e\geqslant 0, Ax=e>0$.

若 $x>0$，则结论成立. 否则，x 的分量中有为 0 者时，取充分小 $\varepsilon>0$，使 $0<Ax+\varepsilon Ae=A(x+\varepsilon e)$，这时 $x+\varepsilon e>0$ 即为所求.

4)⇒5) 由 A 是 M 矩阵，则 $A=sE-B, s>0, B\geqslant 0$. 若存在 $x>0$，使 $Ax>0$，则 $(sE-B)x>0$，即

$$sx>Bx. \tag{1}$$

设 B' 相应于特征值 $\rho(B')$ 的一个特征向量为 γ，即 $B'\gamma=\rho(B)\gamma$。在(1)式两端左乘以 γ' 得 $s\gamma'x>\gamma'Bx=(B'\gamma)'x=(\rho(B)\gamma)'x=\rho(B)\gamma'x$，所以 $s>\rho(B)$。

但 $A=sE-B$。设 $\lambda=a+ib$ 为 A 的任一特征值，α 是相应的一个特征向量，那么由 $A\alpha=\lambda\alpha$ 得

$$(sE-B)\alpha=\lambda\alpha,\quad B\alpha=(\lambda-s)\alpha.$$

从而 $\lambda-s$ 为 B 的特征值，且 $|\lambda-s|\leqslant\rho(B)<S$，$|(a-s)+bi|<s$，所以 $a>0$。

5)⇒1)　设 $A=sE-B$，$B\geqslant0$，则 $s-\rho(B)$ 是 A 的特征值．而 $s-\rho(B)$ 是实数，所以 $s-\rho(B)>0$。故 A 是非奇异 M 矩阵．

1356.　设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶 M 矩阵，则 A 为非奇异的 M 矩阵 $\Longleftrightarrow A$ 的所有顺序主子式大于 0.

证　$A=sE-B$，其中 $B\geqslant0$。

必要性　由于 $s>\rho(B)$，任取 $C=A\begin{pmatrix}1&2&\cdots&k\\1&2&\cdots&k\end{pmatrix}$，则 C 也是 M 矩阵，且

$$C=sE-B\begin{pmatrix}1&2&\cdots&k\\1&2&\cdots&k\end{pmatrix},\quad B\begin{pmatrix}1&2&\cdots&k\\1&2&\cdots&k\end{pmatrix}\geqslant0,$$

$$s>\rho(B)\geqslant\rho\left(B\begin{pmatrix}1&2&\cdots&k\\1&2&\cdots&k\end{pmatrix}\right).$$

故 C 为非奇异 M 矩阵．由第 **1355** 条知 C 的实特征值均为正数．所以 $|C|\neq0$.

充分性　对 n 作数学归纳法．当 $A=(a)$ 时，$a>0$，则 $A=aE_1-B$，其中 $B=0$，$a>\rho(B)$。故 A 为非奇异 M 矩阵，从而结论成立．

归纳假定结论对 $n-1$ 成立．设

$$A=(a_{ij})_{n\times n}=\begin{bmatrix}C&\alpha\\\beta&a_{nn}\end{bmatrix},$$

其中 $C=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{bmatrix}$，$\alpha=\begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n-1,n} \end{bmatrix}$，$\beta=(a_{n1},\cdots,a_{n,n-1})$.

由假设 $|C|>0$.

令 $P=\begin{bmatrix} C^{-1} & 0 \\ -\beta C^{-1} & 1 \end{bmatrix}$，则

$$PA=\begin{bmatrix} E_{n-1} & C^{-1}\alpha \\ 0 & a_{nn}-\beta C^{-1}\alpha \end{bmatrix},$$

两边取行列式得

$$a_{nn}-\beta C^{-1}\alpha=|P||A|>0.$$

再令

$$Q=\begin{bmatrix} E_{n-1} & -C^{-1}\alpha(a_{nn}-\beta C^{-1}\alpha)^{-1} \\ 0 & (a_{nn}-\beta C^{-1}\alpha)^{-1} \end{bmatrix},$$

则 $QPA=E$，故 $A^{-1}=QP$. 因为 $\alpha\leqslant 0,\beta\leqslant 0,P\geqslant 0,Q\geqslant 0$，所以 $A^{-1}=QP\geqslant 0$. 由第 **1355** 条可知 A 是非奇异的 M 矩阵.

1357. 设 $B\in R^{n\times n},B\geqslant 0,s$ 是正数，令 $A=sE-B$，则 A 为非奇异的 M 矩阵 $\Longleftrightarrow A$ 的各阶顺序主子式都大于 0.

证 因为 A 是 M 矩阵，然后由第 **1356** 条可得.

第十八章　矩阵分析

一、 极限

1358. 什么叫做收敛的矩阵序列？

答 记矩阵 A 的 (i,j) 元为 $(A)_{ij}$. 设有 $s\times m$ 矩阵序列 A_1, $A_2,\cdots,A_n\cdots$，若

$$\lim_{n\to\infty}(A_n)_{ij}=b_{ij},i=1,2,\cdots,s;j=1,2,\cdots,m$$

成立，则称矩阵序列 $\{A_n\}$ 收敛于 B，其中矩阵 $B=(b_{ij})_{s\times m}$，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=B$，并称 B 为 $\{A_n\}$ 的极限．否则称 $\{A_n\}$ 是发散的．

1359. 设两矩阵序列

$$A_n=\begin{bmatrix}1-\frac{1}{n} & \frac{n-1}{n^2}\\ 1 & \frac{3-n}{4+n}\end{bmatrix},B_n=\begin{bmatrix}1 & n-1 & 5\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix},n=1,2,\cdots.$$

$\{A_n\}$、$\{B_n\}$ 是否收敛？求出收敛的矩阵序列的极限．

解 $\{A_n\}$ 收敛．$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}$.

$\{B_n\}$ 是发散的，因为其中 $\lim\limits_{n\to\infty}(n-1)$ 没有极限．

1360. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}B_n=B$，则

$$\lim_{n\to\infty}(cA_n+dB_n)=cA+dB,$$

其中 c,d 为常数．

证 由定义可证．

1361. 设 $\{A_n\}$ 为 $s\times m$ 矩阵序列，$\{B_n\}$ 为 $m\times r$ 矩阵序列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}B_n=B$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}A_nB_n=AB$.

证　因为当 $n\to\infty$ 时，

$$(A_nB_n)_{ij}=\sum_{k=1}^{m}(A_n)_{ik}(B_n)_{kj}\longrightarrow\sum_{k=1}^{m}(A)_{ik}(B)_{kj}=(AB)_{ij},$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}A_nB_n=AB$.

1362.　设 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}PA_nQ=PAQ$.

证　由 $\lim\limits_{n\to\infty}P=P$ 得 $\lim\limits_{n\to\infty}PA_n=PA$. 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}PA_nQ=PAQ$.

1363.　什么叫做无穷小序列？

答　设 $\{A_n\}$ 是 $s\times m$ 矩阵序列，若 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=0$，则称 $\{A_n\}$ 为无穷小序列．

1364.　$s\times m$ 矩阵序列 $\{A_n\}$ 为无穷小序列的充要条件是极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\|A_n\|=0$，其中 $\|A\|=\max\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_{ij}|$，$A=(a_{ij})_{s\times m}$.

证　先证必要性．　设 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=0$，则

$$\lim_{n\to\infty}(A_n)_{ij}=0,i=1,2,\cdots,s;j=1,2,\cdots,m.$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\max|(A_n)_{ij}|=0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\|A_n\|=0$.

再证充分性．　若 $\lim\limits_{n\to\infty}\|A_n\|=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\max|(A_n)_{ij}|=0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(A_n)_{ij}=0$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=0$.

1365.　设 A 是 $m\times m$ 矩阵，则矩阵序列

$$A,A^2,\cdots,A^n,\cdots \tag{1}$$

有极限的充要条件是 A 的所有特征值之模都小于 1，这时必有

$$\lim_{n\to\infty}A^n=0.$$

证　设 A 的若当标准形为 $J=\mathrm{diag}(J_1,\cdots,J_s)$，其中

$$J_k=\begin{bmatrix}\lambda_k & 1 & & \\ & \lambda_k & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & \lambda_k\end{bmatrix}_{n_k\times n_k},k=1,2,\cdots,s;\quad n_1+n_2+\cdots n_s=n.$$

先证充性性．　设 $|\lambda_k|<1,k=1,2,\cdots,s$. 由于

$$J_1^n=\begin{bmatrix}\lambda_1^n & C_n^1\lambda_1^{n-1} & \cdots & C_n^{k-1}\lambda_1^{n-k+1}\\ & \lambda_1^n & \cdots & C_n^{k-2}\lambda_1^{n-k+2}\\ & & & \vdots\\ & & & \lambda_1^n\end{bmatrix},$$

其中 $C_m^l=0$(当 $m<l$ 时),由于 $|\lambda_1|<1$,因此 $\lim\limits_{n\to\infty}J_1^n=0$. 类似可证得 $\lim\limits_{n\to\infty}J_k^n=0,k=2,3,\cdots,s$. 但是 $J^n=\mathrm{diag}(J_1^n,J_2^n,\cdots,J_s^n)$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}J^n=0$. 而 $A=P^{-1}JP,A^n=P^{-1}J^nP$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}A^n=0$.

再证必要性. 用反证法可得.

注 当 $|\lambda_i|<1$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}J_i^n=0,i=1,2,\cdots,s$.

1366. 什么叫做矩阵的极限?

答 设 $A(t)=\begin{bmatrix}a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{s1}(t) & \cdots & a_{sn}(t)\end{bmatrix}$.

若 $\lim\limits_{t\to a}a_{ij}(t)=b_{ij},1\leqslant i\leqslant s,1\leqslant j\leqslant n$,令 $B=(b_{ij})_{s\times n}$,则称 B 为 $A(t)$ 当 $t\longrightarrow a$ 时的极限,记为 $\lim\limits_{t\to a}A(t)=B$,并称 $A(t)$ 为收敛的. 否则,称 $A(t)$ 为发散的.

1367. 设 $\lim\limits_{t\to a}A(t)=A$, $\lim\limits_{t\to a}B(t)=B$, 则

$$\lim_{t\to a}(cA(t)+dB(t))=cA+dB,$$

其中 c,d 为常数.

证 由定义可证.

1368. 设 $\lim\limits_{t\to a}A(t)=A$, $\lim\limits_{t\to a}B(t)=B$,则 $\lim\limits_{t\to a}A(t)B(t)=AB$.

证 由定义可证.

二、 矩阵级数

1369. 什么叫做矩阵级数的和?

答 设矩阵级数为 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}A_k$. 令 $S_N=\sum\limits_{k=1}^{N}A_k$,若 $\lim\limits_{N\to\infty}S_N=B$,则

称 $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ 是收敛的，且其和为 B，记为 $B=\sum_{k=1}^{\infty} A_k$. 若 $\lim_{N\to\infty} S_N$ 不存在，则称 $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ 是发散的．

注 $\sum_{k=1}^{\infty} A_k=B$ 意即 $\sum_{k=1}^{\infty}(A_k)_{ij}=(B)_{ij}$.

1370. 设

$$A_k=\begin{bmatrix}\frac{1}{2^k} & 0\\ \frac{1}{3^k} & (-1)^k\frac{1}{5^k}\end{bmatrix},\ k=1,2,\cdots,$$

求 $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ 的和．

解 $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ 收敛，且和为$\begin{bmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{6}\end{bmatrix}$.

1371. 什么叫做矩阵级数是绝对收敛的?

答 设 $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ 为矩阵级数，若

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}|(A_k)_{ij}|=b_{ij},i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n,$$

则称 $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ 是绝对收敛的．

注 若 $\sum_{k=1}^{\infty}(A_k)_{ij}$都绝对收敛，则 $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ 绝对收敛．

1372. 若 $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ 绝对收敛，则 $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ 一定收敛，反之不然．

证 仿微积分中方法可证.

1373. 级数 $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ 绝对收敛的充要条件是 $\sum_{k=1}^{\infty}\|A_k\|$ 收敛，其中 $\|A_k\|=\max_{i,j}|(A_k)_{ij}|$.

证 必要性 设$\sum_{k=1}^{\infty}A_k$绝对收敛，则存在正数c，使对任意的N,i,j，有$\sum_{k=1}^{N}|(A_k)_{ij}|<c$. 而

$$\sum_{k=1}^{N}\|A_k\|=\sum_{k=1}^{N}\max_{i,j}|(A_k)_{ij}|\leqslant\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|(A_k)_{ij}|$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{N}|(A_k)_{ij}|<\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c=n^2c,$$

所以$\sum_{k=1}^{\infty}\|A_k\|$收敛.

充分性 若$\sum_{k=1}^{\infty}\|A_k\|$收敛，则对任意$i,j$，由$|(A_k)_{ij}|\leqslant\|A_k\|$，所以$\sum_{k=1}^{\infty}(A_k)_{ij}$都绝对收敛. 故$\sum_{k=1}^{\infty}A_k$绝对收敛.

1374. 若$\sum_{k=1}^{\infty}A_k$收敛(绝对收敛)，则$\sum_{k=1}^{\infty}PA_kQ$也收敛(绝对收敛)，且$\sum_{k=1}^{\infty}PA_kQ=P(\sum_{k=1}^{\infty}A_k)Q$.

证 设$\sum_{k=1}^{\infty}A_k=B$. 令$B_N=\sum_{k=1}^{N}A_k$，则$\lim\limits_{N\to\infty}B_N=B$. 但当$N\to\infty$时，有$PB_NQ\to PBQ$，

$$\therefore\qquad \sum_{k=1}^{\infty}PA_kQ=P(\sum_{k=1}^{\infty}A_k)Q.$$

1375. 设$J=\begin{pmatrix}a & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & a\end{pmatrix}_{n\times n}$为若当块，求$J^k$，其中$k$为自然数.

解 $J^2=\begin{bmatrix} a^2 & 2a & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 2a \\ & & & & a^2 \end{bmatrix}$, $J^3=\begin{bmatrix} a^3 & 3a^2 & 3a & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & \ddots & 3a \\ & & & & \ddots & 3a^2 \\ & & & & & a^3 \end{bmatrix}$.

用归纳法可证得

$$J^k=\begin{bmatrix} \varphi_k(a) & \varphi_k'(a) & \frac{1}{2!}\varphi_k''(a) & \cdots & \frac{1}{(n-1)!}\varphi_k^{(n-1)}(a) \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{1}{2!}\varphi_k''(a) \\ & & & \ddots & \varphi_k'(a) \\ & & & & \varphi_k(a) \end{bmatrix},$$

其中 $\varphi_k(x)=x^k$, k 为自然数.

1376. 设 $J=\begin{bmatrix} a & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & a \end{bmatrix}_{n\times n}$, $g(\lambda)=\sum_{k=0}^{m}c_k\lambda^k$, 则

$$g(J)=\begin{bmatrix} g(a) & g'(a) & \frac{1}{2!}g''(a) & \cdots & \frac{1}{(n-1)!}g^{(n-1)}(a) \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{1}{2!}g''(a) \\ & & & \ddots & g'(a) \\ & & & & g(a) \end{bmatrix}.$$

证 由第 1375 条可得.

1377. 设 $J=\begin{bmatrix} a & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & a \end{bmatrix}_{n\times n}$, 且 $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}c_kx^k$ 的收敛半径为 R. 当 $|a|<R$ 时, $\sum_{k=0}^{\infty}c_kJ^k$ 绝对收敛.

证 令 $S_N(x)=\sum_{k=0}^{N}c_kx^k$,则

$$\lim_{N\to\infty}S_N(x)=f(x). \tag{1}$$

由第 1376 条,

$$S_N(J)=\begin{bmatrix} S_N(a) & S_N'(a) & \cdots & \frac{1}{(n-1)!}S_N^{(n-1)}(a) \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & S_N'(a) \\ & 0 & & S_N(a) \end{bmatrix}. \tag{2}$$

因为$|a|<R$,由(1)式知(2)式右端中(i,j)元的极限都存在,即 $\lim_{N\to\infty}S_N(J)$存在.从而$\sum_{k=0}^{\infty}c_kJ^k$绝对收敛.

1378. 设 A 的 n 个特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$,且幂级数 $S(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kz^k$ 的收敛半径为 R,则

1) 当$|\lambda_k|<R,k=1,2,\cdots,n$ 时,$\sum_{k=0}^{\infty}c_kA^k$ 是绝对收敛的;

2) 当有一个 λ_j,使$|\lambda_j|>R$ 时,$\sum_{k=0}^{\infty}c_kA^k$ 是发散的.

证 1) 设 $T^{-1}AT=\mathrm{diag}(J_1,\cdots,J_s)$,其中 J_k 为若当块($k=1,2,\cdots,s$),则 $A=T\mathrm{diag}(J_1,\cdots,J_s)T^{-1}$.

令 $S_N(A)=\sum_{k=0}^{N}|c_k|A^k$,则

$$S_N(A)=T\mathrm{diag}(S_N(J_1),\cdots,S_N(J_s))T^{-1}.$$

由第 1377 条知$\sum_{k=0}^{\infty}c_kJ_i^k(i=1,\cdots,s)$都绝对收敛.故 $\lim_{N\to\infty}S_N(J_i)$都存在.从而 $\lim_{N\to\infty}S_N(A)$存在,即$\sum_{k=0}^{\infty}c_kA^k$绝对收敛.

2) 设 $T^{-1}AT=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}$，则

$$T^{-1}A^kT=\begin{bmatrix}\lambda_1^k & & ** \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k\end{bmatrix}.$$

当 $|\lambda_j|>R$ 时，$\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_k\lambda_j^k$ 发散．从而 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_kA^k$ 发散．

三、几个常用的矩阵级数

1379. 若 A 的特征值的模都小于 1，则

$$(E-A)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}A^k.$$

证 因为 1 不是 A 的特征值，$|E-A|\neq 0$，故 $E-A$ 可逆．令

$$S_N=E+A+\cdots+A^{N-1},$$

则 $$E-A^N=S_N(E-A),S_N=(E-A)^{-1}(E-A^N).$$

由第 **1365** 条得 $\lim\limits_{N\to\infty}S_N=(E-A)^{-1}$.

1380. 证明：$\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k$ 收敛.

证 因为 $e^z=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}z^k$ 的收敛区域为$(-\infty,+\infty)$，由第 **1378** 条知 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k$ 绝对收敛．

注 记 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k}A^k=e^A$.

1381. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}A^{2n+1}$ 及 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}A^{2n}$ 均收敛，其和分别记为 $\sin A$ 和 $\cos A$.

证 因为 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$，$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内收敛，由第 **1378** 条即知结论成立．

注 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，一般地，$e^A\neq(e^{a_{ij}})_{n\times n}$，$\sin A\neq(\sin a_{ij})_{n\times n}$，$\cos A\neq(\cos a_{ij})_{n\times n}$.

1382. 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$，求 e^A，$\sin A$，$\cos A$.

解 因 $A^2=A$，所以 $A=A^2=\cdots=A^k=\cdots$. 故

$$\begin{aligned}e^A&=E+A+\frac{1}{2!}A^2+\cdots=E+(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots)A\\&=E+(e-1)A=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}e-1 & e-1\\0 & 0\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}e & e-1\\0 & 1\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin A&=A-\frac{1}{3!}A^3+\frac{1}{5!}A^5-\cdots=(1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\cdots)A\\&=(\sin 1)A=\begin{bmatrix}\sin 1 & \sin 1\\0 & 0\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

$$\cos A=\begin{bmatrix}\cos 1 & \cos 1\\0 & 0\end{bmatrix}.$$

1383. 等式 $e^{A+B}=e^A\cdot e^B$ 是否成立？

答 一般不成立．比如，$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 0\end{bmatrix}$，

$A+B=\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$. 用数学归纳法可证：

$$(A+B)^k=2^{k-1}(A+B),k=1,2,\cdots.$$

$$\begin{aligned}e^{A+B}&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(A+B)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{k-1}}{k!}(A+B)\\&=E+\frac{1}{2}(e^2-1)(A+B)=\begin{bmatrix}e^2 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

由第 **1382** 条知 $e^A=\begin{bmatrix} e & e-1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，$e^B=\begin{bmatrix} e & 1-e \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$$e^A\cdot e^B=\begin{bmatrix} e & e-1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & 1-e \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e^2 & -(e-1)^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\neq e^{A+B}.$$

注　还可求出 $e^B\cdot e^A=\begin{bmatrix} e^2 & (e-1)^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，故 $e^{A+B}\neq e^Be^A$.

四、　矩阵的微分

1384.　什么叫做矩阵可微?

答　设

$$A(t)=\begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}(t) & \cdots & a_{mn}(t) \end{bmatrix},$$

其中 $a_{ij}(t)$ $(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 是 t 的可微函数，则称矩阵 $A(t)$ 是可微的；称

$$\begin{bmatrix} a_{11}'(t) & \cdots & a_{1n}'(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}'(t) & \cdots & a_{mn}'(t) \end{bmatrix}$$

为 $A(t)$ 对 t 的导数，记为 $\frac{d}{dt}A(t)$；称

$$\begin{bmatrix} da_{11}(t) & \cdots & da_{1n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ da_{m1}(t) & \cdots & da_{mn}(t) \end{bmatrix}$$

为 $A(t)$ 对 t 的微分，记为 $d(A(t))$.

例如，设 $A(t)=\begin{bmatrix} 1-t & t^2 & 3t+5 \\ 4 & 2t^3 & 1 \end{bmatrix}$，则

$$\frac{dA(t)}{dt}=\begin{bmatrix} -1 & 2t & 3 \\ 0 & 6t^2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$dA(t)=\begin{bmatrix} -dt & 2tdt & 3dt \\ 0 & 6t^2dt & 0 \end{bmatrix}.$$

1385. $\frac{d}{dt}(A(t)+B(t))=\frac{d}{dt}A(t)+\frac{d}{dt}B(t)$，其中 $A(t),B(t)$ 均为 $n\times m$ 矩阵．

1386. $\frac{d}{dt}(A(t)B(t))=(\frac{d}{dt}A(t))B(t)+A(t)(\frac{d}{dt}B(t))$，其中 $A(t)$ 为 $s\times n$ 矩阵，$B(t)$ 为 $n\times m$ 矩阵．

证 设 $A(t)=(a_{ij}(t))_{s\times n}$，$B(t)=(b_{ij}(t))_{n\times m}$，令

$$C(t)=A(t)B(t)=(c_{ij}(t))_{s\times m},$$

其中 $c_{ij}(t)=a_{i1}(t)b_{1j}(t)+a_{i2}(t)b_{2j}(t)+\cdots+a_{in}(t)b_{nj}(t)$，这里 $i=1,2,\cdots,s;j=1,2,\cdots,m$．

由 $c_{ij}'(t)=(a_{i1}'(t)b_{1j}(t)+\cdots+a_{in}'(t)b_{nj}(t))+(a_{i1}(t)b_{1j}'(t)$
$+\cdots+(a_{in}(t)b_{nj}'(t))$

即得结论．

1387. 什么叫做函数对矩阵的微商？

答 设 $X=(x_{ij})_{n\times m}$ 是一个变量矩阵，记

$$f(x_{11},\cdots,x_{1m},x_{21},\cdots,x_{2m},\cdots,x_{n1},\cdots,x_{nm})=f(X),$$

定义

$$\frac{\partial f}{\partial X}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x_{11}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_{1n}}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial f}{\partial x_{n1}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_{nm}}\end{bmatrix}$$

为函数 $f(X)$ 对矩阵 X 的微商．

比如，设 $X=\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & r\end{bmatrix}$，设 $F(X)=a^2+b^2+c^2+d^3+e^4+r^5$，

则

$$\frac{\partial F}{\partial X}=\begin{bmatrix}\frac{\partial F}{\partial a} & \frac{\partial F}{\partial b} & \frac{\partial F}{\partial c}\\ \frac{\partial F}{\partial d} & \frac{\partial F}{\partial e} & \frac{\partial F}{\partial r}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2a & 2b & 2c\\ 3d^2 & 4e^3 & 5r^4\end{bmatrix}.$$

1388. 设 $X=\begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix}$，则 $\left|\frac{\partial |X|}{\partial X}\right|=|X|$.

证 $|X|=xv-uy$.

$$\frac{\partial |X|}{\partial X}=\begin{bmatrix} \frac{\partial |X|}{\partial x} & \frac{\partial |X|}{\partial y} \\ \frac{\partial |X|}{\partial u} & \frac{\partial |X|}{\partial v} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} v & -u \\ -y & x \end{bmatrix},$$

取行列式即得.

1389. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为常量矩阵，$x'=(x_1,\cdots,x_n)$ 为变量矩阵，则 $\frac{\partial(x'Ax)}{\partial x}=(A+A')x$.

证 设 $x'Ax=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$，则

$$\frac{\partial(x'Ax)}{\partial x}=\begin{bmatrix} \frac{\partial(x'Ax)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial(x'Ax)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 2a_{11}x_1+(a_{12}+a_{21})x_2+\cdots+(a_{1n}+a_{n1})x_n \\ \vdots \\ (a_{1n}+a_{n1})x_1+(a_{2n}+a_{n2})x_2\cdots+2a_{nn}x_n \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} a_{11}x_1+a_{21}x_2+\cdots+a_{n1}x_n \\ \vdots \\ a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+\cdots+a_{nn}x_n \end{bmatrix}$$

$$=Ax+A'x=(A+A')x.$$

五、 矩阵的积分

1390. 什么叫做矩阵的积分？

答 设 $A(t)=(a_{ij}(t))_{n\times m}$，如果每个 $a_{ij}(t)$ 关于 t 在 $[\alpha,\beta]$ 上都可积（$i=1,2,\cdots,n$；$j=1,2,\cdots,m$），则称

$$\int_\alpha^\beta A(t)dt=\left(\int_\alpha^\beta a_{ij}(t)dt\right)_{n\times m}$$

为矩阵 $A(t)$ 的定积分．

比如，设 $A(t)=\begin{bmatrix} 2t & 5 & \cos t \\ e^t & 3t^2 & 4 \end{bmatrix}$，则

$$\int_0^x A(t)dt=\begin{bmatrix} \int_0^x 2tdt & \int_0^x 5dt & \int_0^x \cos tdt \\ \int_0^x e^t dt & \int_0^x 3t^2dt & \int_0^x 4dt \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} x^2 & 5x & \sin x \\ e^x-1 & x^3 & 4x \end{bmatrix}.$$

1391. $\int_\alpha^\beta (A(t)+B(t))dt=\int_\alpha^\beta B(t)dt+\int_\alpha^\beta B(t)dt$，其中 $A(t)$，$B(t)$ 均为 $n\times m$ 矩阵．

1392. $\int_\alpha^\beta kA(t)dt=k\int_\alpha^\beta A(t)dt$，其中 k 为常数，$A(t)$ 为 $n\times m$ 矩阵．

第十九章　线性空间

一、　定义与性质

1393.　什么是线性空间？

答　设 V 是一个非空集合，P 是一个数域，在 V 中定义了一个加法运算，在 P 与 V 的元素之间定义了一个数量乘法运算. 如果上述两种运算满足以下规则，那么称 V 为 P 上的一个线性空间（或称向量空间）.

1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$；

2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$；

3) V 中有一个元素 0，$\forall\ \alpha\in V$，都有 $\alpha+0=\alpha$，0 称为 V 的零元素；

4) $\forall\ \alpha\in V$，存在 $\beta\in V$，使得 $\alpha+\beta=0$，β 称为 α 的负元素；

5) $1\cdot\alpha=\alpha$；

6) $k(l\alpha)=(kl)\alpha$；

7) $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$；

8) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$；

其中 α,β,γ 表示 V 中的任意元素；k,l 表示 P 中的任意数.

1394.　上述线性空间定义中的 8 条规则，有哪几条是相互独立的？

答　2)—8)是相互独立的. 第 1)条可由其余七条规则推出. 事实上，$\forall\ \alpha,\beta\in V$，

$$\begin{aligned}2(\alpha+\beta)&=2\alpha+2\beta=(1+1)\alpha+(1+1)\beta\\&=(1\cdot\alpha+1\cdot\alpha)+(1\cdot\beta+1\cdot\beta)\\&=(\alpha+\alpha)+(\beta+\beta)=\alpha+(\alpha+\beta)+\beta;\qquad(1)\end{aligned}$$

另一方面,

$$
\begin{aligned}
2(\alpha+\beta)&=(1+1)(\alpha+\beta)\\
&=1\cdot(\alpha+\beta)+1\cdot(\alpha+\beta)\\
&=(\alpha+\beta)+(\alpha+\beta)=\alpha+(\beta+\alpha)+\beta; \qquad (2)
\end{aligned}
$$

比较(1)、(2)得 $\alpha+(\alpha+\beta)+\beta=\alpha+(\beta+\alpha)+\beta$

上式两边左加$-\alpha$,右加$-\beta$,则

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha.$$

注 性质1)很重要,且经常用到,所以仍将它保留在定义中.

1395. 非空集合V在定义了加法和数乘运算之后成为P上的一个线性空间,V能否再定义另外的加法和数乘运算成为P上的另一个线性空间?

答 有可能. 例如,全体二元实数列构成的集合

$$V=\{(a,b)\mid a,b\in R\}.$$

1) 定义$(a,b)\oplus(c,d)=(a+c,b+d)$,$k\cdot(a,b)=(ka,kb)$,则$V$成为$R$上的一个线性空间.

2) 定义$(a,b)\oplus(c,d)=(a+c,b+d+ac)$,$k\cdot(a,b)=(ka,kb+\frac{k(k-1)}{z}a^2)$,则$V$成为$R$上的另一个线性空间.

1396. 线性空间V有哪些简单性质与结论?

答 1) 零元素是唯一的.

2) α的负元素是唯一的.

3) $k\alpha=0\Longleftrightarrow k=0$或$\alpha=0$.

4) $-(-\alpha)=\alpha$.

5) $-(k\alpha)=(-k)\alpha=k(-\alpha)$.

6) $k(\alpha-\beta)=k\alpha-k\beta$.

7) $\forall\ \alpha,\beta\in V$,存在唯一的$\gamma\in V$,使$\alpha+\gamma=\beta$.

证 容易验证1)—3).

4) 因为$\alpha+(-\alpha)=0$,所以α为$(-\alpha)$的负元,即$\alpha=-(-\alpha)$.

5) $\because k\alpha+(-k)\alpha=(k+(-k))\alpha=0$, $\therefore (-k)\alpha=-(k\alpha)$. 另一式子可类似证明.

6) $k(\alpha-\beta)=k(\alpha+(-\beta))=k\alpha+k(-\beta)=k\alpha+(-k)\beta=k\alpha-k\beta$.

7) $\because \alpha+(\beta-\alpha)=\beta$, $\therefore \gamma=\beta-\alpha$ 是方程 $\alpha+x=\beta$ 的解. 又若 γ_1 也是 $\alpha+x=\beta$ 的解,则 $\alpha+\gamma=\alpha+\gamma_1$. 两边左加 $-\alpha$,有 $\gamma=\gamma_1$. 所以方程 $\alpha+x=\beta$ 在 V 中有唯一解.

1397. 判断一个非空集合 M 不是线性空间有哪些基本方法?

答 如果 M 满足以下诸条之一,那么 M 不是线性空间:

1) M 是至少含两个元的有限集;

2) M 关于定义的某一运算不封闭;

3) M 不满足 8 条规则中的任一条.

1398. 线性空间的例子.

1) 数域 P 按照数的加法与乘法构成自身上的一个线性空间. 特别地,实数域 R 和复数域 C 按照数的加法与乘法都是自身上的线性空间.

2) 已知数域 $P\subseteq$ 数域 $\bar{P}$,按照数的加法与乘法,$\bar{P}$ 构成 P 上的线性空间.

3) 三维空间中与已知向量平行的向量的全体再添上零向量,对于向量的加法与数乘运算构成一个实线性空间.

4) 分量属于数域 P 的全体 n 元数组,对于 n 元数组的加法与数乘构成 P 上的一个线性空间,记作 P^n.

5) 无穷实数列的全体:

$I_\infty=\{(x_1,x_2,\cdots\cdots)\mid x_i\in R, i=1,2,\cdots\}$,

对于 $(x_1,x_2,\cdots)+(y_1,y_2,\cdots)=(x_1+y_1,x_2+y_2\cdots)$, $k(x_1,x_2,\cdots)=(kx_1,kx_2,\cdots)$, $k\in R$,构成一个实线性空间.

6) n 元齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解向量的全体,对于 n 维向

量的加法与数乘构成 P 上的线性空间(为 P^n 的子空间).

7) 元素属于数域 P 的 $m\times n$ 矩阵的全体,对于矩阵的加法与数乘构成 P 上的线性空间,记作 $P^{m\times n}$.

8) 数域 P 上全体 n 阶对称(反对称,上三角)矩阵对于矩阵的加法与数乘构成 P 上的线性空间.

9) 设 $A\in P^{n\times n}$,则全体与 A 可交换的矩阵的集合,对于矩阵的加法和数乘构成 $P^{n\times n}$的一个子空间,记作 $C(A)$.

10) 数域 P 上全体满足条件 $\mathrm{tr}A=0$($\mathrm{tr}A$ 表示 A 的迹,即 A 的主对角线元素之和)的 n 阶矩阵的集合,对于矩阵的加法和数乘构成 P 上的一个线性空间.

11) 数域 P 上全体一元多项式的集合,对于多项式的加法和数与多项式的乘法,构成 P 上的线性空间,记作 $P[x]$.

12) 次数小于 n 的一元多项式及零多项式的集合,对于多项式的加法和数与多项式的乘法,构成 P 上的线性空间,记作 $P[x]_n$.

13) 集合 $W=\{f(x)\mid f(x)\in R[x]_n$ 且 $f(1)=0\}$对于多项式的加法和数与多项式的乘法,构成 R 上的线性空间.

14) 数域 P 上形如 $a_1x+a_3x^3+a_5x^5+\cdots+a_{2n+1}x^{2n+1}$的多项式的全体,对于多项式的加法和数与多项式的乘法,构成 P 上的线性空间.

15) 数域 P 上多项式 $g(x)$的倍式的全体:

$$W=\{f(x)\mid g(x)\mid f(x)\},$$

对于多项式的加法和数与多项式的乘法,构成 P 上的线性空间.

16) 由 0 及数域 P 上 m 元 n 次多项式

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_m)=\sum_{k_1+\cdots+k_m=n} a_{k_1k_2\cdots k_m}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_m^{k_m}\quad(k_i\text{ 为正整数})$$

的全体,对于多项式的加法及数与多项式的乘法,构成 P 上的线性空间,其中 $a_{k_1k_2\cdots k_m}\in P$.

17）定义在区间$[a,b]$上的实函数的全体，对于函数的和及数与函数的积，构成R上的线性空间．$[a,b]$上的连续实函数全体为其子空间，记为$C[a,b]$．

18）全体形如

$$\frac{a_0}{2}+a_1\sin t+b_1\cos t+a_2\sin 2t+b_2\cos 2t+\cdots+a_n\sin nt+b_n\cos nt$$

的实函数，对于函数的和及数与函数的积，构成R上的线性空间．

1399. 下列集合关于指定运算均不构成线性空间：

1）起点在原点，终点在不经过原点的直线上的空间向量的全体，按向量的加法与数乘运算；

2）非齐次线性方程组$AX=b$ $(b\neq 0)$的解向量的全体，按向量的加法与数乘运算；

3）数域P上次数不低于定数n的多项式的全体并添上零多项式，按多项式的加法和数乘运算；

4）有理数域定义运算：$\alpha\oplus\beta=\alpha+\beta, k\circ\alpha=\frac{k\alpha}{2}$；

5）设P为有理数域，对整数集定义运算：

$$\alpha\oplus\beta=\alpha+\beta-1, k\circ\alpha=\alpha.$$

证 1）集合不含零向量，所以不是线性空间．

2）如果集合是空集，则不是线性空间．如果集合非空，则由于不含零向量，所以也不是线性空间．

3）因两个次数不低于n的多项式之和的次数可能低于n，即关于多项式加法不封闭，所以不是线性空间．

4）因$1\circ\alpha=\frac{\alpha}{2}\neq\alpha$ $(\alpha\neq 0)$不满足线性空间定义中的规则5)，所以不是自身上的线性空间．

5）取$\alpha=3, k=l=1$，则$(k+l)\circ\alpha=3$，而$k\circ\alpha\oplus l\circ\alpha=5$．故$(k+l)\circ\alpha\neq(k\circ\alpha)\oplus l\circ\alpha)$，不满足线性空间定义中的规则7)，所以集合不是线性空间．

二、 向量的线性相关性

1400. 什么叫做向量的线性相关和线性无关？

答 设 V 是数域 P 上的线性空间，且 $\alpha_i \in V(i=1,\cdots,s,s\geqslant 1)$，如果存在一组不全为零的数 $k_i \in P(i=1,\cdots,s)$，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0, \tag{1}$$

那么称向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 是线性相关的．否则，称它们是线性无关的．

注 ① 一个向量组不是线性相关，就一定线性无关，两者必居其一且仅居其一．

② $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关$\Longleftrightarrow$(1)式仅当 $k_1=\cdots=k_s=0$ 成立．

1401. 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性相关，是否对任意一组不全为零的 $k_1,\cdots,k_n$ 都有 $k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n=0$？

答 不一定，比如 $\alpha=0$ 是线性相关的，它对一切非零数 k 都有 $k\alpha=0$. 而 $\beta=(1,0)$，$\gamma=(2,0)$就不可能对一切非零数 k_1,k_2 使 $k_1\beta+k_2\gamma=0$.

1402. 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性相关，是否只存在唯一的一组不全为零的数 $k_1,\cdots,k_n$，使 $k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n=0$ 呢？另外这些数 k_i 是否全不为零呢？

答 有一组不全为零的数 $k_1,\cdots,k_n$，使 $k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n=0$，则必有无穷多组数，比如 $mk_1,\cdots,mk_n(m\in Z)$也可有

$$(mk_1)\alpha_1+\cdots+(mk_n)\alpha_n=0.$$

$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性相关，则存在一组不全为零的 $k_1,\cdots,k_n$ 使 $k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n=0$. 这些 $k_1,\cdots,k_n$ 中不一定全不为零，只是说至少有一个 $k_i\neq 0$，当然，有时也可能全不为 0.

1403. 什么叫做线性表出？什么叫做两个向量组等价？

答 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$ 都是数域 P 上的 n 维向量，如果有 P 中的 m 个数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使

$$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m,$$

那么称 β 是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的线性组合，或称 β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表出（线性表示）.

如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 中每个向量都可以由向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表出，且 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 中每个向量都可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表出，那么称向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 与向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 是等价的.

1404. 向量组之间的等价是不是一种等价关系？

答 是的. 不难证明以下三条成立：

1）反身性：每一个向量组都与自身等价.

2）对称性：如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 等价，那么 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 也与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 等价.

3）传递性：如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 等价，而 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 又与 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_t$ 等价，那么 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 与 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_t$ 等价.

1405. 向量的线性相关性有哪些主要性质？

答 容易证明的有：

1）零向量是线性相关的. 含零向量的向量组也是线性相关的.

2）单个非零向量是线性无关的.

3）设向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m(m\geqslant 2)$，则它们线性相关 $\Longleftrightarrow$ 至少存在一个向量，它可以由其余向量线性表出.

4）向量组(I)中如果有部分向量线性相关，则(I)一定线性相关.

5）向量组(I)线性无关，则(I)的任意一个部分组必线性无关.

6）向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 可由向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 线性表出，则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性无关 $\Longrightarrow r\leqslant s$.

7）任意 $n+1$ 个 n 维向量必线性相关.

8) 两个线性无关的等价向量组,必含有相同个数的向量.

1406. $P^n=\{(c_1,\cdots,c_n)|c_i\in P\}$. $\alpha_i=(a_{i1},\cdots,a_{in})\in P^n,i=1,2,\cdots,m$,则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性相关 $\Longleftrightarrow A'x=0$ 有非零解,其中 $A=(a_{ij})_{m\times n},x=(x_1,\cdots,x_m)'$.

1407. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n},\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 和 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 分别为 A 的行向量组和列向量组,则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性无关 $\Longleftrightarrow|A|\neq0\Longleftrightarrow\beta_1,\cdots,\beta_n$ 线性无关;$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性相关 $\Longleftrightarrow|A|=0\Longleftrightarrow\beta_1,\cdots,\beta_n$ 线性相关.

证 由第 **1406** 条可得.

1408. 设 $\alpha_i=(a_{i1},\cdots,a_{ik},a_{i,k+1},\cdots,a_{in})\in P^n(i=1,2,\cdots,m)$,令 $\beta_i=(a_{i1},\cdots,a_{ik})\ (i=1,2,\cdots,m)$则

1) 若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性相关 $\Longrightarrow\beta_1,\cdots,\beta_m$ 线性相关;

2) 若 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 线性无关 $\Longrightarrow\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性无关.

证 1) 若存在不全为零的数 $l_1,\cdots,l_m$,使 $l_1\alpha_1+\cdots+l_m\alpha_m=0$,则当然有 $l_1\beta_1+\cdots+l_m\beta_m=0$.

2) 用反证法. 若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性相关,则由 1)知 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 也线性相关,矛盾.

1409. 设 $A=(a_{ij})_{n\times m}$,其中 $a_{ij}\in P,(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m)$. 若 A 有一个子式不等于零,则此子式所在行(列)向量组线性无关.

证 只对行向量的情况进行证明. 设 A 的行向量组为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$. 不失一般性,设 $B=(a_{ij})_{k\times k}$,且 $|B|\neq0$,令 $\beta_i=(a_{i1},\cdots,a_{ik})$ $(i=1,2,\cdots,k)$,

由 **1407** 条知 $\beta_1,\cdots,\beta_k$ 线性无关;由 **1408** 条知 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 线性无关.

注 若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 线性无关,令 $C=(a_{ij})_{k\times n}$,则 C 中至少有一个 k 阶子式不等于 0(当然不一定是$|B|$).

1410. 设 $\alpha=(a_1,\cdots,a_n),\beta=(b_1,\cdots,b_n)$,则 α,β 线性相关

$\Longleftrightarrow$它们对应的分量成比例．

注　若 α 与 β 的对应分量不成比例，则它们一定线性无关．

1411.　如果 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，但 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta$ 线性相关，那么 β 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性表出，且表示法唯一．

证　由假设存在一组不全为零的数 $k_1,\cdots,k_{m+1}$，使

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m+k_{m+1}\beta=0.$$

若 $k_{m+1}=0$，则由 $k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m=0$，可证 $k_1=\cdots=k_m=0$. 这与假设矛盾，故 $k_{m+1}\neq0$，于是 $\beta=l_1\alpha_1+\cdots+l_m\alpha_m$，其中

$$l_i=-k_i/k_{m+1},i=1,2,\cdots,m.$$

即 β 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性表出．

若 $\beta=l_1\alpha_1+\cdots+l_m\alpha_m=s_1\alpha_1+\cdots+s_m\alpha_m$，则

$$(l_1-s_1)\alpha_1+\cdots+(l_m-s_m)\alpha_m=0.$$

由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，得 $l_i=s_i(i=1,2,\cdots,m)$，即表示法是唯一的．

1412.　设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，则 β 不能由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性表出$\Longleftrightarrow\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta$ 线性无关.

证　充分性　显然.

必要性　若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta$ 线性相关，由第 **1411** 条，则 β 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性表出，矛盾．

1413.　设 $a_1,\cdots,a_n\in P$，令

$$\beta_i=(1,a_i,a_i^2,\cdots,a_i^{n-1}),\quad i=1,2,\cdots,n.$$

则　$\beta_1,\cdots,\beta_n$ 线性无关$\Longleftrightarrow a_1,\cdots,a_n$ 互不相同．

证　必要性　令　$A=\begin{bmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{bmatrix}$.

由 **1407** 条知 $|A|\neq0$. 另一方面，因为 $|A|$ 是范德蒙行列式，于是 $\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i)=|A|\neq0$，故 $a_i\neq a_j,i\neq j$.

充分性　上面的每一步是可逆的．

1414. 什么叫做极大线性无关组?

答 如果向量组的一个部分组满足

1) 此部分组线性无关;

2) 原向量组每个向量都可由这个部分组线性表出,

则称此部分组是原向量组的一个极大线性无关组.

注 向量组与其极大线性无关组是等价的.

1415. 一个向量组的极大线性无关组是否唯一?

答 一般不唯一. 比如,$\alpha=(0,0)$, $\beta=(1,0)$, $\gamma=(2,0)$, 则 β 是 α,β,γ 的极大线性无关组;γ 也是 α,β,γ 的一个极大线性无关组.

注 ① 一个向量组有多个极大线性无关组时,这些极大线性无关组之间也互相等价.

② 由 **1405** 条知两个极大线性无关组虽可不同,但它们所含向量的个数相等.

1416. 什么叫做向量组的秩?

答 向量组的一个极大线性无关组所含向量的个数,称为向量组的秩. 只含零向量的向量组,规定它的秩为 0.

1417. 求 P^n 中所有向量组成的向量组的秩。

解 设 $\varepsilon_1=(1,0,\cdots,0)$, $\varepsilon_2=(0,1,0,\cdots,0)$, $\cdots$, $\varepsilon_n=(0,0,\cdots 0,1)\in P^n$,并称它们为 n 维标准单位向量. 由 **1407** 条可以证明它们线性无关. 并且 $\forall\ \alpha\in P^n$ 可由 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 线性表出. 故 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 是 P^n 所有向量的一个极大线性无关组,故秩等于 n.

1418. 设 V 是数域 P 上线性空间,$\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\cdots,\beta_s\in V$,且 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性无关,

$$(\beta_1,\cdots,\beta_s)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)A, \tag{1}$$

其中 $A=(a_{ij})_{n\times s}$, $a_{ij}\in P$, 再设 $A=(c_1,\cdots,c_s)$, 其中 $c_1,\cdots,c_s$ 为 A 的 n 维列向量. 若秩 $A=k$, 且 $c_{i1},\cdots,c_{ik}$ 为 $c_1,\cdots,c_s$ 的一个极大线性无关组,则

1) $\beta_{i1},\cdots,\beta_{ik}$是 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 的一个极大线性无关组；

2) 秩$\{\beta_1,\cdots,\beta_s\}$=秩 A.

证 1) 由(1)式知

$$\beta_i=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)c_i, i=1,2,\cdots,s. \tag{2}$$

① 先证 $\beta_{i1},\cdots,\beta_{ik}$线性无关. 设 $l_1\beta_{i1}+\cdots+l_k\beta_{ik}=0$,那么

$$\begin{aligned}0&=l_1\beta_{i1}+\cdots+l_k\beta_{ik}\\&=l_1(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)c_{i1}+\cdots+l_k(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)c_{ik}\\&=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)(l_1c_{i1}+\cdots+l_kc_{ik}).\end{aligned} \tag{3}$$

因为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性无关,由(3)式知

$$l_1c_{i1}+\cdots+l_kc_{ik}=0. \tag{4}$$

在 P^n 中,$c_{i1},\cdots,c_{ik}$线性无关,由(4)式知 $l_1=\cdots=l_k=0$.

② 其次,再任取 $\beta_i\in\{\beta_1,\cdots,\beta_s\}$,那么 c_i 可由 $c_{i1},\cdots,c_{ik}$线性表出,即 $c_i=m_1c_{i1}+\cdots+m_kc_{ik}$,于是

$$\begin{aligned}\beta_i&=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)c_i\\&=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)(m_1c_{i1}+\cdots+m_kc_{ik})\\&=m_1(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)c_{i1}+\cdots+m_k(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)c_{ik}\\&=m_1\beta_{i1}+\cdots+m_k\beta_{ik}.\end{aligned}$$

综合①、②,即知 $\beta_{i1},\cdots,\beta_{ik}$为 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 的一个极大线性无关组.

2) 由 1)即得秩$\{\beta_1,\cdots,\beta_s\}=k=$秩 A.

注 这解决了求抽象线性空间 V 的向量组的秩的问题. 同时还把求极大线性无关组的问题转化为求 P^n 中一个向量组的极大线性无关组的问题(而这是已知的).

1419. 设 $f_1(x)=6x^4+4x^3+x^2-x+2$, $f_2(x)=x^4+2x^2+3x-4$, $f_3(x)=x^4+4x^3-9x^2-16x+22$, $f_4(x)=7x^4+x^3-x+3$, 求 $f_1(x),f_2(x),f_3(x),f_4(x)$的极大线性无关组.

解 把 $f_i(x)$都看成 $P_5[x]$中元素,取 $P_5[x]$中一组基 $1,x,x^2,x^3,x^4$,那么

$$(f_1,f_2,f_3,f_4)=(1,x,x^2,x^3,x^4)\begin{bmatrix}6&1&1&7\\4&0&4&1\\1&2&-9&0\\-1&3&-16&-1\\2&-4&22&3\end{bmatrix}.\quad(1)$$

令

$$C_1=\begin{bmatrix}6\\4\\1\\-1\\2\end{bmatrix},C_2=\begin{bmatrix}1\\0\\2\\3\\-4\end{bmatrix},C_3=\begin{bmatrix}1\\4\\-9\\-16\\22\end{bmatrix},C_4=\begin{bmatrix}7\\1\\0\\-1\\3\end{bmatrix},$$

可求出 C_1,C_2,C_3,C_4 的一个极大线性无关组为 C_2,C_3,C_4. 于是(1)式中相应的 $f_2(x),f_3(x),f_4(x)$ 为 $f_1(x),f_2(x),f_3(x),f_4(x)$ 的一个极大线性无关组.

1420. 设

$$A=\begin{bmatrix}1&-1\\2&4\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0&3\\1&2\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}3&0\\7&14\end{bmatrix},$$

$$D=\begin{bmatrix}1&-1\\2&0\end{bmatrix},F=\begin{bmatrix}2&1\\5&6\end{bmatrix}$$

为线性空间 $R^{2\times2}$ 的 5 个向量，求它们的秩.

解　取 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 为 $R^{2\times2}$ 的一组基，那么

$$(A,B,C,D,F)=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})\begin{bmatrix}1&0&3&1&2\\-1&3&0&-1&1\\2&1&7&2&5\\4&2&14&0&6\end{bmatrix}.$$

而秩 $\begin{bmatrix}1&0&3&1&2\\-1&3&0&-1&1\\2&1&7&2&5\\4&2&14&0&0\end{bmatrix}=3$，所以向量组 A,B,C,D,F 的秩

等于 3.

1421. 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 是一组线性无关的向量，$\beta_i=\sum_{j=1}^{r}a_{ij}\alpha_j(i=1,2,\cdots,r)$，令 $A=(a_{ij})_{r\times r}$，则

$$\beta_1,\cdots,\beta_r\text{ 线性无关}\Longleftrightarrow|A|\neq 0.$$

证 由假设可知 $(\beta_1,\cdots,\beta_r)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)A'$. 由 **1418** 条知 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 线性无关 $\Longleftrightarrow$ 秩 $\{\beta_1,\cdots,\beta_r\}=r\Longleftrightarrow$ 秩 $A'=r\Longleftrightarrow|A|\neq 0$.

1422. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+\alpha_3$ 也线性无关.

证 令 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_1+\alpha_3$，那么

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}.$$

因为 $\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=2\neq 0$，由第 **1421** 条知 β_1,β_2,β_3 线性无关.

1423. 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 的秩为 r，则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 中任意 r 个线性无关的向量都构成它的一个极大线性无关组.

证 设 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r}$ 为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 中一个线性无关的向量组. $\forall\ \alpha_i\in\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s\}$，则 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r},\alpha_i$ 一定线性相关. 由 **1411** 条知 α_i 可由 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r}$ 线性表出.

1424. 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 的秩为 r，$\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r}$ 是 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 中的 r 个向量，使得 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 中每个向量都可被它们线性表出，则 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r}$ 是 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 的一个极大线性无关组.

证 由假设可知 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 可由 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r}$ 线性表出，但 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r}$ 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性表出是显然的，从而彼此等价. 那么

$$\text{秩}\{\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r}\}=\text{秩}\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s\}=r.$$

$\therefore\ \alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r}$ 线性无关.

1425. 如果向量组(Ⅰ)可以由向量组(Ⅱ)线性表出,那么(Ⅰ)的秩不超过(Ⅱ)的秩.

证 当向量组(Ⅱ)的秩为无穷时,结论显然成立.当秩(Ⅱ)$=m$时,由假设(Ⅰ)的极大线性无关组也可由(Ⅱ)的极大线性无关组线性表出,那么由**1405**条之6)可证秩(Ⅰ)$\leqslant m=$秩(Ⅱ).

注 由此可知等价的向量组具有相同的秩.

1426. 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in P^n$,$n$维标准单位向量$\varepsilon_1=(1,0,\cdots,0),\cdots,\varepsilon_n=(0,0,\cdots,1)$可被它们线性表出,则$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$线性无关.

证 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$显然可被$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$线性表出,又$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$可被$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$线性表出,从而它们等价,于是由**1425**条的注知

$$秩\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}=秩\{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n\}=n.$$

即知$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$线性无关.

注 ① 这个命题的逆命题也是对的.

② 在抽象的n维线性空间V中,此命题可改为:设$\beta_1,\cdots,\beta_n$为V的一组基,$\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in V$,且$\beta_1,\cdots,\beta_n$可由$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$线性表出,则$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$也是$V$的一组基.

③ 也可改述为:设$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$是线性空间V中一组n维向量,则$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$线性无关$\Longleftrightarrow V$中任一n维向量都可被它们线性表出.

1427. 设$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$与$\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_s$有相同的秩,则$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$与$\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_s$等价.

证 不失一般性,设$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$是$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$的一个极大线性无关组,那么秩$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r\}=m=$秩$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_s\}$,$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$也是$\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_s$的一个极大线性无关组.$\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_s$与$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$等价,$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$与$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$等价.由传递性,$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$与$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$等价.

1428. 设$\beta_1=\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_r,\beta_2=\alpha_1+\alpha_3+\cdots+\alpha_r,\cdots,\beta_r=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{r-1}$,则

1) $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 与 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 有相同的秩；

2) $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 的任意一个极大线性无关组也是 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\cdots,\beta_r$ 的极大线性无关组．

证　1) 由假设知 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性表出．但是

$$\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_r=(r-1)(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r),$$

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r=\frac{1}{(r-1)}(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_r), \tag{1}$$

用(1)式减去假设的每一个式子，可得

$$\begin{cases}\alpha_1=\dfrac{2-r}{r-1}\beta_1+\dfrac{1}{r-1}\beta_2+\cdots+\dfrac{1}{r-1}\beta_r,\\ \alpha_2=\dfrac{1}{r-1}\beta_1+\dfrac{2-r}{r-1}\beta_2+\cdots+\dfrac{1}{r-1}\beta_r,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \alpha_r=\dfrac{1}{r-1}\beta_1+\dfrac{1}{r-1}\beta_2+\cdots+\dfrac{2-r}{r-1}\beta_r.\end{cases}$$

即 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 也可由 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 线性表出，从而它们等价．第 **1425** 条，秩$\{\beta_i,\cdots,\beta_r\}=$秩$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r\}\leqslant r$.

2) 由 1)知 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 与 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\cdots,\beta_r$ 等价，由 **1427** 条证明过程知 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 的一个极大线性无关组就是 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\cdots,\beta_r$ 的一个极大线性无关组．

1429.　设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中 $\alpha_1\neq0$ 且每个 $\alpha_i(i=2,3,\cdots,s)$ 都不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{i-1}$ 线性表出，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关．

证　用反证法．如果 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性相关，那么有不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0. \tag{1}$$

从右至左，设第一个不为零的数是 k_l，而 $k_{l+1}=\cdots=k_s=0$，则(1)式为

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_l\alpha_l=0.$$

因 $\alpha_1\neq 0$，所以 $l\neq 1$，故

$$\alpha_l=-\frac{k_1}{k_l}\alpha_1-\frac{k_2}{k_l}\alpha_2-\cdots-\frac{k_{l-1}}{k_l}\alpha_{l-1}.$$

即 α_l 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{l-1}$ 线性表出，此与题设矛盾．所以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关．

1430.　如果 $f_1(x),f_2(x),f_3(x)$ 是线性空间 $P[x]$ 中三个互素的多项式，但是其中任意两个都不互素，那么它们线性无关．

证　用反证法．如果它们线性相关，即存在不全为零的数 k_1,k_2,k_3，使

$$k_1f_1(x)+k_2f_2(x)+k_3f_3(x)=0.$$

不妨设 $k_1\neq 0$，则

$$f_1(x)=\frac{-k_2}{k_1}f_2(x)-\frac{k_3}{k_1}f_3(x).$$

此式说明 $f_2(x),f_3(x)$ 的最大公因式就是 $f_1(x)$ 的因式，即

$$(f_1(x),f_2(x),f_3(x))=(f_2(x),f_3(x)).$$

此与 $(f_1(x),f_2(x),f_3(x))=1$ 及 $(f_2(x),f_3(x))\neq 1$ 矛盾，所以 $f_1(x),f_2(x),f_3(x)$ 线性无关．

1431.　如果向量 β 可以由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表出，那么表示法唯一 $\Longleftrightarrow \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关．

证　设

$$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r.\tag{1}$$

必要性　用反证法．如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性相关，则存在不全为零的数 $l_1,l_2,\cdots l_r$，使

$$l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots+l_r\alpha_r=0.\tag{2}$$

$$(1)+(2):\beta=(k_1+l_1)\alpha_1+(k_2+l_2)\alpha_2+\cdots+(k_r+l_r)\alpha_r\tag{3}$$

比较(1)，(3)，由于 $l_i(i=1,\cdots,r)$ 不全为 0，所以 β 有两种不同的表示法，此与表示法的唯一性矛盾．故 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性无关．

充分性　**1411** 条已证．

1432. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，则 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_{m-1}+\alpha_m,\alpha_m+\alpha_1$ 线性无关的充分必要条件是 m 为奇数.

证 令 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\beta_{m-1}=\alpha_{m-1}+\alpha_m,\beta_m=\alpha_m+\alpha_1$，由题设得 $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)A$，其中

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}_{m\times m}$$

按第一行展开，

$$|A|=1+(-1)^{m+1}=\begin{cases} 2, & m \text{ 为奇数;} \\ 0, & m \text{ 为偶数,} \end{cases}$$

由第 **1421** 条知 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性无关的充分必要条件是 $|A|\neq 0$，即 m 为奇数.

1433. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，但其中任意 $m-1$ 个向量都线性无关，则

1) 等式 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$ 中的系数 $k_i(i=1,\cdots,m)$ 或者全为 0，或者全不为 0.

2) 当存在两个等式

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0, \tag{1}$$

$$l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots+l_m\alpha_m=0, \tag{2}$$

其中 $l_1\neq 0$ 时，(1)，(2)的对应系数成比例：

$$\frac{k_1}{l_1}=\frac{k_2}{l_2}=\cdots=\frac{k_m}{l_m}.$$

证 1) 当 $k_i(i=1,\cdots,m)$ 全为 0 时，恒为等式的解. 以下设有一个 k_i 不等于 0，不失一般性，设 $k_1\neq 0$. 此时其余的 $k_i(i=2,\cdots,m)$ 都不为 0. 因若有某个 $k_i=0$，则等式化为 $\sum\limits_{j\neq i}k_j\alpha_j=0$ $(k_1\neq 0)$，于是这 $m-1$ 个向量线性相关，此与题设矛盾.

2）由于 $l_1\neq 0$，由 1)知，$l_2,\cdots,l_m$ 均不为 0. 如果 $k_i(i=1,\cdots,m)$全为 0，那么结论成立．否则 k_i 全不为 0，$l_i\times(1)-k_1\times(2)$，得

$$0\cdot\alpha_1+(l_1k_2-k_1l_2)\alpha_2+\cdots+(l_1k_m-k_1l_m)\alpha_m=0.$$

由 1)，因 α_1 的系数为 0，所以 $\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的系数全为 0，

即
$$0=l_1k_2-k_1l_2=\cdots=l_1k_m-k_1l_m,$$

即
$$\frac{k_1}{l_1}=\frac{k_2}{l_2}=\cdots=\frac{k_m}{l_m}.$$

1434. 求向量组 $\alpha_1=(1,-2,2,3)$，$\alpha_2=(-2,4,-1,3)$，$\alpha_3=(-1,2,0,3)$，$\alpha_4=(0,6,2,3)$，$\alpha_5=(2,-6,3,4)$的一个极大无关组．

解 1 （初等变换法）以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 为列作矩阵 A，对 A 施行初等行变换化为阶梯型矩阵 B：

$$A=\begin{bmatrix}1&-2&-1&0&2\\-2&4&2&6&-6\\2&-1&0&2&3\\3&3&3&3&4\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&-2&-1&0&2\\0&3&2&2&-1\\0&0&0&-3&-1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}=B.$$

由 B 可知，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$；$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$；$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5$；$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_5$ 均为原向量组的极大无关组．

注 用这种方法可以找向量间的全部极大无关组．

解 2 （子式法）因矩阵 A 的 4 阶子式均为 0，而 3 阶子式

$$\begin{vmatrix}1&-1&0\\-2&2&6\\2&0&2\end{vmatrix}=-12\neq 0,$$

所以 $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ 为一极大无关组．

解 3 （逐一扩充法）因 $\alpha_1\neq 0$，所以 α_1 线性无关，又因 α_1,α_2 对应分量不成比例，故 α_1,α_2 线性无关．因 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关（这可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 作成的矩阵的所有的 3 阶子式为 0 看出），所以 α_3 不收入．再观察 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$，由于 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 作成的矩阵有非零的 3 阶子

式，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 线性无关，又因 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_5$ 线性相关，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 为一极大无关组．

1435. 证明：向量组的任何一个线性无关组都可以扩充成一个极大线性无关组．

证 设 n 维向量组（Ⅰ）中一个线性无关组（Ⅱ）：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，如果（Ⅰ）中每个向量可经（Ⅱ）线性表出，则（Ⅱ）为（Ⅰ）的一个极大无关组．否则至少有一个向量 $\alpha\in$（Ⅰ）不能由（Ⅱ）线性表出，将 α 添到（Ⅱ）中成为向量组（Ⅲ），则（Ⅲ）中向量是线性无关的．这样继续下去，经过有限步（不大于 n）后，向量组（Ⅱ）即可扩充为（Ⅰ）的一个极大无关组．

1436. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta,\gamma$ 线性相关．证明：或者 β 与 γ 中至少有一个可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表出，或者 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$ 与 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_m,\gamma$ 等价．

证 因 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta,\gamma$ 线性相关，所以存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m,b,c$，使

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m+b\beta+c\gamma=0.$$

显然，b,c 不全为 0，否则与 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性无关矛盾．当 $b\neq0,c=0$ 时，β 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性表出；当 $b=0,c\neq0$ 时，γ 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性表出；当 $b\neq0,c\neq0$ 时，β 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\gamma$ 线性表出，γ 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta$ 线性表出，因而 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta$ 与 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\gamma$ 等价．

1437. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n\in P^n$ 且线性无关，则 $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_n$ 线性无关 $\Longleftrightarrow$ 秩$(A)=n$. 其中 A 是数域 P 上的 $n\times n$ 矩阵．

证 令 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$. 因 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，所以 $|B|\neq0$.

必要性 设 $A\alpha_1,\cdots,A\alpha_n$ 线性无关，即

$|(A\alpha_1,\cdots,A\alpha_n)|=|A(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)|=|AB|=|A||B|\neq0$，

所以 $|A|\neq0$，即秩$(A)=n$.

充分性 设秩$(A)=n$，即 $|A|\neq0$，从而

$$|(A\alpha_1,\cdots,A\alpha_n)|=|AB|=|A||B|\neq 0.$$

所以 $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_n$ 线性无关.

1438. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的秩为 r,在其中任取 m 个向量 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_m}$,则秩$\{\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_m}\}\geqslant r+m-s$.

证 设 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_m}$ 的秩为 t,现将它的一极大无关组(含 t 个向量)扩充为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 的一个极大无关组(含 r 个向量). 因此扩充的线性无关向量的个数为 $r-t$. 因 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 除向量组 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_m}$ 外,还有 $s-m$ 个向量,因此,$r-t\leqslant s-m$,即 $t\geqslant r+m-s$.

1439. 设有 $n+1$ 个人及供他们读的 n 种小册子;假定每人至少读了一本,则这 $n+1$ 个人中必存在甲、乙两组人,甲组人读过的小册子的种类与乙组人读过的小册子的种类相同.

证 将这 n 种小册子依次编号,设第 i 个人为 α_i,于是

$\alpha_i=(\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_n})$,$i=1,2,\cdots,n+1$,其中

$$\alpha_{i_j}=\begin{cases}0, & \text{表示第 } i \text{ 人没读过第 } j \text{ 种小册子};\\ 1, & \text{表示第 } i \text{ 人读过第 } j \text{ 种小册子}.\end{cases}$$

由于 $n+1$ 个 n 维向量必线性相关,所以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n+1}$ 线性相关. 即存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_{n+1}$,使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{n+1}\alpha_{n+1}=0. \qquad (1)$$

因 α_i 的分量非 0 即 1,所以 $k_i(i=1,\cdots,n+1)$ 中必有正有负,去掉(1)中 $k_i=0$ 的项,不失一般性,设 $k_1,\cdots,k_t>0$,$k_{t+1},\cdots,k_{t+s}<0$ $(t+s\leqslant n+1)$. 再将负项移至等号右边,于是(1)式为

$$\beta=k_1\alpha_1+\cdots+k_t\alpha_t=-k_{t+1}\alpha_{t+1}-\cdots-k_{t+s}\alpha_{t+s} \qquad (2)$$

其中 $\beta=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,$x_j\geqslant 0$,$j=1,2,\cdots,n$.

令甲组人为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_t$,乙组人为 $\alpha_{t+1},\cdots,\alpha_{t+s}$.

当 $x_j>0$ 时,说明甲、乙两组人中都有人读过第 j 种小册子. 当 $x_j=0$ 时,说明甲、乙两组人无人读过第 j 种小册子. 总之,甲、乙两组人读过的小册子的种类相同.

三、 基、维数与坐标

1440. 什么叫做线性空间的基与维数?

答 如果数域 P 上的线性空间 V 有 n 个线性无关的向量 α_1, $\alpha_2,\cdots,\alpha_n$,而且 V 中每个向量都可由它们线性表出,那么称这组向量为 V 的一组基(基底). 也称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 生成(或张成)线性空间 V. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为 V 的一组生成元. 基中所含向量的个数 n 称为 V 的维数,记作 $\dim V=n$ 或维$(V)=n$. 称 V 为 n 维线性空间.

如果 V 中有任意多个线性无关的向量,那么称 V 为无限维线性空间,记为 $\dim V=\infty$. 如果 $V=\{0\}$,那么称 V 是零维的,记为 $\dim V=0$.

注 ① 线性空间 V 的基,实际上就是 V 的一个极大线性无关组.

② 一个线性空间 V 有一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$,取 $A=(a_{ij})_{n\times n}$,当 $|A|\neq 0$ 时,令 $A=(c_1,\cdots,c_n)$,其中 $c_1,\cdots,c_n$ 为 A 的列向量,令 $\beta_i=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)c_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$,那么由第 **1418** 条知 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 也是 V 的一组基. 由此可知 V 的基不是唯一的.

③ 两组基之间是互相等价的,因为向量组的两个极大线性无关组是互相等价的.

1441. 几类重要的线性空间的维数与基是什么?

答 1) 数域 P 看成自身上的线性空间,则 1 是它的一组基, $\dim P=1$.

2) 复数域 C 看成实数域 R 上的线性空间,$1,i$ 是 C 的一组基,$\dim C=2$.

3) 实数域 R 看成有理数域 Q 上线性空间,则 $\dim R=\infty$. 事实上,$1,\pi,\pi^2,\cdots$是线性无关的. 因为如果 $1,\pi,\pi^2,\cdots,\pi^n$ 线性相关的话,那么 π 是代数数了,而 π 是超越数. 故对一切自然数 n,向量组 $1,\pi,\cdots,\pi^n$ 都线性无关,由 n 的任意性,故 $\dim R=\infty$.

4) 全体正实数 R^+,定义 $a\oplus b=ab$,$k\circ a=a^k$,则 R^+ 为 R 上的

1 维线性空间．任何一个非零向量都是其一组基．因 1 是其零向量，取定 $\beta\in R^+,\beta\neq1,\forall\ \alpha\in R^+(\alpha\neq1)$，有 $\alpha=\beta^{\log_\beta\alpha}=(\log_\beta\alpha\cdot\beta$，即 α 可由 β 线性表出，所以是 1 维的．

5）数域 P 上的全体 n 元数组构成的线性空间 P^n 是 n 维的，$\varepsilon_1=(1,0,\cdots,0),\varepsilon_2=(0,1,0,\cdots,0),\cdots,\varepsilon_n=(0,\cdots,0,1)$是其一组基．

6）n 元齐次线性方程组 $AX=0$（A 为 $m\times n$ 矩阵，秩$(A)=r$）的解空间是 $n-r$ 维的，其基础解系是它的一组基．

7）元素属于数域 P 的 $m\times n$ 矩阵的全体 $P^{m\times n}$的维数是 mn．以 E_{ij}表示第 i 行第 j 列元素为 1，其余元素为 0 的 $m\times n$ 矩阵，则

$$E_{ij}\quad(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

为 $P^{m\times n}$的一组基．

8）实数域上全体 n 级实对称矩阵构成的线性空间的维数是 $\frac{n(n+1)}{2}$．$E_{ij}+E_{ji}(1\leqslant i\leqslant j\leqslant n)$为一组基．

9）实数域上全体 n 级反对称矩阵构成的线性空间的维数是 $\frac{n(n-1)}{2}$．$E_{ij}-E_{ji}(1\leqslant i<j\leqslant n)$为一组基．

10）实数域上全体 n 级上三角矩阵构成的线性空间的维数是 $\frac{n(n+1)}{2}$．$E_{ij}(1\leqslant i\leqslant j\leqslant n)$为一组基．

11）全体形如$\begin{bmatrix}X_1 & 0\\ X_2 & X_3\end{bmatrix}\in P^{n\times n}$的矩阵（$X_1$ 为 $r\times r$ 矩阵）构成的线性空间，因零块有 $r(n-r)$个元素，所以线性空间的维数是 $n^2-r(n-r)$．$E_{ij}(i\leqslant r,j\leqslant r;i>r,j=1,2,\cdots,n)$为一组基．

12）全体 $A\in P^{n\times n}$且满足 $\mathrm{tr}A=0$（A 的迹为 0）的矩阵构成的线性空间的维数是$(n^2-n)+(n-1)=n^2-1$，除 E_{nn}外的一切 E_{ij}，$i,j=1,2,\cdots,n$ 为一组基．

13）次数小于 n 的一元多项式的全体加上零多项式构成的线

性空间 $P[x]_n$ 的维数是 n，且 $1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}$ 为一组基.

14）线性空间 $W=\{f(x)\mid f(x)\in R[x]_n$ 且 $f(1)=0\}$ 的维数是 $n-1$. 且 $x^{n-1}-1,x^{n-2}-1,\cdots,x-1$ 是 W 的一组基.

15）数域 P 上 m 元 n 次齐次多项式

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_m)=\sum_{k_1+\cdots+k_m=n} a_{k_1k_2\cdots k_m}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_m^{k_m}\quad (k_i\text{ 为正整数})$$

和零多项式构成的线性空间的维数是

$$\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+m-1)}{(m-1)!},$$

$x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_m^{k_m}\quad (\sum_{i=1}^{m}k_i=n)$ 为一组基. 事实上，上述向量组线性无关是显然的，它的个数实际上是从 m 种元素中每次取 n 个元素的有重复的组合数，即 $(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n$ 展开后不同类的项数：

$$C_m^n=C_{n+m-1}^n=C_{n+m-1}^{m-1}=\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+m-1)}{(m-1)!}.$$

16）分量属于复数域的全体 n 元数组构成实数域 R 上的线性空间的维数是 $2n$. $\varepsilon_1=(1,0,\cdots,0),\varepsilon_2=(0,1,0,\cdots,0),\cdots,\varepsilon_n=(0,\cdots,1),\eta_1=(i,0,\cdots,0),\eta_2=(0,i,\cdots,0),\cdots,\eta_n=(0,\cdots,i)$ 为一组基（i 为虚数单位).

17）线性空间 V 中 m 个向量生成的子空间 $L(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$ 的维数等于 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 的秩，$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 的任一个极大无关组都是 $L(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$ 的一组基.

1442. V 为矩阵 A 的实系数多项式的全体构成的线性空间，求 V 的维数及一组基，其中

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\omega&0\\0&0&\omega^2\end{bmatrix},\quad \omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}.$$

解 因为 $\omega^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$，$\omega^3=1$，所以

$$\omega^n=\begin{cases}1, & n=3k;\\ \omega, & n=3k+1;\\ \omega^2, & n=3k+2.\end{cases}$$

从而

$$A^2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \omega^2 & 0\\ 0 & 0 & \omega\end{bmatrix},\quad A^3=E,\quad A^n=\begin{cases}E, & n=3k;\\ A, & n=3k+1;\\ A^2, & n=3k+2.\end{cases}$$

设 $k_1A^2+k_2A+k_3E=0$,得

$$\begin{aligned}&k_1+k_2+k_3=0,\\ &\omega k_1+\omega^2k_2+k_3=0,\\ &\omega^2k_1+\omega k_2+k_3=0.\end{aligned}\tag{1}$$

因系数行列式不为零,所以方程组(1)只有零解:$k_1=k_2=k_3=0$.说明 E,A,A^2 线性无关.由于 A 的实系数多项式 $f(A)$是 E,A,A^2 的线性组合,所以 V 的维数是 3. E,A,A^2 是 V 的一组基.

1443. V 为矩阵 A 的实系数多项式的全体构成的线性空间,求其维数和一组基,其中

$$A=\begin{bmatrix}a_1 & & & 0\\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n\end{bmatrix},\ a_i\neq a_j(i\neq j),\ a_i\in R.$$

解 易证对正整数 k,有

$$A^k=\begin{bmatrix}a_1{}^k & & & 0\\ & a_2{}^k & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n{}^k\end{bmatrix}=k_0E+k_1A+\cdots+k_{n-1}A^{n-1}.\tag{1}$$

事实上,由矩阵的相等得,

$$\begin{cases} k_0+k_1a_1+\cdots+k_{n-1}a_1^{n-1}=a_1^k, \\ k_0+k_1a_2+\cdots+k_{n-1}a_2^{n-1}=a_2^k, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ k_0+k_1a_n+\cdots+k_{n-1}a_n^{n-1}=a_n^k. \end{cases} \tag{2}$$

(2)式的系数行列式 D 是范德蒙行列式，故

$$D=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i)\neq 0.$$

所以方程组有唯一解 $k_0,k_1,\cdots,k_{n-1}$. 这就证明了(1).

再令

$$k_0E+k_1A+\cdots+k_{n-1}A^{n-1}=0. \tag{3}$$

(3)式为(2)式右端为零的情形．由于 $|D|\neq 0$，所以只有零解：$k_0=k_1=\cdots=k_{n-1}=0$，说明 $E,A,\cdots,A^{n-1}$ 线性无关．

由于 A 的实系数多项式 $f(A)$ 是 $E,A,A^2,\cdots,A^{n-1}$ 的线性组合，所以 $\dim V=n$，$E,A,A^2,\cdots,A^{n-1}$ 为一组基．

1444.　闭区间 $[a,b]$ 上的连续实值函数的全体构成的线性空间 $C[a,b]$ 是无限维的．

证　因为对于任意的正整数 n，$1,x,x^2,\cdots,x^n\in C[a,b]$ 是线性无关的，所以 $C[a,b]$ 是无限维的．

1445.　V 为全体与 A 可交换的矩阵构成的数域 R 上的线性空间，求其维数和一组基，其中 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&1&2\end{pmatrix}$.

解　设 $B=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\x_4&x_5&x_6\\x_7&x_8&x_9\end{pmatrix}$，则由 $AB=BA$ 得 $x_3=0$，$x_6=0$，$x_7=-3x_1-x_4+x_9$，$x_8=-3x_2-x_5+x_9$. 对 x_1,x_2,x_4,x_5,x_9 这五个自由未知量依次令为 1，0，0，0，0；0，1，0，0，0；0，0，1，0，0；0，0，0，1，0；0，0，0，0，1，可得到 V 中五个线性无关的矩阵：

$$B_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\-3&0&0\end{bmatrix},\qquad B_2=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&-3&0\end{bmatrix},$$

$$B_3=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\-1&0&0\end{bmatrix},\qquad B_4=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&-1&0\end{bmatrix},$$

$$B_5=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&1&1\end{bmatrix}.$$

现对任意 $B\in V$，有 $B=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&0\\b_{21}&b_{22}&0\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{bmatrix}$，易得

$$B=b_{11}B_1+b_{12}B_2+b_{21}B_3+b_{22}B_4+b_{33}B_5.$$

所以 $\dim V=5$，B_1,B_2,B_3,B_4,B_5 为一组基．

1446. 设 V 为数域 P 上的线性空间，$\overline{V}$ 为从 V 中任取 m 个元素组成的向量 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$ 的集合．

1）按向量的加法和数乘运算，$\overline{V}$ 为 P 上的线性空间；

2）当 V 是无限维时，$\overline{V}$ 也是无限维；

3）当 V 为 n 维，求 $\overline{V}$ 的维数和一组基．

证 1）$\because 0=(0,\cdots,0)\in\overline{V}$，$\therefore\overline{V}$ 非空．另外，$\overline{V}$ 关于加法和数乘运算封闭，且满足定义中的 8 条规则，所以 $\overline{V}$ 是域 P 上的线性空间．

2）当 V 是无限维时，取 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 为 V 的 n 个线性无关的向量，令 $\eta_i=(\beta_i,0,\cdots,0)$ $(i=1,2,\cdots,n)$，则 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 线性无关．由 n 的任意性知，$\overline{V}$ 有任意个线性无关的向量，即 $\overline{V}$ 是无限维的．

3）当 $\dim V=n$，可推得 $\dim\overline{V}=mn$.

事实上，设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 为 V 的一组基．令 $\eta_{i_1}=(\varepsilon_i,0,\cdots,0)$，

$\eta_{i_2}=(0,\varepsilon_i,\cdots,0),\cdots,\ \eta_{i_n}=(0,\cdots,\varepsilon_i),\ i=1,2,\cdots,n$,则这 $m\times n$ 个向量均线性无关.

$\forall\ \alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)\in\overline{V}$,因 $\alpha_j=\sum\limits_{i=1}^{n}k_{ij}\varepsilon_i(j=1,2,\cdots,m)$,

所以

$$\begin{aligned}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)&=\left(\sum_{i=1}^{n}k_{i_1}\varepsilon_i,\ \sum_{i=1}^{n}k_{i_2}\varepsilon_i,\cdots,\ \sum_{i=1}^{n}k_{i_m}\varepsilon_i\right)\\&=\sum_{i=1}^{n}k_{i1}(\varepsilon_i,0,\cdots,0)+\sum_{i=1}^{n}k_{i2}(0,\varepsilon_i,\cdots,0)+\cdots\\&+\sum_{i=1}^{n}k_{im}(0,\cdots,\varepsilon_i)\\&=\sum_{i=1}^{n}k_{i1}\eta_{i1}+\sum_{i=1}^{n}k_{i2}\eta_{i2}+\cdots+\sum_{i=1}^{n}k_{im}\eta_{im}.\end{aligned}$$

即 α 可由这 mn 个向量 $\eta_{ij}(i=1,\cdots,n;j=1,\cdots,m)$ 线性表出,所以它们是 $\overline{V}$ 的一组基.$\dim\overline{V}=mn$.

1447. $1,(x-a),(x-a)^2,\cdots,(x-a)^{n-1},(a\neq0)$是线性空间 $P[x]_n$ 的一组基.

证 $(1,(x-a),\cdots,(x-a)^{n-1})=(1,x,x^2,\cdots,x^{n-1})A$,

其中 $A=\begin{bmatrix}1 & & & *\\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1\end{bmatrix}$. 因 $1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}$是 $P[x]_n$ 的一组基,

$|A|=1\neq0$,由第 **1418** 条,$1,(x-a),\cdots,(x-a)^{n-1}$线性无关,所以是 $P[x]_n$ 的另一组基.

1448. 什么叫做向量的坐标?

答 设 V 是数域 P 上 n 维线性空间,$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为 V 的一组基.设 $\beta\in V$,则

$$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\begin{bmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_n\end{bmatrix}.$$

称$(k_1,\cdots,k_n)$为β在基$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$下的坐标.

注　① 同一个向量β,在不同基下的坐标一般是不同的.

② 同一个β,当基$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$排列顺序不同时,坐标也不同. 比如V的一组基为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$,令

$$\beta=\alpha_1+3\alpha_2+5\alpha_3,$$

那么β在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的坐标为$(1,3,5)$,而$\beta$在$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_2$下的坐标为$(1,5,3)$.

③ 这里的坐标概念是解析几何中坐标概念的推广. 在平面解析几何中,相当于取基$e_1=(1,0),e_2=(0,1)$,在空间解析几何里,相当于取基$\eta_1=(1,0,0),\eta_2=(0,1,0),\eta_3=(0,0,1)$. 而代数中是把它们抽象化,并把上述情形作为特例. V中的基$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$相当于建立一个坐标系. β的坐标$(k_1,k_2,\cdots,k_n)\in P^n$,相当于$\beta$在坐标系$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$下的坐标.

1449.　什么叫过渡矩阵?

答　过渡矩阵相当于n维线性空间V的两组基之间的变换公式. 下面给出定义.

设$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$与$\beta_1,\cdots,\beta_n$为V的两组基,那么

$$\beta_i=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)c_i,\qquad i=1,2,\cdots n. \tag{1}$$

其中

$$c_i=\begin{bmatrix}a_{1i}\\a_{2i}\\\vdots\\a_{ni}\end{bmatrix},\ a_{ki}\in P,\ k=1,2,\cdots,n.$$

把(1)式改写为

$$(\beta_1,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)A. \tag{2}$$

其中$A=(a_{ij})_{n\times n}=(c_1,\cdots,c_n)\in P^{n\times n}$. 称$A$为基$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$到基$\beta_1,\cdots,\beta_n$的过渡矩阵,并称(2)为基变换公式.

注　①由第**1418**条知$|A|\neq0$,即A为可逆矩阵.

② 由(2)式知

$$(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\beta_1,\cdots,\beta_n)A^{-1}, \tag{3}$$

即 A^{-1}为基 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 到 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 的过渡矩阵.

③ 求 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 到 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵 A,只要求出每个 β_i 在基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 下的坐标(1)即可.

1450. 什么叫坐标变换公式?

答 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 为线性空间 V 的两组基,由基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵为 A. 向量 γ 在基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 下坐标为$(x_1,\cdots,x_n)$. 设 γ 在基 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 下的坐标为$(y_1,\cdots,y_n)$,那么

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}=A^{-1}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \tag{1}$$

公式(1)称为坐标变换公式.

1451. 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为线性空间 V 的一组基.

1) $\beta_1=\alpha_1,\beta_2=\alpha_1+\alpha_2,\cdots,\beta_n=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$ 也是 V 的一组基;

2) 当向量 α 在 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 下的坐标为$(n,n-1,\cdots,2,1)$时,求 α 在 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 下的坐标.

证 1) 因为$(\beta_1,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)A$,其中

$$A=\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 \end{bmatrix},$$

$|A|=1$. 由 **1418** 条知 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 线性无关,从而为 V 的一组基.

2) 设 α 在 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 下坐标为$(x_1,\cdots,x_n)$,由坐标变换公式知

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix} n \\ n-1 \\ \vdots \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n \\ n-1 \\ \vdots \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1452. 1）多项式

$f_i(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\cdots(x-a_n)$ $(i=1,2,\cdots,n)$

是 $P[x]_n$ 的一组基，其中 $a_i\neq a_j(i\neq j)$.

2）取 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是全体 n 次单位根，求由基 $1,x,\cdots,x^{n-1}$ 到基 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 的过渡矩阵．

证 1）设

$$k_1f_1+k_2f_2+\cdots+k_nf_n=0, \tag{1}$$

令 $x=a_1$，代入(1)，得 $f_2(a_1)=f_3(a_1)=\cdots=f_n(a_1)=0$，$f_1(a_1)\neq 0$，所以 $k_1=0$. 同理，分别将 $a_2,\cdots,a_n$ 代入(1)，可得 $k_2=k_3=\cdots=k_n=0$. 因此 $f_1,\cdots,f_n$ 线性无关，从而是 $P[x]_n$ 的一组基．

2）因为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是全体 n 次单位根 $1,\varepsilon,\varepsilon^2,\cdots,\varepsilon^{n-1}$，所以

$$x^n-1=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)=(x-1)(x-\varepsilon)\cdots(x-\varepsilon^{n-1}).$$

故

$$f_1=\frac{x^n-1}{x-a_1}=\frac{x^n-1}{x-1}=1+x+x^2+\cdots+x^{n-1},$$

$$f_2=\frac{x^n-1}{x-a_2}=\frac{x^n-1}{x-\varepsilon}=\varepsilon^{n-1}+\varepsilon^{n-2}x+\cdots+\varepsilon x^{n-2}+x^{n-1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_n=\frac{x^n-1}{x-a_n}=\frac{x^n-1}{x-\varepsilon^{n-1}}=\varepsilon+\varepsilon^2x+\cdots+\varepsilon^{n-1}x^{n-2}+x^{n-1}.$$

于是从 $1,x,\cdots,x^{n-1}$ 到 $f_1,\cdots,f_n$ 的过渡矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon^{n-1} & \varepsilon^{n-2} & \cdots & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon^{n-2} & \varepsilon^{n-4} & \cdots & \varepsilon^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \cdots & \varepsilon^{n-1} \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

1453.　在 $P[x]_3$ 中，求由基 $1+x, x+x^2, x^2$ 到基 $1, x-x^2, x+x^2$ 的过渡矩阵．

解　因为 $1, x, x^2$ 为 $P[x]_3$ 的基，所以

$$(1+x, x+x^2, x^2)=(1,x,x^2)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}=(1,x,x^2)A. \quad (1)$$

于是

$$(1,x,x^2)=(1+x,x+x^2,x^2)A^{-1}=(1+x,x+x^2,x^2)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

又

$$(1,x-x^2,x+x^2)=(1,x,x^2)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}=(1,x,x^2)B, \quad (3)$$

将(2)代入(3)得

$$\begin{aligned}(1,x-x^2,x+x^2)&=(1+x,x+x^2,x^2)A^{-1}B \\ &=(1+x,x+x^2,x^2)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

所以 $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ 为所求的过渡矩阵．

1454.　已知

$$\begin{cases}\varepsilon_1=(1,1,1,1),\\ \varepsilon_2=(1,1,-1,-1),\\ \varepsilon_3=(1,-1,1,-1),\\ \varepsilon_4=(1,-1,-1,1),\end{cases}\qquad \begin{cases}\eta_1=(1,2,3,1),\\ \eta_2=(2,1,0,1),\\ \eta_3=(1,-1,0,-1),\\ \eta_4=(2,1,1,-2),\end{cases}$$

分别是 P^4 的两组基，求由 ε_i 到 $\eta_i(i=1,2,3,4)$的过渡矩阵．并求 $\delta=(1,-1,0,1)$关于基 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 的坐标．

解 因为 $\delta_1=(1,0,0,0),\delta_2=(0,1,0,0),\delta_3=(0,0,1,0),\delta_4=(0,0,0,1)$是 P^4 的基．由 δ_i 到 $\varepsilon_i(i=1,2,3,4)$的过渡矩阵 A 以及由 δ 到 $\eta_i(i=1,2,3,4)$的过渡矩阵 B 分别为

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}1&2&1&2\\2&1&-1&1\\3&0&0&1\\1&1&-1&-2\end{bmatrix}$$

由 ε_i 到 $\eta_i(i=1,2,3,4)$的过渡矩阵为 $A^{-1}B=C$，

$$C=A^{-1}B=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}7&4&-1&2\\-1&2&1&4\\1&0&3&4\\-3&2&1&-2\end{bmatrix}.$$

令 δ 关于基 $\eta_i(i=1,2,3,4)$的坐标为(x_1,x_2,x_3,x_4)，则

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=B^{-1}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1\\2\\5\\-3\end{bmatrix}.$$

1455. 求一非零向量 α，使它在下列基下有相同的坐标：

$$\begin{cases}\varepsilon_1=(1,0,0,0),\\ \varepsilon_2=(0,1,0,0),\\ \varepsilon_3=(0,0,1,0),\\ \varepsilon_4=(0,0,0,1).\end{cases}\qquad \begin{cases}\eta_1=(2,1,-1,1),\\ \eta_2=(0,3,1,0),\\ \eta_3=(5,3,2,1),\\ \eta_4=(6,6,1,3).\end{cases}$$

解 设 α 在已知两个基下的坐标为 (x_1,x_2,x_3,x_4). 即

$$\alpha=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}. \tag{1}$$

因

$$(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)A=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)\begin{bmatrix}2&0&5&6\\1&3&3&6\\-1&1&2&1\\1&0&1&3\end{bmatrix}.$$

代入(1)比较得

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}.$$

移项得

$$(A-E)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=0. \tag{2}$$

经计算, $|A-E|=0$, 且有一个 3 阶子式 $\begin{vmatrix}1&2&3\\-1&1&1\\1&0&1\end{vmatrix}\neq0$. 所以秩$(A-E)=3$. (2)的解空间是 1 维的. 设 x_4 为自由变元, 令 $x_4=-c(c\neq0)$ 代入(2), 得

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=6c,\\-x_1+x_2+x_3=c,\\x_1\qquad\quad+x_3=2c.\end{cases}$$

解得基础解系：$(x_1,x_2,x_3,x_4)=(c,c,c,-c)$. 所以，对任意 $c\neq0$，非零向量 $\alpha=(c,c,c,-c)$在该两组基下有相同的坐标．

四、 线性子空间

1456. 什么叫做线性子空间？

答 设 W 是数域 P 上线性空间 V 的一个非空子集，如果 W 对于 V 的两种运算（加法和数量乘法）也构成线性空间，则称 W 为 V 的一个线性子空间，简称子空间．

1457. 什么叫做 V 的平凡子空间？

答 V 中仅含单个零向量的子空间称为零子空间，V 本身也是 V 的一个子空间，这两个子空间称为 V 的平凡子空间．V 除平凡子空间外的子空间（如果存在的话），称为 V 的非平凡子空间．

1458. 什么叫做生成子空间？

答 V 中任意 m 个向量的所有可能的线性组合

$$L(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)=\{k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m\mid k_i\in P,i=1,2,\cdots,m\}$$

构成 V 的一个子空间，称为由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 张成（或生成）的子空间．

注 这一记号非常重要．设 V 是 n 维的，若 $V=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为 V 的一组基．

1459. 怎样判别子空间？

答 1）设 W 是 V 的一个非空子集，则 W 为 V 的子空间的充分必要条件是：W 对于 V 的两种运算是封闭的，即

1° $\forall\ \alpha,\beta\in W$ 都有 $\alpha+\beta\in W$；

2° $\forall\ \alpha\in W,\forall\ k\in P$，都有 $k\alpha\in W$.

条件 1°与 2°可以合并为一条：$\forall\ \alpha,\beta\in W$ 及$\forall\ k_1,k_2\in P$ 都有 $k_1\alpha+k_2\beta\in W$.

1460. 生成子空间有哪些主要结论？

答 1）$L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)=L(\beta_1,\cdots,\beta_t)$的充分必要条件是 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_t$ 等价．

2) $L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)+L(\beta_1,\cdots,\beta_t)=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t)$.

3) $L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$的维数＝秩$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s\}$

4) n 维线性空间 V 的子空间的一组基必可扩充为 V 的一组基.

1461. 常见的子空间有哪些?

答 常见的子空间有:

1) V 的两个平凡子空间.

2) 全体实函数组成的线性空间中,由所有实系数多项式组成一个子空间.

3) $P[x]_n$ 是线性空间 $P[x]$的 n 维子空间.

4) 线性变换 $\sigma:V\longrightarrow V$ 的值域 σV 是 V 的子空间. 设线性变换在某一组基下矩阵为 A,则其维数等于秩(A),σ 的核 $\sigma^{-1}(0)$是 V 的子空间,其维数等于 $\dim V-$秩 A.

5) 线性变换 $\sigma:V\rightarrow V$ 的属于特征值 λ 的特征向量的全体添上零向量是 V 的特征子空间,记作 V_λ. 若 $\dim V=n$,设 σ 在某一组基下的矩阵为 A,则 $\dim V_\lambda=n-$秩$(\lambda E-A)$.

6) 数域 P 上 n 元齐次线性方程组 $AX=0$ 的解空间 W 是 P^n 的子空间,$\dim W=n-$秩 A.

1462. 记 $P^{n\times n}$中全体对称矩阵组成集合为 W_1,全体反对称矩阵组成集合为 W_2,全体上三角矩阵组成的集合为 W_3,全体迹为0的矩阵组成的集合为 W_4,则 W_1,W_2,W_3,W_4 都是 $P^{n\times n}$的子空间,且维数分别为

$$\dim W_1=\frac{n(n+1)}{2},\quad \dim W_2=\frac{n(n-1)}{2},$$

$$\dim W_3=\frac{n(n+1)}{2},\quad \dim W_4=n^2-1.$$

证 见第**1441**条.

1463. 1) $W_1=\left\{(x_1,\cdots,x_n)\,\middle|\,\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=0\right\}$是 P^n 的 $n-1$ 维子

空间；

2) $W_2=\left\{(x_1,\cdots,x_n)\left|\sum_{i=1}^{n}ix_i=0\right.\right\}$是$P^n$的$n-1$维子空间；

3) $W_3=\{(x_1,\cdots,x_n)|x_{i+2}=x_{i+1}+x_i\quad(i=1,2,\cdots,n-2)\}$是$P^n$的2维子空间.

证 容易验证W_1,W_2,W_3都是P^n的子空间.

1) 令$\alpha_1=(1,-1,0,\cdots,0)$, $\alpha_2=(1,0,-1,0,\cdots,0)$, $\cdots$, $\alpha_{n-1}=(1,0,\cdots,0,-1)$，那么$\alpha_1\cdots,\alpha_{n-1}\in W_1$. 容易知道它们线性无关. 任取$\beta=(x_1,\cdots,x_n)\in W_1$，则$x_1+\cdots+x_n=0$. 设$(x_1,\cdots,x_n)=k_1\alpha_1+\cdots+k_{n-1}\alpha_{n-1}=(k_1+\cdots+k_{n-3},-k_1,-k_2\cdots,-k_{n-1})$，则$k_1=-x_2$, $k_2=-x_3,\cdots,k_{n-1}=-x_n$，从而得证$\beta$可由$\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$线性表出，即$\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$为$W_1$的一组基. 所以$\dim W_1=n-1$.

2) 令$\alpha_1=(2,-1,0,\cdots,0)$, $\alpha_2=(3,0,-1,0,\cdots,0)$, $\cdots,\alpha_n=(n,0,\cdots,0,-1)$. 容易验证它们线性无关.

任取$\beta=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in W_2$，则$x_1+2x_2+\cdots+nx_n=0$. 令

$$\begin{aligned}(x_1,\cdots,x_n)&=k_1\alpha_1+\cdots+k_{n-1}\alpha_{n-1}\\&=(2k_1+3k_2+\cdots+nk_{n-1},-k_1,\cdots,-k_{n-1}),\end{aligned}$$

则$k_1=-x_2,\cdots$, $k_{n-1}=-x_n$，即β可由$\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$线性表出，$\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$为$W_2$的一组基，所以$\dim W_2=n-1$.

3) 令$\alpha_1=(x_1,x_2,x_3,x_4,\cdots,x_n)$，其中$x_{i+2}=x_{i+1}+x_i$, $i=1,\cdots,n-2$，但$x_1=1,x_2=0$.

$\alpha_2=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，其中$y_{i+2}=y_{i+1}+y_i$, $i=1,2,\cdots,n-2$，但$y_1=0,y_2=1$. 容易验证α_1,α_2线性无关.

任取$\beta=(z_1,\cdots,z_n)\in W_3$, $z_{i+1}=z_{i+1}+z_i$, $i=1,\cdots,n-2$. 令

$$\begin{aligned}(z_1,z_2,\cdots,z_n)&=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2\\&=k_1x_1+k_2y_1,k_1x_2+k_2y_2,\cdots,k_1x_n+k_2y_n)\\&=(k_1,k_2,k_1x_3+k_2y_3,\cdots,k_1x_n+k_2y_n),\end{aligned}$$

所以 $k_1=z_1, k_2=z_2$，则

$$z_3=z_1+z_2=k_1+k_2$$

$$k_1x_3+k_2y_3=k_1(x_1+x_2)+k_2(y_1+y_2)=k_1+k_2.$$

继续下去，同理可证 $z_j=k_1x_j+k_j(j=3,\cdots,n)$. 即知 β 可由 α_1,α_2 线性表出. 故 $\dim W_3=2$.

1464. 设 A 是数域 P 上 n 级方阵.

1) 令 $W_1=\{f(A)\mid f(x)\in P[x]\}$，则 $\dim W_1=\partial(d_n(\lambda))$，其中 $d_n(\lambda)$ 为 A 的最小多项式(即第 n 个不变因子)；

2) 令 $W_2=\{B\mid AB=BA, B\in P^{n\times n}\}$，则其维数与基可由齐次方程组 $AB=BA$ 求出，其中 $B=(x_{ij})_{n\times n}$ 看成 n^2 个未知量.

证 1) 设 $\partial(d_n(\lambda))=m$，则 $E,A,\cdots,A^{m-1}(\in W)$ 是线性无关的. 且 $\forall f(A)\in W_1$，因为

$$f(\lambda)=q(\lambda)d_n(\lambda)+r(\lambda)，其中\ r(\lambda)=0，或\ \partial r(\lambda))<m.$$

那么，$f(A)=r(A)\in L(E,A,\cdots,A^{m-1})$. 故 $W_1=L(E,A,\cdots,A^{m-1})$，$\dim W_1=m$.

2) 仿第 **1445** 条可知.

注 实际上可以证明

$$\dim W_2=n^2-秩(A\otimes E-E\otimes A').$$

因为 $X\in W_2$，则 $AX-XA=0$，有 $(A\otimes E-E\otimes A')\vec{X}=\vec{0}$，这是齐次线性方程组，所以 $\dim W_2=n^2-秩(A\otimes E-E\otimes A')$.

1465. 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是数域 P 上线性空间 V 的 n 个向量，其秩为 r，则满足 $k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n=0$ 的 $(k_1,\cdots,k_n)$ 的全体构成 P^n 的 $n-r$ 维子空间.

证 令 $W=\{(k_1,\cdots,k_n)\mid k_1\alpha_1+\cdots,+k_n\alpha_n=0\}$，容易验证它是 P^n 的子空间.

在 V 中取一组基 $\beta_1,\cdots,\beta_n$，则

$$(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\beta_1,\cdots,\beta_n)A. \tag{1}$$

由第 1419 条知秩$(A)=$秩$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}=r$，但

$$0=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\begin{bmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_n\end{bmatrix}\Longleftrightarrow(\beta_1,\cdots,\beta_n)A\begin{bmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_n\end{bmatrix}=0\Longleftrightarrow Ax=0,\ (2)$$

其中 $x=(k_1,\cdots,k_n)'$. 因此由(2)知 $\dim W=n-$秩 $A=n-r$.

1466. 设 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 是数域 P 上线性空间 V 的一组基，$A\in P^{m\times n}$，秩 $A=r$，$\alpha=(c_1,\cdots,c_n)'\in P^{n\times 1}$，则 $W=\{\sum_{i=1}^{n}c_i\varepsilon_i\mid A(c_1,\cdots,c_n)'=0\}$是 V 的 $n-r$ 维子空间.

证 1) 先证 W 是 V 的子空间. 其 $0\in W$ 知 W 非空(这时取$(c_1,\cdots,c_n)=(0,\cdots,0)$即可).

任取 $\beta=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)\begin{bmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{bmatrix},\gamma=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)\begin{bmatrix}d_1\\ \vdots\\ d_n\end{bmatrix}\in W$，那么

$$A\begin{bmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{bmatrix}=0,\quad A\begin{bmatrix}d_1\\ \vdots\\ d_n\end{bmatrix}=0.$$

$\forall\ k_1,k_2\in P$，则

$$k_1\beta+k_2\gamma=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)\left[k_1\begin{bmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}d_1\\ \vdots\\ d_n\end{bmatrix}\right],$$

$$A\left[k_1\begin{bmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}d_1\\ \vdots\\ d_n\end{bmatrix}\right]=k_1A\begin{bmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{bmatrix}+k_2A\begin{bmatrix}d_1\\ \vdots\\ d_n\end{bmatrix}=0.$$

所以 $k_1\beta+k_2\gamma\in W$，从而 W 为 V 的子空间.

2) 设 $Ax=0$ 的解空间为 W_1，则

$$\dim W=\dim W_1=n-\text{秩}\ A=n-r.$$

1467. 设线性空间 V 的两组基为 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 和 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$，V 中

关于两组基下的坐标完全相同的向量的全体记为 W，则 W 是 V 的子空间，并求其维数．

证　1）0 对于两组基的坐标相同，故 $0\in W$，即 W 非空．任取

$$\alpha=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}=(\eta_1,\cdots,\eta_n)\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}\in W,$$

$$\beta=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)\begin{bmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}=(\eta_1,\cdots,\eta_n)\begin{bmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}\in W,$$

$\forall\ k_1,k_2\in P$，则 $k_1\alpha_1+k_2\beta$ 在两组基下坐标为 $(k_1a_1+k_2b_1,\cdots,k_1a_n+k_2b_n)$．于是 $k_1\alpha+k_2\beta\in W$，即 W 为 V 的子空间．

2）设 $(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)A$，其中 A 为过渡矩阵，则

$$\gamma=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}\in W$$

$$\Longleftrightarrow(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$$

$$=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)A\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}\Longleftrightarrow(E-A)\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=0$$

所以 $\dim W=n-$秩$(E-A)$．

因

$$(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)-(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)-(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)A$$
$$=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)(E-A),$$
$$(\alpha_1-\varepsilon_1,\cdots,\alpha_n-\varepsilon_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)(E-A),$$

则由第 **1418** 条知秩$(E-A)=$秩$\{\alpha_1-\varepsilon_1,\cdots,\alpha_n-\varepsilon_n\}$，故

$$\dim W=n-\text{秩}\{\alpha_1-\varepsilon_1,\cdots,\alpha_n-\varepsilon_n\}.$$

五、 线性子空间的交、和

1468. 什么叫做交空间?

答　设 V 是数域 P 上的线性空间,$V_\lambda(\lambda\in I)$都是 V 的子空间,则$\bigcap\limits_{\lambda\in I}V_\lambda$也是 V 的子空间,并称它为 $V_\lambda(\lambda\in I)$的交空间.

注　① 显然$\bigcap\limits_{\lambda\in I}V_\lambda$也是 V_λ 的子空间.

② 子空间的交是线性空间的一种运算.

1469. 子空间的交有哪些性质?

答　1) 适合交换律:$V_1\cap V_2=V_2\cap V_1$;

2) 适合结合律:$(V_1\cap V_2)\cap V_3=V_1\cap(V_2\cap V_3)$;

3) A,B 分别为 $m\times n$ 与 $s\times n$ 矩阵,$C=\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}$. 设 V_1,V_2,V_3 分别为 $Ax=0,Bx=0,Cx=0$ 的解空间,则 $V_3=V_1\cap V_2$.

1470. 什么叫做和空间?

答　子空间的和是线性空间的第二种运算. 设 V_1,V_2 都是 V 的子空间,则

$$\{\alpha=\alpha_1+\alpha_2\mid\alpha_1\in V_1,\alpha_2\in V_2\}$$

也是 V 的子空间,记为 V_1+V_2.

一般地,设 $V_1,\cdots,V_n$ 都是 V 的子空间,它们的和空间定义为

$$V_1+V_2+\cdots+V_n=\{\alpha=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n\mid\alpha_i\in V_i,i=1,2,\cdots,n\}.$$

注　① $V_1\cap V_2\subseteq V_1\subseteq V_1+V_2,V_1\cap V_2\subseteq V_2\subseteq V_1+V_2$.

② 设 W 是线性空间,且 $W\subseteq V_\lambda(\lambda\in I)$,则 $W\subseteq\bigcap\limits_{\lambda\in I}V_\lambda$.

③ 设 $V_1\subseteq W,V_2\subseteq W,W$ 是线性空间,则 $V_1+V_2\subseteq W$.

1471. 子空间的和具有什么性质?

答　1) $V_1+V_2=V_2+V_1$;

2) $(V_1+V_2)+V_3=V_1+(V_2+V_3)$;

3) 下面三条等价

(i) $V_1\subseteq V_2$,　(ii) $V_1\cap V_2=V_1$,(iii) $V_1+V_2=V_2$,

其中 V_1, V_2 都是 V 的子空间．

4) $\dim[L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)+L(\beta_1,\cdots,\beta_t)]=$ 秩$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t\}$.

5) V_1+V_2 是包含 V_1, V_2 的最小子空间．

1472. 设 V_1, V_2 是线性空间 V 的两个有限维子空间，则

$$\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2)=\dim V_1+\dim V_2. \tag{1}$$

注 ① 公式(1)称为维数公式．

② $\dim(V_1+V_2)\leqslant\dim V_1+\dim V_2$.

③ $\dim(\sum_{i=1}^{m}V_i)\leqslant\sum_{i=1}^{m}\dim V_i$.

④ 设 n 维线性空间 V 的两个子空间的和的维数大于 n，则 $\dim(V_1\cap V_2)>0$，即 V_1, V_2 必含有非零的公共向量．

1473. 除了上述第 **1472** 条的维数公式外，还有哪些维数公式？怎样证明？

答 如果称 1472 条的维数公式为公式 Ⅰ，那么还有维数公式 Ⅱ：设 σ 是 n 维线性空间 V 的一个线性变换，则

$$\dim\sigma(V)+\dim\sigma^{-1}(0)=\dim V=n. \tag{2}$$

下证(2)式．设 $\dim\sigma^{-1}(0)=r$，取 $\alpha^{-1}(0)$的一组基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_r$，并扩大为 V 的一组基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_r,\varepsilon_{r+1},\cdots,\varepsilon_n$，则 $\sigma(\varepsilon_{r+1}),\cdots,\sigma(\varepsilon_n)$线性无关，且 $\sigma V=L(\sigma(\varepsilon_{r+1}),\cdots,\sigma(\varepsilon_n))$. 故 $\dim\sigma V=n-r$.

维数公式 Ⅲ：设 W 是 V 的子空间，σ 是 n 维线性空间 V 的线性变换，则

$$\dim\sigma W+\dim(\sigma^{-1}(0)\cap W)=\dim W. \tag{3}$$

下证(3)式．设 $\dim W=r$，$\dim(\sigma^{-1}(0)\cap W)=s$，取 $\sigma^{-1}(0)\cap W$的一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$，再扩大为 W 的一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\alpha_{s-1},\cdots,\alpha_r$，则可证 $\sigma(W)=L(\sigma(\alpha_{s+1}),\cdots,\sigma(\alpha_r))$，且 $\sigma\alpha_{s+1},)\cdots,\sigma\alpha_r$ 线性无关，故 $\dim\sigma W=r-s$.

维数公式 Ⅳ：设 $V_1,\cdots,V_m(m\geqslant2)$为线性空间 V 的子空间，则

$$\sum_{i=1}^{m}\dim V_i=\dim(\sum_{i=1}^{m}V_i)+\dim(V_1\cap V_2)+\dim((V_1+V_2)\cap V_3)$$
$$+\cdots+\dim((\sum_{i=1}^{m-1}V_i)\cap V_m).\qquad(4)$$

用数学归纳法来证明(4)式．当 $m=2$ 时，(4)式成立．归纳假设结论对 $m-1$ 成立，即

$$\sum_{i=1}^{m-1}\dim V_i=\dim(\sum_{i=1}^{m-1}V_i)+$$
$$\dim(V_1\cap V_2)+\cdots+\dim((\sum_{i=1}^{m-2}V_i)\cap V_{m-1}).\qquad(5)$$

(5)式两端同加 $\dim V_m$，并注意下式

$$\dim(\sum_{i=1}^{m-1}V_i)+\dim V_m=\dim(\sum_{i=1}^{m}V_i)+\dim((\sum_{i=1}^{m-1}V_i)\cap V_m),$$

即可证(4)式成立．

1474. 设 V_1,V_2 是 V 的两个子空间，则

$$V_1\cup V_2=V_1+V_2\Longleftrightarrow V_1\subseteq V_2 \text{ 或 } V_2\subseteq V_1.$$

证　充分性　显然．

必要性　用反证法．若 $V_1\not\subseteq V_2$ 且 $V_2\not\subseteq V_1$，那么存在 $\alpha\in V_1$，$\alpha\overline{\in}V_2$，$\beta\in V_2$，$\beta\overline{\in}V_1$，令 $\gamma=\alpha+\beta$，则 $\gamma\in V_1+V_2$．但 $\gamma\overline{\in}V_1$ 且 $\gamma\overline{\in}V_2$，从而 $\gamma\overline{\in}V_1\cup V_2$．矛盾．

注　由此可知两个子空间的并不一定是线性空间．但 $V_1\cup V_2$ 是子空间，必然有 $V_1\cup V_2=V_1+V_2$．事实上，因为 $V_1\subseteq V_1+V_2$，$V_2\subseteq V_1+V_2$，所以 $V_1\cup V_2\subseteq V_1+V_2$．其次，$\forall\ \alpha=\beta+\gamma\in V_1+V_2$，其中 $\beta\in V_1$，$\gamma\in V_2$，$\therefore\beta,\gamma\in V_1\cup V_2$，又 $V_1\cup V_2$ 是子空间，$\therefore\alpha\in V_1\cup V_2$．

1475.　设 V_1,V_2,V_3 是线性空间 V 的三个子空间，公式 $V_1\cap(V_2+V_3)=V_1\cap V_2+V_1\cap V_3$ 是否成立？

答　不一定成立．比如设 V 是平面上向量的全体，V_1,V_2,V_3 是三条互不重合的直线上的向量集合，则 $V_1\cap(V_2+V_3)\neq V_1\cap V_2$

$+V_1\cap V_3$.

1476. 设 V_1,V_2,V_3 为 V 的三个子空间,若 $V_2\subseteq V_1$,则

$$V_1\cap(V_2+V_3)=V_1\cap V_2+V_1\cap V_3. \quad (1)$$

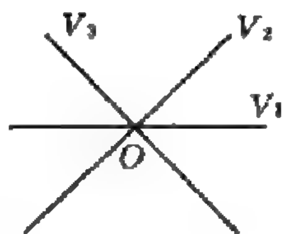


图 19-1

证 先证左⊆右. $\forall\ \alpha\in V_1\cap(V_2+V_3)$,则 $\alpha\in V_1$,$\alpha=\beta+\gamma$,其中 $\beta\in V_2$,$\gamma\in V_3$,由 $V_2\subseteq V_1$,则 $\beta\in V_1$,$\gamma=\alpha-\beta\in V_1$,从而 $\beta\in V_1\cap V_2$,$\gamma\in V_1\cap V_3$. 所以 $\alpha\in V_1\cap V_2+V_1\cap V_3$.

再证右⊆左. $\forall\ \alpha\in V_1\cap V_2+V_1\cap V_3$,则 $\alpha=\beta+\gamma$,其中 $\beta\in V_1\cap V_2$,$\gamma\in V_1\cap V_3$. 所以 $\beta\in V_1$,$\gamma\in V_1$,$\beta\in V_2$,$\gamma\in V_3$,故 $\alpha=\beta+\gamma\in V_1$,$\alpha=\beta+\gamma\in V_2+V_3$,即 $\alpha\in V_1\cap(V_2+V_3)$.

注 由 V_2 与 V_3 的对称性,故当 $V_1\subseteq V_3$ 时,也有(1)式成立.

1477. 求解下列问题:

1) 所有终点在一个平面上的向量是否构成 R^3 的一个子空间?

2) 设过原点的三条直线 l_1,l_2,l_3 分别构成 R^3 的子空间 V_1,V_2,V_3,问 V_1+V_2,$V_1+V_2+V_3$ 可以构成哪些类型的子空间?

答 1) 如果这个平面过原点,则可构成 R^3 的一个二维子空间. 否则由于加法不封闭,不构成子空间.

2) 当 l_1 与 l_2 重合时,$V_1+V_2=V_1$ 为一维子空间;当 l_1 与 l_2 不重合时,V_1+V_2 为二维子空间,即过 l_1,l_2 的一个平面.

3) 当三直线重合,则 $V_1+V_2+V_3=V_1$ 是一维子空间;当三直线共面,但不全重合时,则 $V_1+V_2+V_3$ 构成二维子空间;当三直线不共面时,则 $V_1+V_2+V_3=R^3$ 是三维空间.

1478. 设 V_1,V_2 是 n 维线性空间 V 的两个子空间,并且满足 $\dim(V_1+V_2)=\dim(V_1\cap V_2)+1$,证明:

1) $V_1\subseteq V_2$ 或 $V_2\subseteq V_1$;

2) $\{V_1+V_2,V_1\cap V_2\}=\{V_1,V_2\}$. $\quad$ (2)

证　1) 设 $\dim V_1=r_1,\dim V_2=r_2,\dim(V_1\cap V_2)=m$，则由题设有　$m\leqslant r_1\leqslant m+1$.

i) 当 $r_1=m$ 时，$\because V_1\cap V_2\subseteq V_1$，$\therefore V_1=V_1\cap V_2$，$V_1\subseteq V_2$.

ii) 当 $r_1=m+1$ 时，$\because V_1=V_1+V_2$，$\therefore V_1\supseteq V_2$.

2) 当 $V_1\subseteq V_2$ 时，$V_1\cap V_2=V_1$，$V_1+V_2=V_2$，故(1)式成立. 当 $V_2\subseteq V_1$ 时，$V_1\cap V_2=V_2$，$V_1+V_2=V_1$，(1)式也成立.

1479.　设 V_1 是 R^n 的一个非平凡子空间，$\forall\ \alpha\in V_1$，要么 $\alpha=0$，要么 α 的每个分量均不为零，证明：$\dim V_1=1$.

证　用反证法. 若 $\dim V_1\neq 1$，则由 $V_1\neq 0$ 得 $\dim V_1>1$. 于是存在 $\alpha=(a_1,\cdots,a_n)$，$\beta=(b_1,\cdots,b_n)$，它们对应分量不成比例. 设

$$\frac{a_1}{b_1}=\cdots=\frac{a_{k-1}}{b_{k-1}}=c,$$

但$\dfrac{a_k}{b_k}\neq c$. 令 $\gamma=\alpha-c\beta=(0,\cdots,0,a_k-cb_k,*,\cdots,*)\in V_1$ 这与 V_1 的定义矛盾.

1480.　设 $V_1,V_2,\cdots,V_s$ 是线性空间 V 的 s 个非平凡子空间，则在 V 中至少有一个向量 α 不属于 $V_1,V_2,\cdots,V_s$ 中任何一个.

证　当 $s=2$ 时，$\because V_1,V_2$ 为非平凡子空间，故存在 $\alpha\overline{\in}V_1$. 若 $\alpha\overline{\in}V_2$，则命题成立；若 $\alpha\in V_2$，因有 $\beta\overline{\in}V_2$，若 $\beta\overline{\in}V_1$，则命题成立. 若 $\beta\in V_1$，则 $\alpha+\beta\overline{\in}V_1,V_2$，因若 $\alpha+\beta\in V_1$，则由 $\beta\in V_1$ 推知 $\alpha\in V_1$，此与 $\alpha\overline{\in}V_1$ 矛盾. 类似可证 $\alpha+\beta\overline{\in}V_2$. 所以当 $s=2$ 结论成立.

归纳假设结论对 k 个非平凡子空间成立，即在 V 中存在向量 α 使 $\alpha\overline{\in}V_i(i=1,\cdots,k)$，现设非平凡子空间 V_{k+1}，若 $\alpha\overline{\in}V_{k+1}$，则结论已对；若 $\alpha\in V_{k+1}$，则存在 $\beta\overline{\in}V_{k+1}$，对$\forall\ k\in P$，向量 $k\alpha+\beta\overline{\in}V_{k+1}$，且对 P 中不同的 k_1,k_2，$k_1\alpha+\beta,k_2\alpha+\beta$ 不属于同一个 $V_i(l\leqslant i\leqslant k)$. 否则，$(k_1\alpha+\beta)-(k_2\alpha+\beta)=(k_1-k_2)\alpha\in V_i$，则 $\alpha\in V_i$，此与 $\alpha\overline{\in}V_i$ 矛盾. 今取 P 中 $k+1$ 个互不相同的数 $l_1,\cdots,l_{k+1}$，则有 $k+1$ 个向量 $l_1\alpha+\beta,l_2\alpha+\beta,\cdots,l_k\alpha+\beta,l_{k+1}\alpha+\beta$，因为对于每个 $V_i(i=$

$1,\cdots,k)$,至多包含其中一个向量,也就是说上面 $k+1$ 个向量中至少有一个不属于 $V_1,\cdots,V_k$ 中任何一个,且它也不属于 V_{k+1},这个向量即为所求.于是证明了结论对 $k+1$ 个非平凡子空间成立.

1481. 设 $V_1,\cdots,V_s$ 是 n 维线性空间 V 的 s 个非平凡子空间.证明:必存在 V 的一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$,这组基不属于 $V_1,\cdots,V_s$ 中的任何一个.

证 由第 **1480** 条知,存在 $\alpha_1\in V$ 但 $\alpha_1\overline{\in}V_i(i=1,\cdots,s)$.令 $L(\alpha_1)=V_{s+1}$,再由第 **1480** 条结论,存在 $\alpha_2\in V$,但 $\alpha_2\overline{\in}V_i(i=1,\cdots,s+1$. $\because\alpha_2\overline{\in}V_{s+1}$, $\therefore\alpha_1,\alpha_2$ 线性无关.令 $V_{s+2}=L(\alpha_1,\alpha_2)$,$V_{s+2}$为 V 的非平凡子空间.引用上述结论,存在 $\alpha_3\in V$,$\alpha_3\overline{\in}V_i(i=1,2,\cdots,s+2)$,由 $\alpha_3\overline{\in}V_{s+2}$知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.再令 $V_{s+3}=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\cdots$,依此类推,存在 $\alpha_{n-1}\in V$,$\alpha_{n-1}\overline{\in}V_i(i=1,2,\cdots,s+(n-2))$ 且 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$线性无关.最后令 $V_{s+(n-1)}=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1})$仍为 V 的非平凡子空间,由上述结论存在 $\alpha_n\overline{\in}V_i(i=1,\cdots,s+(n-1))$且 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性无关,作为 V 的一组基,并且满足 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n\overline{\in}V_1,\cdots,V_s$.

1482. 设 $A\in P^{m\times t}$,$B\in P^{t\times n}$. P^n 的子空间 $W=\{B\alpha\mid AB\alpha=0\}$,其中 $\alpha=(x_1,\cdots,x_n)'$,则 $\dim W=$秩 $B-$秩(AB).

证 设方程组 $B\alpha=0$ 的解子空间为 V_1,方程组 $AB\alpha=0$ 的解子空间为 V_2,并设秩$(B)=r$,秩$(AB)=s$,于是 $\dim V_1=n-r=p$,$\dim V_2=n-s=q$.由于 $V_1\subseteq V_2$,取 $\alpha_1,\cdots,\alpha_p$ 为 V_1 的一组基,并扩充成 V_2 的基:$\alpha_1,\cdots,\alpha_p,\alpha_{p+1},\cdots,\alpha_q$.于是向量组 $B\alpha_{p+1},\cdots,B\alpha_q$ 线性无关.事实上,设

$$k_{p+1}B\alpha_{p+1}+\cdots+k_qB\alpha_q=0,$$

即
$$B(k_{p+1}\alpha_{p+1}+\cdots+k_q\alpha_q)=0.$$

所以
$$k_{p+1}\alpha_{p+1}+\cdots+k_q\alpha_q\in V_1.$$

所以
$$k_{p+1}\alpha_{p+1}+\cdots+k_q\alpha_q=k_1\alpha_1+\cdots+k_p\alpha_p.$$

由于 $\alpha_1,\cdots,\alpha_p,\alpha_{p+1},\cdots,\alpha_q$ 线性无关,所以 $k_{p+1}=k_{p+2}=\cdots=k_q=0$.

因为 $W=L(B\alpha_1,\cdots,B\alpha_p,B\alpha_{p+1},\cdots,B\alpha_q)$，而 $B\alpha_1=B\alpha_2=\cdots=B\alpha_p=0$，
所以 $W=L(B\alpha_{p+1},\cdots,B\alpha_q)$. 故 $\dim W=q-p=(n-s)-(n-r)=r-s=$ 秩 $B-$ 秩(AB).

1483. 设 $m\times n$ 矩阵 A 的秩为 r，$AX=0$ 的基础解系为 $\beta_1,\cdots,\beta_{n-r}$. 令 $B=(\beta_1,\cdots,\beta_{n-r})$. 设 $B'X=0$ 的解空间为 W，则

1) $\dim W=$ 秩 A；

2) 设 $A'=(\gamma_1,\cdots,\gamma_m)$，则 $W=L(\gamma_1,\cdots,\gamma_m)$.

证 1) 因为 $A\beta_i=0\ (i=1,2,\cdots,n-r)$，故 $AB=0$，从而 $B'A'=0$，$B'\gamma_i=0\ (i=1,2,\cdots,m)$. 因为 B 是 $n\times(n-r)$ 矩阵，B' 为 $(n-r)\times n$ 矩阵，那么

$$\dim W=n-\text{秩 } B=n-(nr)=r=\text{秩 } A.$$

2) $B'A'=B'(\gamma_1,\cdots,\gamma_m)=0$，$\therefore B'\gamma_i=0\ (i=1,2,\cdots,m)$.
秩$\{\gamma_1,\cdots,\gamma_m\}=$ 秩 $A'=$ 秩 $A=r$，$\therefore W=L(\gamma_1,\cdots,\gamma_m)$.

1484. P^n 的任一子空间至少是一个 n 元齐次线性方程组的解空间.

证 设 W 是 P^n 的任一子空间.

1) 若 $W=\{0\}$，则 W 是齐次方程组 $EX=0$ 的解空间.

2) 若 $W\neq\{0\}$，设 $\dim W=r$，取 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 为 W 的一组基. 令 $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)$，则 A 为 $n\times r$ 矩阵. 秩 $A=r$，得 $AX=0$ 的基础解系为 $\beta_1,\cdots,\beta_{n-r}$. 令 $B=(\beta_1,\cdots,\beta_{n-r})$. 由第 **1483** 条知 W 为 $B'X=0$ 的解空间.

1485. 设 V 为 n 维线性空间，则 V 的 r 维子空间有无穷多个，其中 $0<r<n$.

证 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为 V 的一组基. 令

$$V_k=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_{r-1},\alpha_r+k\alpha_n),k\in Z. \tag{1}$$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{r-1},\alpha_r+k\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha_n)\begin{bmatrix}1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 1\\ & & & k\end{bmatrix}. \quad (2)$$

因为秩$\begin{bmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\\ & & k\end{bmatrix}=r$，由第 **1418** 条知秩$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_{r-1},\alpha_r+k\alpha_n\}=r$，即 $\dim V_k=r$.

下证 $k_1\neq k_2,k_1,k_2\in Z$，有 $V_{k1}\neq V_{K2}$. 令 $\beta_k=\alpha_r+k\alpha_n,\beta_{k1}\in V_{k1}$，但 $\beta_{k1}\in V_{k2}$，否则，

$$\beta_{k1}=l_1\alpha_1+\cdots+l_{r-1}\alpha_{r-1}+l_r\beta_{k2},$$
$$\alpha_r+k_1\alpha_n=l_1\alpha_1+\cdots+l_{r-1}\alpha_{r-1}+l_r(\alpha_r+k_2\alpha_n),$$
$$l_1\alpha_1+\cdots+l_{r-1}\alpha_r+(l_r-1)\alpha_r+(l_rk_2-k_1)\alpha_n=0,$$

那么 $l_1=\cdots=l_{r-1}=0,l_r=1,k_1=l_rk_2$，从而 $k_1=k_2$，矛盾.

1486. 设 V 为 n 维线性空间，则 V 的任意一个非平凡子空间都是若干个 $n-1$ 维子空间的交.

证 设 W 是 V 的一个非平凡子空间，$\dim W=m,0<m<n$. 取 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 为 W 的一组基，再扩大为 V 的一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\cdots,\beta_{n-m}$. 令

$$W_i=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\cdots,\beta_{i-1},\beta_{i+1},\cdots,\beta_{n-m}),i=1,2,\cdots,n-m,$$

则 $\dim W_i=n-1$，且 $\bigcap\limits_{i=1}^{n-m}W_i=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)=W$.

1487. $V_1=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s),V_2=L(\beta_1,\cdots,\beta_t)$都是 V 的两个子空间. 若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t$ 的一个极大线性无关组为 $\gamma_1,\cdots,\gamma_m$，则 $V_1+V_2=L(\gamma_1,\cdots,\gamma_m)$.

证 $V_1+V_2=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)+L(\beta_1,\cdots,\beta_t)=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t)$

$=L(\gamma_1,\cdots,\gamma_m)$.

注　这给出求和空间的一组基的方法.

1488.　设 $V_1=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$V_2=L(\beta_1,\beta_2)$，求 V_1+V_2 的基与维数，其中

$$\alpha_1=(1,1,0,0),\alpha_2=(1,0,1,1),\alpha_3=(1,1,1,1),$$
$$\beta_1=(0,0,1,1),\beta_2=(0,1,1,0).$$

解　$V_1+V_2=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2)$，而 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$ 的极大线性无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ 由第 **1487** 条知 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ 为 V_1+V_2 的一组基，且 $\dim(V_1+V_2)=4$.

1489.　设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_t$ 是 P^n(n 维列向量)的两组线性无关的向量. 令

$$V_1=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s),V_2=L(\beta_1,\cdots,\beta_t).$$

再设齐次线性方程组 $AX=0$ 的解空间为 W，其中 $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t)$，则 $\dim(V_1\cap V_2)=\dim W$.

证　因为 A 为 $n\times(s+t)$ 矩阵，故

$$\begin{aligned}\dim W&=s+t-\text{秩}\,A=s+t-\text{秩}\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t\}\\&=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1+V_2)=\dim(V_1\cap V_2).\end{aligned}$$

注　① 求 P^n 中两个线性子空间 V_1 与 V_2 的交的维数时，可先分别找出 V_1 与 V_2 的两组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_t$，然后按第 **1489** 条作矩阵 A 并求秩 A 即可得出.

② 求 $V_1\cap V_2$ 的一组基时，先分别各取 V_1,V_2 的一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_t$，再求出齐次方程组

$$x_1\alpha_1+\cdots+x_s\alpha_s+y_1\beta_1+\cdots+y_t\beta_t=0 \tag{1}$$

的一个基础解系. 设秩$(\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t)=r$，(1)的基础解系为：

$$\begin{cases}\eta_1=(a_{11},\cdots,a_{1s},b_{11},\cdots,b_{1t}),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \eta_m=(a_{m1},\cdots,a_{ms},b_{m1},\cdots,b_{mt});\end{cases} \tag{2}$$

其中 $m=s+t-r$. 令

$$\begin{cases}\gamma_1=a_{11}\alpha_1+\cdots+a_{1s}\alpha_s,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \gamma_m=a_{m1}\alpha_1+\cdots+a_{ms}\alpha_s,\end{cases} \tag{3}$$

则

$$V_1\cap V_2=L(\gamma_1,\cdots,\gamma_m). \tag{4}$$

下面证明(4)式. $\forall\ \delta\in V_1\cap V_2$,则 $\delta\in V_1,\delta\in V_2$.

那么 $\quad \delta=k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s=l_1\beta_1+\cdots+l_t\beta_t,$

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_sd_s-(l_1\beta_1+\cdots+l_t\beta_t)=0. \tag{5}$$

于是 $H=(k_1,\cdots,k_s,-l_1,\cdots,-l_t)$ 为(1)的解,而 $\eta_1,\cdots,\eta_m$ 为(1)的基础解系,从而

$$H=u_1\eta_1+\cdots+u_m\eta_m, \tag{6}$$

所以

$$\begin{cases}k_1=u_1a_{11}+\cdots+u_ma_{m1},\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ k_s=u_1a_{1s}+\cdots+u_ma_{ms}.\end{cases}$$

则

$$\begin{aligned}\delta&=k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s\\ &=(u_1a_{11}+\cdots+u_ma_{m1})\alpha_1+\cdots+(u_1a_{1s}+\cdots+u_ma_{ms})\alpha_s\\ &=u_1(a_{11}\alpha_1+\cdots+a_{1s}\alpha_s)+\cdots+u_m(a_{m1}\alpha_1+\cdots+a_{ms}\alpha_s)\\ &=u_1\gamma_1+\cdots+u_s\gamma_s\in L(\gamma_1,\cdots,\gamma_m)\end{aligned}$$

即得 $\quad V_1\cap V_2\subseteq L(\gamma_1,\cdots,\gamma_m)$.

反之,$\forall\ \delta\in L(\gamma_1,\cdots,\gamma_m)$,因为 $\gamma_i\in L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)=V_1,i=1,\cdots,m$. 所以 $\delta\in V_1$. 由于(2)为(1)的基础解系,则

$$a_{11}\alpha_1+\cdots+a_{1s}\alpha_s+b_{11}\beta_1+\cdots+b_{1t}\beta_t=0.$$

所以 $\quad \gamma_1=a_{11}\alpha_1+\cdots+a_{1s}\alpha_s=-(b_{11}\beta_1+\cdots+b_{1t}\beta_t)\in V_2$.

类似可证 $\gamma_2,\cdots,\gamma_m\in V_2$,从而 $\delta\in V_2$,所以 $\delta\in V_1\cap V_2$. 此即 $L(\gamma_1,\cdots,\gamma_m)\subseteq V_1\cap V_2$.

③ 设 $V_1=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$,$V_2=L(\beta_1,\cdots,\beta_r)$ 为 P^n 的两个子空间. 求 $V_1\cap V_2$ 的基与维数时,必须先求出 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 的一个极大线

性无关组 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_s}$，再求 $\beta_1,\cdots,\beta_t$ 的一个极大线性无关组 $\beta_{j_1},\cdots,\beta_{j_k}$，则

$$V_1=L(\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_s}),V_2=L(\beta_{j_1},\cdots,\beta_{j_k}).$$

再按②的办法进行.

④ 设 V 是一般线性空间(不一定为 P^n). 再设 $V_1=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s),V_2=L(\beta_1,\cdots,\beta_t)$ 为 V 的两个子空间，且 $\dim V_1=s,\dim V_2=t$，需求 $V_1\cap V_2$ 的基与维数. 可先求 V 的一组基：$\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\gamma_{s+1},\cdots,\gamma_n$，则

$$(\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\gamma_{s+1},\cdots,\gamma_n)A.$$

其中 $A=(c_1,\cdots,c_s,c_{s+1},\cdots,c_{s+t})$

$$=\begin{bmatrix}1 & & & b_{1,s+1} & \cdots & b_{1,s+t}\\ & 1 & & \vdots & & \vdots\\ & & 1 & \vdots & & \vdots\\ 0 & & & b_{n,s+1} & \cdots & b_{n,s+t}\end{bmatrix}.$$

再求 $AX=0$ 的一个基础解系：

$$\begin{cases}\eta_1=(a_{11},\cdots,a_{1s},b_{11},\cdots,b_{1t}),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \eta_m=(a_{m1},\cdots,a_{ms},b_{m1},\cdots,b_{mt}).\end{cases}$$

令

$$\begin{cases}\gamma_1=a_{11}\alpha_1+\cdots+a_{1s}\alpha_s,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \gamma_m=a_{m1}\alpha_1+\cdots+a_{ms}\alpha_s,\end{cases}$$

则 $V_1\cap V_2=L(\gamma_1,\cdots,\gamma_m)$，且 $\dim V_1\cap V_2=m$.

1490.　求 $V_1=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),V_2=L(\beta_1,\beta_2)$ 的和与交的基与维数，其中

$$\begin{cases}\alpha_1=(1,2,-1,-2),\\ \alpha_2=(3,1,1,1),\\ \alpha_3=(-1,0,1,-1);\end{cases}\qquad\begin{cases}\beta_1=(2,5,-6,-5),\\ \beta_2=(-1,2,-7,3).\end{cases}$$

解　$\because V_1+V_2=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2)$，而秩$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2\}=4$，其中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_2$ 为极大无关组，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_2$ 为 V_1+V_2 的一组基. $\dim(V_1+V_2)=4$.

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 和 β_1,β_2 分别是 V_1,V_2 的基，$\forall\ \gamma\in V_1\cap V_2$，$\gamma=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=l_1\beta_1+l_2\beta_2$，即

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3-l_1\beta_1-l_2\beta_2=0. \tag{1}$$

按分量展开为

$$\begin{cases} k_1+3k_2-k_3-2l_1+l_2=0, \\ -2k_1+k_2-5l_1-2l_2=0, \\ -k_1+k_2+k_3+6l_1+7l_2=0, \\ -2k_1+k_2-k_3+5l_1-3l_2=0. \end{cases} \tag{2}$$

由于(2)的系数矩阵的子式

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 7 \\ -2 & 1 & -1 & -3 \end{vmatrix}\neq 0,$$

所以系数矩阵的秩为 4. (2)的基础解系的向量个数为 $5-4=1$，即 $\dim(V_1\cap V_2)=1$. $V_1\cap V_2$ 中任一非零向量均是一组基. 在(2)中，令 $l_1=1$，可得 $l_2=0$. 故 $\beta_1\in V_1\cap V_2$ 且为 $V_1\cap V_2$ 的一组基.

1491.　设 $f(x_1,\cdots,x_n)$是秩为 r 的 n 元半正定二次型. 证明：$f(x_1,\cdots,x_n)=0$ 的全部实数解构成 R^n 上的 $n-r$ 维子空间 V_1.

证　设 A 为二次型 f 对应的实对称矩阵. 令 W 为 $AX=0$ 的解空间. 因 A 为半正定矩阵，故存在半正定矩阵 B，使 $A=B'B$. 下证 $V_1=W$.

实际上，$\forall\ X_0\in W$，则 $AX_0=0$，那么 $X_0A'X_0=0$，$X_0\in V_1$，即 $W\subseteq V_1$.

反之，$X_0\in V_1$，那么 $X'_0AX_0=0$，$0=X'_0(B'B)X_0=(BX_0)'(BX_0)$，$\therefore BX_0=0$，$B'BX_0=0$，即 $AX_0=0$，$X_0\in W$，此即

$V_1 \subseteq W$. 故 $V_1 = W$，即得 V_1 为 R^n 的子空间. 其次，有

$$\dim V_1 = \dim W = n - \text{秩} A = n - r.$$

1492. 设 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 是秩为 n 的二次型. 证明：有 R^n 上的 $\frac{1}{2}(n - |s|)$ 维子空间 V_1 存在（s 为符号差），使对任一 $(x_1, \cdots, x_n) \in V_1$，有 $f(x_1, \cdots, x_n) = 0$.

证 设 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 的正惯性指数为 p，负惯性指数为 q，$p + q = n$，$p - q = s$，则存在可逆矩阵 P，$Y = PX$，这里 $Y = (y_1, \cdots, y_{p+q})'$，$X = (x_1, \cdots, x_n)'$，使

$$f(x_1, \cdots, x_n) = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_{p+q}^2, \tag{1}$$

$$\frac{1}{2}(n - |s|) = \frac{1}{2}(n - |p - q|) = \frac{1}{2}(p + q - |p - q|) = \begin{cases} p, & p < q; \\ q, & p \geq q. \end{cases}$$

下面对 $p < q$ 证明结论成立，类似可证 $p \geq q$.

令 $\varepsilon_i = (\underbrace{0, \cdots, \overset{i列}{1}, \cdots}_{p个}, 0, 0, \underbrace{\cdots, \overset{p+i列}{1}, 0, \cdots}_{q个}, 0)'$，$i = 1, 2, \cdots, p$. 显然，$\varepsilon_i (i = 1, \cdots, p)$ 线性无关，从而

$$(\alpha_1, \cdots, \alpha_p) = P^{-1}(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p). \tag{2}$$

$\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ 也线性无关.

下面证明 $L(\alpha_1, \cdots, \alpha_p)$ 即为所求的子空间.

$$\forall X_0 \in L(\alpha_1, \cdots, \alpha_p), X_0 = l_1\alpha_1 + \cdots + l_p\alpha_p,$$

$$\begin{aligned} Y_0 &= PX_0 = l_1P\alpha_1 + \cdots + l_pP\alpha_p = l_1\varepsilon_1 + \cdots + l_p\varepsilon_p \\ &= (\underbrace{l_1, \cdots, l_p}_{p个}, \underbrace{l_1, \cdots, l_p, 0, \cdots, 0}_{q个})'. \end{aligned} \tag{3}$$

将(3)代入(1)，有

$$f = X_0'AX_0 = l_1^2 + \cdots + l_p^2 - l_1^2 - \cdots - l_p^2 = 0.$$

所以 $L(\alpha_1, \cdots, \alpha_p)$ 即为所求.

1493. 设实二次型 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 的矩阵是满秩的，又当 $x_{k+1} = \cdots = x_n = 0$ 时，$f = 0$，其中 $2k \leq n$，则 f 的符号差 s 满足 $|s| \leq n -$

$2k$.

证 由第 **1492** 条知存在 V_1,使$\forall (x_1,\cdots,x_n)\in V_1, f=0$,且 $\dim V_1=\frac{1}{2}(n-|s|)$.

再令 $W=\{(x_1,\cdots,x_k,0,\cdots,0)|x_i\in R, i=1,2,\cdots,k\}$. 由假设知 $W\subseteq V_1$,则 $k=\dim W\leqslant \dim V_1=\frac{1}{2}(n-|s|)$,所以$|s|\leqslant n-2k$.

六、 直和

1494. 什么叫做直和?

答 设 $V_1,\cdots,V_s$ 为线性空间 V 的 s 个子空间,如果满足

1) $V=V_1+V_2+\cdots+V_s$;

2) $\forall\ \alpha\in V$,当 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s=\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_s$,

都有 $\alpha_i=\beta_i$,且 $\alpha_i,\beta_i\in V_i(i=1,2,\cdots,s)$,则称 V 是 $V_1,V_2,\cdots,V_s$ 的直和,记为 $V=V_1\oplus\cdots\oplus V_s$.

注 把 2)称为 V 中任意向量表示法唯一.

1495. 设 $W=V_1+V_2+\cdots+V_s$,其中 $V_i(i=1,2,\cdots,s)$为线性空间 V 的子空间,则下面 5 条等价:

1) W 中向量表示法唯一;

2) 零向量表示法唯一;

3) $V_i\cap\sum_{j\neq i}V_j=\{0\}\ (i=1,2,\cdots,s)$; (1)

4) $\dim W=\sum_{i=1}^{s}\dim V_i$; (2)

5) 设 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_{r_i}}$ 为 $V_i(i=1,2,\cdots,s)$的一组基,则它们的并成为 W 的一组基.

证 1)$\Rightarrow$2) 显然.

2)$\Rightarrow$3) 用反证法. 若存在 k,$V_k\cap\sum_{j\neq k}V_j\neq\{0\}$,则存在非零向量 $\alpha\in V_k\cap\sum_{j\neq k}V_j$,从而

$$\alpha\in V_k,\alpha=\beta_1+\cdots+\beta_{k-1}+\beta_{k+1}+\cdots+\beta_s,$$

所以 $\beta_1+\cdots+\beta_{k-1}-\alpha+\beta_{k+1}+\cdots+\beta_s=0$,其中 $\alpha\neq 0$. 这与零向量表示法唯一矛盾.

3)⇒4) 因为

$$V_i\cap\sum_{j=1}^{i-1}V_j\subseteq V_i\cap\sum_{j\neq i}V_j=\{0\},$$

由第 **1473** 条维数公式Ⅳ即可证(2).

4)⇒5) 因为 $V_i=L(\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{ir_i}),\dim V_i=r_i(i=1,2,\cdots,s)$,

$$W=V_1+\cdots+V_s=L(\alpha_{11},\cdots,\alpha_{1r_1},\cdots,\alpha_{s1},\cdots,\alpha_{sr_s}),\tag{3}$$

由 4)的假设 $\dim W=\sum_{i=1}^{s}\dim V_i=r_1+\cdots+r_s$,而(3)式右端生成的向量的总数为 $r_1+\cdots+r_s$,故

$$\alpha_{11},\cdots,\alpha_{1r_1},\cdots,\alpha_{s1},\cdots,\alpha_{sr_s}$$

为 W 的一组基.

5)⇒1) 任取 $\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{ir_i}(i=1,2,\cdots,s)$ 为 V_i 的一组基. 则 $\alpha_{11},\cdots,\alpha_{1r_1},\cdots,\alpha_{s1},\cdots,\alpha_{sr_s}$ 为 W 的一组基.

用反证法. 若 $\alpha\in W$ 表示法不唯一,即

$\alpha=\beta_1+\cdots+\beta_s=\gamma_1+\cdots+\gamma_s$,其中 $\beta_i,\gamma_i\in V_2(i=1,2,\cdots,s)$,

则存在 k,有 $\beta_s=\gamma_s,\cdots,\beta_{k+1}=\gamma_{k+1}$,但 $\beta_k\neq\gamma_k$,那么

$$0\neq\beta_k-\gamma_k=\sum_{i=1}^{k-1}(\gamma_i-\beta_i)\in V_k\cap\sum_{i=1}^{k-1}V_i,$$

此即 $\dim(V_k\cap\sum_{i=1}^{k-1}V_i)>0$.

由第 **1473** 条知

$$\sum_{i=1}^{s}\dim V_i=\dim(\sum_{i=1}^{s}V_i)+\cdots+\dim(V_k\cap\sum_{i=1}^{k-1}V_i)$$

$$+\cdots+\dim\left(V_s\cap\sum_{i=1}^{s-1}V_i\right)$$

$$=\dim W+\cdots+\dim(V_k\cap\sum_{i=1}^{k-1}V_i)$$
$$+\cdots+\dim(V_s\cap\sum_{i=1}^{s-1}V_i)>\dim W.$$

注 ① 当 $s=2$ 时，$W=V_1+V_2$，则下面几条等价：

1) W 中向量表示法唯一；

2) 零向量表示法唯一；

3) $V_1\cap V_2=\{0\}$；

4) $\dim W=\dim V_1+\dim V_2$；

5) $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_t$ 分别为 V_1 与 V_2 的一组基，则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t$ 为 W 的一组基.

② 在解题中常用的是 3)和 4).

③ 在 R^2 中，设两条过原点不重合的直线所生成的两个一维子空间为 V_1,V_2，那么 $R^2=V_1\oplus V_2$.

1496. 设 V 的一组基为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$，则

1) $V=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)\oplus L(\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n)$；

2) $V=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)\oplus L(\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_t)\oplus L(\alpha_{t+1},\cdots,\alpha_n)$；

3) $V=L(\alpha_1)\oplus L(\alpha_2)\oplus\cdots\oplus L(\alpha_n)$.

证 1) 因为 $V=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$
$$=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)+L(\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n),$$

$$\dim V=n=r+(n-r)$$
$$=\dim L(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)+\dim L(\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n),$$

所以 $V=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)\oplus L(\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n)$.

2)、3)同理可证.

注 ① 设 $V=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$是 n 维线性空间，那么可以从中间任何地方断开，不管分多少段，都是直和.

② 设 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_n}$为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 的任一排列，那么
$$V=L(\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_{r_1}})\oplus L(\alpha_{i_{r_1+1}},\cdots,\alpha_{i_n}).$$

1497.　什么叫做补空间？

答　设 V_1 是线性空间 V 的子空间，若存在 V 的子空间 V_2，满足 $V=V_1\oplus V_2$，则称 V_2 为 V_1 的一个补空间（或称余子空间）.

注　同一个子空间 V_1，可能存在无穷多个补空间. 比如在 R^2 中，过原点的一条直线上向量构成 R^2 的子空间 V_1，那么过原点与直线 V_1 相交的任意一条直线（只要与 V_1 不重合）上的向量构成的子空间 V_2 都是 V_1 的补空间. 显然，这样的 V_2 有无穷多个.

只有在两种情况下补空间是唯一的：当 $V_1=V$ 时，补空间只能是零空间；当 $V_1=\{0\}$ 时，补空间为 V.

1498.　任一线性空间的补空间是否存在？

答　是的. 设 V_1 是 n 维线性空间 V 的子空间，若 V_1 是平凡子空间，则第 **1497** 条的注已说明其补空间是存在的. 若 $\dim V_1=r$，$0<r<n$，则取 V_1 的一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$，再扩大为 V 的一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n$，

于是
$$V=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)\oplus L(\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n)$$
$$=V_1\oplus L(\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n),$$
则 $V_2=L(\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n)$ 为 V_1 的补空间.

1499.　设 W 是 n 维线性空间 V 的一个非平凡子空间，则 W 在 V 中的补空间有无穷多个.

证　设 $\dim W=r(0<r<n)$，取 W 的一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 并扩充成 V 的一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\cdots,\beta_{n-r}$. 令
$$V_k=L(k\alpha_r+\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-r}),$$
可以证明 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r,k\alpha_r+\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-r}$ 是线性无关的，并且当 $k_1\neq k_2$ 时，$V_{k_1}\neq V_{k_2}(k_1,k_2\in P)$. 令
$$k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r+l_1(k\alpha_r+\beta_1)+l_2\beta_2+\cdots+l_{n-r}\beta_{n-r}=0 \qquad (1)$$
即
$$k_1\alpha_1+\cdots+(k_r+kl_1)\alpha_r+l_1\beta_1+l_2\beta_2+\cdots+l_{n-r}\beta_{n-r}=0, \qquad (2)$$
由于 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\cdots,\beta_{n-r}$ 线性无关，所以(2)的系数全为 0，从而有

$k_1=\cdots=k_r=l_1=\cdots=l_{n-r}=0$. 因此,$\alpha_1,\cdots,\alpha_r,k\alpha_r+\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-r}$是 V 的一组基. $V=W\oplus V_k$.

当 $k_1\neq k_2$ 时,有 $k_1\alpha_r+\beta_1\in V_{k_1}$,$k_2\alpha_r+\beta_1\in V_{k_2}$,但 $k_2\alpha_r+\beta_1\overline{\in}V_{k_1}$,否则,若 $k_2\alpha_r+\beta_1\in V_{k_1}$,则$(k_1\alpha_r+\beta_1)-(k_2\alpha_r+\beta_1)=(k_1-k_2)\alpha_r\in V_{k_1}\Rightarrow\alpha_r\in V_{k_1}$,此与 $W\cap V_{k_1}=\{0\}$矛盾. 由 k 的任意性,即得结论.

1500. 令 $W_1=\{A\in P^{n\times n}\mid A'=A\}$,$W_2=\{A\in P^{n\times n}\mid A'=-A\}$,证明:$W_1,W_2$ 都是 $P^{n\times n}$的子空间,且 $P^{n\times n}=W_1\oplus W_2$.

证 因为 $0\in W_1,W_2$,所以 W_1,W_2 非空. $\forall A_1,A_2\in W_1,k_1,k_2\in P$,$(k_1A_1+k_2A_2)'=k_1A'_1+k_2A'_2=k_1A_1+k_2A_2$. 所以 $k_1A_1+k_2A_2\in W_1$,W_1 为 $P^{n\times n}$的子空间.

同理,$\forall A_1,A_2\in W_2,k_1,k_2\in P$,$(k_1A_1+k_2A_2)'=-k_1A_1-k_2A_2=-(k_1A_1+k_2A_2)$,所以 $k_1A_1+k_2A_2\in W_2$,W_2 为 $P^{n\times n}$的子空间.

再证 $P^{n\times n}=W_1+W_2$. 显然有 $W_1+W_2\subseteq P^{n\times n}$,反之,任意 $B\in P^{n\times n}$,$B=\frac{B+B'}{2}+\frac{B-B'}{2}$,而$\frac{B+B'}{2}\in W_1$,$\frac{B-B'}{2}\in W_2$,故 $B\in W_1+W_2$,此即 $P^{n\times n}\subseteq W_1+W_2$. 所以 $P^{n\times n}=W_1+W_2$. 由第 **1441** 条知 $\dim P^{n\times n}=n^2$,$\dim W_1=\frac{n(n+1)}{2}$,$\dim W_2=\frac{n(n-1)}{2}$,所以 $\dim P^{n\times n}=\dim W_1+\dim W_2$,即 $P^{n\times n}=W_1\oplus W_2$.

1501. 设 A 是数域 P 上的 n 阶幂等方阵(即 $A^2=A$),证明:$P^n=V_1\oplus V_2$,其中

$$V_1=\{X\in P^n\mid AX=0\},V_2=\{X\in P^n,\mid AX=X\}.$$

证 $\forall\alpha\in P^n$,$\alpha=A\alpha-(A\alpha-\alpha)$. 由于 $A(A\alpha)=A^2\alpha=A\alpha$,$A(A\alpha-\alpha)=A^2\alpha-A\alpha=A\alpha-A\alpha=0$,所以 $A\alpha\in V_2$,$A\alpha-\alpha\in V_1$. 于是 $P^n=V_1+V_2$,又任取 $\alpha\in V_1\cap V_2$,即 $\alpha\in V_1$ 且 $\alpha\in V_2$,有 $A\alpha=0$ 且 $A\alpha=\alpha$,所以 $\alpha=0\Rightarrow V_1\cap V_2=\{0\}\Rightarrow P^n=V_1\oplus V_2$.

1502. 设线性空间 $P^n=V_1\oplus V_2$，其中 V_1,V_2 为 P^n 的两个非平凡子空间. 证明：一定存在唯一的幂等矩阵 A（即 $A^2=A$），使 $V_1=AP^n,V_2=\{X\in P^n\mid AX=0\}$.

证 设秩 $V_1=t,0<t<n$，则秩 $V_2=n-t$. 令 $\alpha_1,\cdots,\alpha_t$ 为 V_1 的一组基，$\alpha_{t+1},\cdots,\alpha_n$ 为 V_2 的一组基，则 $\alpha_2,\cdots,\alpha_t,\alpha_{t+1},\cdots,\alpha_n$ 为 P^n 的一组基. 设矩阵 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_t)=B,(\alpha_{t+1},\cdots,\alpha_n)=C$，则矩阵 (B,C) 可逆. 令 $A=(B,0)(B,C)^{-1}$. 显然，$A,(B,0)\in P^{n\times n}$. 于是 $A(B,C)=(B,0)\Rightarrow(AB,AC)=(B,0)\Rightarrow AB=B,AC=0\Rightarrow A^2=A[(B,0)(B,C)^{-1}]=A(B,0)(B,C)^{-1}=(AB,0)(B,C)^{-1}=(B,0)(B,C)^{-1}=A$. 所以 A 是幂等矩阵.

∵ $AB=(A\alpha_1,\cdots,A\alpha_t)=B=(\alpha_1,\cdots,\alpha_t)$

∴ $A\alpha_i=\alpha_i(i=1,\cdots,t)$.

∵ $AC=(A\alpha_{t+1},\cdots,A\alpha_n)=0$,

∴ $A\alpha_i=0\ (i=t+1,\cdots,n)$.

∴ $AP^n=AL(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=L(A\alpha_1,\cdots,A\alpha_n)=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_t)$
$=V_1$,

$\{X\mid AX=0\}=L(\alpha_{t-1},\cdots,\alpha_n)=V_2$.

下面证明 A 是唯一的. 设另有矩阵 $A_1(A_1^2=A_1)$，使 $V_1=A_1P^n,V_2=\{z\mid A_1z=0\}$. 因 $\alpha_{t+1},\cdots,\alpha_n$ 为 V_2 的基，故 $A_1\alpha_i=0\ (i=t+1,\cdots,\alpha_n)$，$A_1P^n=A_1L(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=L(A_1\alpha_1,\cdots,A_1\alpha_t)$. 因 $\dim V_1=t$，故 $A_1\alpha_1,\cdots,A_1\alpha_t$ 线性无关且为 V_1 的基. 设由基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_t$ 到基 $A_1\alpha_1,\cdots,A_1\alpha_t$ 的过渡矩阵是 T，再由 $A_1^2=A_1$ 得

$$A_1(\alpha_1,\cdots,\alpha_t)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_t)T,$$

$$A_1^2(\alpha_1,\cdots,\alpha_t)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_t)T^2.$$

所以

$$T^2=T\Rightarrow A_1\alpha_i=\alpha_i(i=1,\cdots,t).$$

因此 $A_1\alpha_i=A\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$，即 $A_1=A$. 说明幂等矩阵 A 是

唯一的.

1503. 设 V_1 与 V_2 分别是齐次线性方程组 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$ 与 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 的解空间,则 $P^n=V_1\oplus V_2$.

证 显然 V_1 是 $n-1$ 维子空间,V_2 是 1 维子空间. $\alpha_1=(-1,1,0,\cdots,0)'$, $\alpha_2=(-1,0,1,\cdots,0)'$, $\cdots$, $\alpha_{n-1}=(-1,0,\cdots,1)'$ 是 V_1 的一组基,$\alpha_n=(1,1,\cdots,1)'$ 是 V_2 的一组基. 因为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1},\alpha_n$ 线性无关,所以它们是 P^n 的一组基.

$\therefore\ P^n=V_1\oplus V_2$.

1504. 设 $f(x),g(x)\in P[x]$,且 $(f(x),g(x))=1$, $A\in P^{n\times n}$,设 $f(A)g(A)x=0$, $f(A)x=0$, $g(A)x=0$ 的解空间分别为 W,V_1,V_2,则 $W=V_1\oplus V_2$.

证 $\because f(A)g(A)=g(A)f(A)$, $\therefore V_1,V_2$ 都是 V 的子空间. 由 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素,故有多项式 $u(x)$ 与 $v(x)$ 使

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=1\Rightarrow f(A)u(A)+g(A)v(A)=E.$$

$$\forall\ \alpha\in W,\text{即 } f(A)g(A)\alpha=0,$$

$$\alpha=E\alpha=f(A)u(A)\alpha+g(A)v(A)\alpha=\alpha_1+\alpha_2, \tag{1}$$

其中 $\alpha_1=f(A)u(A)\alpha$, $\alpha_2=g(A)v(A)\alpha$.

$\because\ \ g(A)\alpha_1=u(A)g(A)f(A)\alpha=u(A)(f(A)g(A)\alpha)=0$,

$\therefore\ \ \alpha_1\in V_2$.

同理,$f(A)\alpha_2=0$, $\therefore \alpha_2\in V_1\Rightarrow W\subseteq V_1+V_2$.

由于 $V_1,V_2\subseteq W$, $\therefore V_1+V_2\subseteq W$,即得 $W=V_1+V_2$.

任取 $\alpha\in V_1\cap V_2$,即 $f(A)\alpha=0$ 且 $g(A)\alpha=0$,由(1)式知 $\alpha=0$, $\therefore V_1\cap V_2=\{0\}\Rightarrow V=V_1\oplus V_2$.

1505. 设矩阵 $A,B,C,D\in P^{n\times n}$,两两可交换,且满足 $AC+BD=E$. 证明:方程组 $ABX=0$ 的解子空间 V 是 $BX=0$ 与 $AX=0$ 的解子空间 V_1 与 V_2 的直和. 这里 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$.

证 $\forall\ \alpha\in V$,因为

$$\alpha=E\alpha=(AC+BD)\alpha=AC\alpha+BD\alpha=\alpha_1+\alpha_2, \tag{1}$$

其中 $\alpha_1=AC\alpha,\alpha_2=BD\alpha$，并有 $AB\alpha=0$.

因 A,B,C,D 两两可交换，于是

$$B\alpha_1=B(AC\alpha)=C(AB\alpha)=0\Rightarrow\alpha_1\in V_1,$$

$$A\alpha_1=A(BD\alpha)=D(AB\alpha)=0\Rightarrow\alpha_2\in V_2.$$

因此 $V=V_1+V_2$.

又任取 $\alpha\in V_1\cap V_2$，即 $B\alpha=0$ 且 $A\alpha=0$，由式(1)知 $\alpha=0$，所以 $V_1\cap V_2=\{0\}\Rightarrow V=V_1\oplus V_2$.

七、 欧氏空间

1506. 什么叫做欧氏空间？

答 设 V 是实数域 R 上的一个线性空间，如果 $\forall\ \alpha,\beta\in V$，定义了一个二元实函数，记作 (α,β)，$(\alpha,\beta)\in R$ 称为内积且满足

1) $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$；

2) $(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta)$；

3) $(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$；

4) $(\alpha,\alpha)\geqslant0$，当且仅当 $\alpha=0$ 时，$(\alpha,\alpha)=0$，

其中 α,β,γ 是 V 中任意向量，k 为任意实数，则称 V 为欧几里得(Euclid)空间，简称欧氏空间.

1507. 常见的欧氏空间有哪些？

答 常见的有下面三个：

1) 在 $R^n=\{(x_1,\cdots,x_n)\mid x_i\in R\}$ 里内积定义为

$$(\alpha,\beta)=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n, \tag{1}$$

其中 $\alpha=(x_1,\cdots,x_n)$，$\beta=(y_1,\cdots,y_n)\in R^n$，则 R^n 是 R 上的欧氏空间.

类似地，可得到向量欧氏空间

$$R^n=\{(x_1,\cdots,x_n)'\mid x_i\in R\}.$$

2) 设 $C[a,b]$ 为定义在 $[a,b]$ 上所有连续实函数所成的线性空间，内积定义为

$$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)dx, \tag{2}$$

其中 $f(x),g(x)\in C[a,b]$，则 $C[a,b]$ 为 R 上的欧氏空间.

3) 设 $R^{n\times m}$ 为一切 $n\times m$ 矩阵所成的线性空间，内积定义为

$$(A,B)=\mathrm{tr}A'B, \tag{3}$$

其中 $A,B\in R^{n\times m}$，则 $R^{n\times m}$ 为 R 上的欧氏空间.

1508. 同一个线性空间，是否只有唯一的方法定义内积？

答 不是. 比如在 R^n 中，$\alpha=(x_1,\cdots,x_n)$，$\beta=(y_1,\cdots,y_n)\in R^n$，规定

$$(\alpha,\beta)=k(x_1y_1+\cdots+x_ny_n),\quad 其中 k 为正实数,$$

则(α,β)也是一种内积，由 k 的任意性，可以定义无穷多种内积. 不同的内积构成不同的欧氏空间.

1509. 欧氏空间的内积有哪些主要性质？

答 1) $(\alpha,k\beta)=k(\alpha,\beta)$；

2) $(\alpha,\beta+\gamma)=(\alpha,\beta)+(\alpha,\gamma)$；

3) $(\alpha,0)=(0,\beta)=0$；

4) 设 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 为 V 的一组基，

$$\alpha=x_1\varepsilon_1+\cdots+x_n\varepsilon_n,\quad \beta=y_1\varepsilon_1+\cdots+y_n\varepsilon_n,$$

则 $(\alpha,\beta)=x'Ay$，其中 $x'=(x_1,\cdots,x_n)$，$y'=(y_1,\cdots,y_n)$，

$$A=\begin{bmatrix}(\varepsilon_1,\varepsilon_1) & \cdots & (\varepsilon_1,\varepsilon_n)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ (\varepsilon_n,\varepsilon_1) & \cdots & (\varepsilon_n,\varepsilon_n)\end{bmatrix}.$$

1510. 什么叫做向量的长度？

答 设 V 为欧氏空间，$\alpha\in V$，称$\sqrt{(\alpha,\alpha)}$为 α 的长度，记为 $\|\alpha\|$.

注 ①$\|0\|=0$；②$\|\alpha\|>0$，$\forall\alpha\in V$，且 $\alpha\neq0$；③长度为 1 的向量称为单位向量.

1511. $\|k\alpha\|=|k|\cdot\|\alpha\|$，$\alpha\in V$，$k\in P$.

1512.　当 $\alpha\neq 0$ 时，$\left\|\frac{1}{\|\alpha\|}\alpha\right\|=1$.

注　这种方法称为将 α 单位化.

1513.　$|(\alpha,\beta)|\leqslant\|\alpha\|\cdot\|\beta\|,\forall\ \alpha,\beta\in V$.

当且仅当 $\alpha=k\beta(k\in P)$ 时等号成立.

注　① 这性质称为柯西一布涅柯夫斯基(Cauchy-Буняковскич)不等式.

② α 与 β 线性无关时，$|(\alpha,\beta)|<\|\alpha\|\cdot\|\beta\|$.

③ $\forall\ a_i,b_i\in R\ (i=1,2,\cdots,n)$，则

$$|a_1b_1+\cdots+a_nb_n|\leqslant\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}\cdot\sqrt{b_1^2+\cdots+b_n^2}.$$

④ $\forall\ f(x),g(x)\in C[a,b]$，则

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right|\leqslant\left[\int_a^b f^2(x)dx\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\left[\int_a^b g^2(x)dx\right]^{\frac{1}{2}}.$$

1514.　什么叫夹角？

答　V 是欧氏空间，非零向量 α,β 的夹角 (α,β) 规定为

$$(\alpha,\beta)=\arccos\frac{(\alpha,\beta)}{\|\alpha\|\cdot\|\beta\|},\quad 0\leqslant(\alpha,\beta)\leqslant\pi.$$

1515.　什么叫正交？

答　设 V 为欧氏空间，$\alpha,\beta\in V$，若 $(\alpha,\beta)=0$，则称 α 与 β 正交，记为 $\alpha\perp\beta$.

注　① $0\perp\alpha,\forall\ \alpha\in V$.

② 当 α,β 都是非零向量，则 $\alpha\perp\beta\Longleftrightarrow(\alpha,\beta)=\frac{\pi}{2}$.

③ $\alpha\perp\alpha\Longleftrightarrow\alpha=0$.

1516.　1) $\|\alpha+\beta\|\leqslant\|\alpha\|+\|\beta\|$；

2) 当 $\alpha\perp\beta$ 时，$\|\alpha+\beta\|^2=\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2$；

3) 当 $\alpha_i\perp\alpha_j(i\neq j,i、j=1,2,\cdots,m)$ 时，则

$$\|\alpha_1+\cdots+\alpha_m\|^2=\|\alpha_1\|^2+\cdots+\|\alpha_m\|^2.$$

注　2)称为勾股定理. 3)称为推广的勾股定理.

1517. 什么叫做格拉姆(Gram)矩阵?

答 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 为 n 维欧氏空间 V 的一组向量,令 $a_{ij}=(\alpha_i,\alpha_j)$ $(i、j=1,2,\cdots,m)$,称 $A=(a_{ij})_{m\times m}$为向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 的格拉姆矩阵,记为 $G(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$.

1518. 什么叫度量矩阵?

答 设 V 是 n 维欧氏空间,$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 为 V 的一组基,称 $G(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)$为基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 的度量矩阵.

注 ① 基不同则度量矩阵不同.

② 当 $G(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)$为对角矩阵时,即$(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=0(i\neq j)$,称 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 为 V 的一组正交基.

③ 当 $G(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=E$ 时,则称 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 为 V 的一组标准正交基.

1519. 设 $A\in R^{n\times n}$,$\forall\ \alpha=(x_1,\cdots,x_n)'$,$\beta=(y_1,\cdots,y_n)'$,证明:$R^n$ 对于内积$(\alpha,\beta)=\alpha' A\beta$ 构成欧氏空间的充分必要条件是 A 为正定矩阵.

证 先证充分性. 设 A 为正定矩阵,则 A 为实对称阵得

$$(\alpha,\beta)=\alpha' A\beta=(\alpha' A\beta)'=\beta' A'\alpha=\beta' A\alpha=(\beta,\alpha),$$

$$(k\alpha,\beta)=(k\alpha)' A\beta=k(\alpha' A\beta)=k(\alpha,\beta),$$

$$(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha+\beta)' A\gamma=\alpha' A\gamma+\beta' A\gamma=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma).$$

当 $\alpha\neq 0$ 时,$(\alpha,\alpha)=\alpha' A\alpha=f(x_1,\cdots,x_n)$为正定二次型,故 $f>0$. 当且仅当 $\alpha=0$,$f=0$. 所以,R^n 构成欧氏空间.

再证必要性. 设 R^n 关于题设的内积构成欧氏空间,取

$$\alpha_i=(0,\cdots,\underset{(i)}{1},\cdots,0)',\alpha_j=(0,\cdots,\underset{(j)}{1},\cdots,0)',$$

则 $(\alpha_i,\alpha_j)=\alpha_i' A\alpha_j=a_{ij}$,$(\alpha_j,\alpha_i)=\alpha_j' A\alpha_i=a_{ji}$.

$\because (\alpha_i,\alpha_j)=(\alpha_j,\alpha_i)$,$\therefore a_{ij}=a_{ji}$,$A$ 为实对称矩阵. 令 $f(x_1,\cdots,x_n)=X' AX$,其中 $X'=(x_1,\cdots,x_n)$,则 f 为实二次型. $\forall\ \alpha\neq 0$,$(\alpha,\alpha)=\alpha' A\alpha>0$,$\therefore f$ 为正定二次型. A 为正定矩阵.

1520. 在 R^4 中按通常的内积定义，求两个单位向量，使其与三个向量 $\alpha=(2,1,4,0)$，$\beta=(-1,-1,2,2)$，$\gamma=(3,2,5,4)$ 正交.

解 设所求向量为 (x_1,x_2,x_3,x_4)，因与 α,β,γ 正交，所以满足方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=0.$$

方程组的基础解系为 $\eta=(10,-12,-2,1)$，$|\eta|=\sqrt{249}$，所以 $\eta_0=\pm\frac{1}{\sqrt{249}}(10,-12,-2,1)$ 即为所求.

1521. 在实线性空间 $C[-1,1]$ 中定义内积

$$(f(x),g(x))=\int_{-1}^{1} f(x)\cdot g(x)dx$$

构成欧氏空间，求 $f_1(x)=1$，$f_2(x)=x$，$f_3(x)=1-x$ 所构成的三角形的三个内角.

解 $\because (f_1,f_2)=0,(f_1,f_3)=2,(f_2,f_3)=-\frac{2}{3}$,

$$\|f_1\|=\sqrt{(f_1,f_1)}=\sqrt{2},\ \|f_2\|=\sqrt{\frac{2}{3}},\ \|f_3\|=\frac{2}{3}\sqrt{6},$$

$$\therefore \langle f_1,f_2\rangle=\arccos\frac{(f_1,f_2)}{\|f_1\|\cdot\|f_2\|}=\arccos 0=\frac{\pi}{2};$$

$$\langle f_1,f_3\rangle=\frac{\pi}{6};\ \langle f_2,f_3\rangle=\pi-\arccos\frac{(f_2,f_3)}{\|f_2\|\cdot\|f_3\|}=\frac{\pi}{3}.$$

1522. 设 $A=(a_{ij})$ 是 n 阶正定矩阵，在 R^n 中定义内积 $(\alpha,\beta)=\alpha' A\beta$，其中 $\alpha=(x_1,\cdots,x_n)'$，$\beta=(y_1,\cdots,y_n)'$，

1) 求单位向量 $\varepsilon_1=(1,0,\cdots,0),\cdots,\varepsilon_n=(0,0,\cdots,1)$ 的度量矩阵；

2) 写出这个欧氏空间的柯西—布涅柯夫斯基不等式.

解 1) $(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=a_{ij}$，$G(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=A$.

2) $\because |(\alpha,\beta)|\leqslant\|\alpha\|\cdot\|\beta\|$，而

$$|(\alpha,\beta)|=|\alpha' A\beta|=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j.$$

$$\|\alpha\|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}=\Big(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\Big)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|\beta\|=\sqrt{(\beta,\beta)}=\Big(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_iy_j\Big)^{\frac{1}{2}},$$

故 $\Big|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j\Big|\leqslant\Big(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\Big)^{\frac{1}{2}}\cdot\Big(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_iy_j\Big)^{\frac{1}{2}}.$

1523. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为欧氏空间 V 的一组基，$A=(a_{ij})$ 为它的度量矩阵，则

1）$\forall\ \alpha,\beta\in V$，$(\alpha,\beta)=Z'AY$，其中 $Z=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$，$Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)'$ 分别为 α,β 在该基下坐标；

2）A 为正定矩阵.

证　1）$\because\ \alpha=\sum_{i=1}^{n}x_i\alpha_i,\quad \beta=\sum_{i=1}^{n}y_i\alpha_i$，$\therefore$

$$(\alpha,\beta)=\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i\alpha_i,\sum_{i=1}^{n}y_i\alpha_i\Big)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_iy_j(\alpha_i,\alpha_j)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j=Z'AY.$$

2）$\forall\ \alpha\in V,\alpha\neq 0$，$\because\ (\alpha,\alpha)>0$，$\therefore$ 二次型 $(\alpha,\alpha)=Z'AZ>0$，即为正定二次型，故 A 是正定矩阵.

1524. 证明：1）n 维欧氏空间中不同基的度量矩阵是合同的；

2）任何有限维欧氏空间都存在标准正交基.

证　1）设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 及 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 为欧氏空间 V 的两组基，$A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$ 分别为它们的度量矩阵，C 为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 到 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵，则 $\forall\ \alpha,\beta\in V$，$\alpha,\beta$ 在基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 下的坐标为 CX 与 CY（其中 $X=(x_1,\cdots,x_n)'$，$Y=(y_1,\cdots,y_n)'$ 分别为 α,β 在基 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 下的坐标）. 因此由第 **1522** 条

$$(\alpha,\beta)=(CX)'A(CY)=X'C'ACY.$$

另一方面， $(\alpha,\beta)=X'BY$，

因此 $X'C'ACY=X'BY$.

当 $X=Y$ 时，有 $X'C'ACX=X'BX$，于是 $C'AC=B$，即 A 与 B 是合同的.

2）因度量矩阵 A 是正定的，所以存在可逆阵 C，使 $C'AC=E$. 令 $(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)C$，那么 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 也是 V 的一组基，由 1)，它的度量矩阵就是 E，即 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 是 V 的一组标准正交基.

1525. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是 n 维欧氏空间的一组向量，$A=(a_{ij})$，$a_{ij}=(\alpha_i,\alpha_j)$，证明，当且仅当 $|A|\neq 0$ 时，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关.

证 先证充分性. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，将其扩充为 V 的一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1},\cdots,\alpha_n$，此基的度量矩阵是正定的，因此其 m 阶顺序主子式 $|A|>0$，即有 $|A|\neq 0$.

再证必要性. 设 $|A|\neq 0$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 必线性无关. 因若线性相关，则其中必有一向量(不妨设为 α_1)可由其余向量线性表出，即 $\alpha_1=k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$. 于是

$$(\alpha_i,\alpha_1)=k_2(\alpha_i,\alpha_2)+\cdots+k_m(\alpha_i,\alpha_m)\ (i=1,2,\cdots,m).$$

此即 A 的第 1 列可由其余 $m-1$ 列线性表出，从而 $|A|=0$，此与 $|A|\neq 0$ 矛盾.

1526. 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 为 n 维欧氏空间 V 的一组标准正交基，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 为 V 的一组向量，它的格拉姆矩阵为 G 且有

$$\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \vdots\\ \varepsilon_n\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \vdots\\ \varepsilon_n\end{bmatrix}.$$

则

1）$G=AA'$；

2）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 为 V 的基的充分必要条件是 $m=n$，且 G 为正定矩阵.

证　1）∵$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 为标准正交基，基度量矩阵为单位矩阵，∴G 中第 i 行、第 j 列的元素为

$$g_{ij}=(\alpha_i,\alpha_j)=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{jk},$$

即 A 的第 i 行与 A' 的第 j 列对应元素的乘积之和，故 $G=AA'$.

2）因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 为基的充分必要条件是 $m=n$，且线性无关，即 A 为可逆的实 n 阶方阵. 而 $G=AA'$ 为正定矩阵的充分必要条件是 A 为可逆的实 n 阶方阵. 故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 为基的充分必要条件是 $m=n$，且 G 为正定矩阵.

1527.　设 V 为 n 维欧氏空间，证明：任意一个 n 阶正定矩阵都是 V 中某组基的度量矩阵，并说明这样的基不唯一.

证　设 A 为 n 阶正定矩阵，则存在实满秩方阵 C，使得 $A=C'C$. 令 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 为 V 的标准正交基，

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)C$$

则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 也是 V 的一组基. 于是它的度量矩阵为 $C'EC=A$.

现取 $\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n'$ 为 V 的另一组标准正交基，并令 $(\beta_1\cdots\beta_n)=(\varepsilon_1'\cdots\varepsilon_n')C$ 则 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是不同于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的另一组基，但它的度量矩阵仍为 $C'C=A$.

1528.　$d(\alpha,\beta)=\|\alpha-\beta\|$ 通常称为 α 与 β 的距离. 证明：

$$d(\alpha,\gamma)\leqslant d(\alpha,\beta)+d(\beta,\gamma).$$

证　$d(\alpha,\gamma)=\|\alpha-\gamma\|=\|\alpha-\beta+\beta-\gamma\|$

$$\leqslant\|\alpha-\beta\|+\|\beta-\gamma\|=d(\alpha,\beta)+d(\beta,\gamma).$$

1529.　设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是欧氏空间 V 的一组基，证明：

1）如果 $\gamma\in V$ 使 $(\gamma,\alpha_i)=0(i=1,2,\cdots,n)$，那么 $\gamma=0$；

2）如果 $\gamma_1,\gamma_2\in V$ 使对任意 $\alpha\in V$，有 $(\gamma_1,\alpha)=(\gamma_2,\alpha)$，那么 γ_1

$=\gamma_2$.

证　1) 设 $\gamma=k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n$，那么由假设 $(\gamma,\gamma)=k_1(\gamma,\alpha_1)+\cdots+k_n(\gamma,\alpha_n)=0$，$\therefore\gamma=0$.

2) 由假设有 $(\gamma_1-\gamma_2,\alpha_i)=0\ (i=1,2,\cdots,n)$，即 $\gamma_1-\gamma_2=0$，$\gamma_1=\gamma_2$.

1530.　什么叫施密特(Schmidt)标准正交化？

答　设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 为 V 的一个线性无关向量组.

1) 正交化. 令

$$\begin{cases}\beta_1=\alpha_1,\\ \beta_2=\alpha_2-\dfrac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \beta_m=\alpha_m-\dfrac{(\alpha_m,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\dfrac{(\alpha_m,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\cdots-\dfrac{(\alpha_m,\beta_{m-1})}{(\beta_{m-1},\beta_{m-1})}\beta_{m-1},\end{cases}$$

即

$$(\beta_1,\cdots,\beta_m)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)\begin{bmatrix}1 & & *\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{bmatrix}.$$

使

$$(\beta_i,\beta_j)=\begin{cases}(\beta_i,\beta_i), & i=j;\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

2) 再单位化. 令 $\gamma_i=\dfrac{1}{\|\beta_i\|}\beta_i\ (i=1,2,\cdots,m)$，则

$$(\gamma_i,\gamma_j)=\begin{cases}1, & i=j;\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

这时

$$(\gamma_1,\cdots,\gamma_m)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)\begin{bmatrix}t_1 & & *\\ & \ddots & \\ 0 & & t_m\end{bmatrix},\quad t_i>0.$$

1531. 求齐次线性方程组

$$\begin{cases}2x_1+x_2-x_3+x_4+3x_5=0,\\ x_1+x_2-x_3\qquad+x_5=0\end{cases}$$

的解空间(作为 R^5 的子空间)的一组标准正交基.

解 首先可求得基础解系为

$$\begin{cases}\alpha_1=(1,0,0,-5,-1),\\ \alpha_2=(0,1,0,-4,-1),\\ \alpha_3=(0,0,1,4,1).\end{cases}$$

由第 **1530** 条将其正交化得

$$\begin{cases}\beta_1=(1,0,0,-5,-1),\\ \beta_2=(-\frac{7}{9},1,0,-\frac{1}{9},-\frac{2}{9}),\\ \beta_3=\frac{1}{15}(7,6,15,1,2).\end{cases}$$

再单位化得解空间的一组标准正交基:

$$\begin{cases}\eta_1=\frac{1}{3\sqrt{3}}(1,0,0,-5,-1),\\ \eta_2=\frac{1}{3\sqrt{15}}(-7,9,0,-1,-2),\\ \eta_3=\frac{1}{3\sqrt{35}}(7,6,15,1,2).\end{cases}$$

1532. 设 V 是一 n 维欧氏空间,$\alpha\neq0$ 是 V 的一固定向量,则

1) $V_1=\{x\mid(x,\alpha)=0,x\in V\}$是 V 的一个子空间;

2) $\dim V_1=n-1$.

证 1) $\because 0\in V_1$, $\therefore V_1$ 非空. $\forall\ \beta_1,\beta_2\in V_1$, $\forall\ k_1,k_2\in R$,

$(k_1\beta_1+k_2\beta_2,\alpha)=k_1(\beta_1,\alpha)+k_2(\beta_2,\alpha)=0$, $\therefore k_1\beta_1+k_2\beta_2\in V_1$, 即知 V_1 为 V 的子空间.

2) 将 α 扩大为 V 的一组正交基 $\alpha,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$,则 $\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in V_1$,

$L(\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\subseteq V_1$.

反之，$\forall\ \beta\in V_1,\beta=k\alpha+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\beta_n,0=(\beta,\alpha)=k(\alpha,\alpha)$，$\therefore k=0$. $\beta\in L(\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$. $V_1=L(\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，$\dim V_1=n-1$.

1533.　什么叫向量与空间正交？空间与空间正交？

答　1）设 W 是欧氏空间 V 的子空间，$\alpha\in V$. 若 $(\alpha,\beta)=0$，$\forall\ \beta\in W$，则称 α 与 W 正交，记为 $\alpha\perp W$.

2）设 V_1,V_2 是欧氏空间 V 的两个子空间，若 $(\alpha,\beta)=0$，$\forall\ \alpha\in V_1,\forall\ \beta\in V_2$，则称 V_1 与 V_2 正交，记为 $V_1\perp V_2$.

1534.　如果 $V_1,\cdots,V_s$ 两两正交，那么和 $V_1+\cdots+V_s$ 就是直和 $V_1\oplus\cdots\oplus V_s$.

1535.　什么叫做正交补？

答　V_1 与 V_2 都是欧氏空间 V 的子空间，如果满足：

1）$V=V_1+V_2$；

2）$V_1\perp V_2$，

那么称 V_2 为 V_1 的正交补，记为 $V_2=V_1^{\perp}$.

1536.　n 维欧氏空间 V 的任意一个子空间都有唯一的正交补.

注　设 V_1 是 V 的子空间.

1）若 $V_1=\{0\}$，则 $V_1^{\perp}=V$；

2）若 $V_1=V$，则 $V_1^{\perp}=\{0\}$；

3）若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 为 V_1 的一组正交基，再扩大为 V 的一组正交基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1},\cdots,\alpha_n$，则

$$V_1=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_m),V_1^{\perp}=L(\alpha_{m+1},\cdots,\alpha_n).$$

1537.　设 W 是 n 维欧氏空间 V 的子空间，则 $(W^{\perp})^{\perp}=W$.

证　$V=W+W^{\perp}$，由于 W 与 $W^{\perp}$ 的地位是对称的，$\therefore (W^{\perp})^{\perp}=W$.

1538.　1）$(V_1+V_2)^{\perp}=V_1^{\perp}\cap V_2^{\perp}$.

2）$(V_1\cap V_2)^{\perp}=V_1^{\perp}+V_2^{\perp}$.

证　1) $\alpha\in(V_1+V_2)^{\perp}\Longleftrightarrow\alpha\perp(V_1+V_2)\Longleftrightarrow\alpha\perp V_1$ 且 $\alpha\perp V_2$ $\Longleftrightarrow\alpha\in V_1^{\perp}\cap V_2^{\perp}$.

2) 由 1)$(V_1^{\perp}+V_2^{\perp})=(V_1^{\perp})^{\perp}\cap(V_2^{\perp})^{\perp}=V_1\cap V_2$,

$\therefore(V_1^{\perp}+V_2^{\perp})=(V_1\cap V_2)^{\perp}$.

1539.　欧氏空间 V 的有限维子空间 V_1 的正交补 $V_1^{\perp}$ 恰由与 V_1 正交的向量组成.

证　取 V_1 的一组正交基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$,扩大为 V 的一组正交基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1},\cdots,\alpha_n$,则 $V_1^{\perp}=L(\alpha_{m+1},\cdots,\alpha_n)$. 令 $W=\{\alpha\in V\mid\alpha\perp V_1\}$,下证 $W=V_1^{\perp}$.

因为 $\alpha_i\perp V_1(i=m+1,\cdots,n)$,所以 $V_1^{\perp}\subseteq W$.

反之,$\forall\ \beta\in W$,$\beta=k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n$,因 $\beta\perp V_1$,$0=(\beta,\alpha_1)=k_1(\alpha_1,\alpha_1)$,$\therefore k_1=0$. 类似可证 $k_2=\cdots=k_m=0$. $\therefore\beta=k_{m+1}\alpha_{m+1}+\cdots+k_n\alpha_n\in V_1^{\perp}$,即 $W\subseteq V_1^{\perp}$,$\therefore W=V_1^{\perp}$.

1540.　向量 $\beta\in V_1$ 是向量 α 在子空间 V_1 上的内射影的充分必要条件是

$$|\alpha-\beta|\leqslant|\alpha-\xi|,\forall\ \xi\in V_1.$$

证　必要性　设 $\beta\in V_1$ 是 α 在 V_1 上的内射影,

$$\alpha=\beta+\gamma,\gamma\in V_1^{\perp},$$

于是 $\alpha-\beta\in V_1^{\perp}$,$\forall\ \xi\in V_1$,$\beta-\xi\in V_1$,从而$(\alpha-\beta)\perp(\beta-\xi)$. 根据勾股定理,

$$|(\alpha-\beta)+(\beta-\xi)|^2=|\alpha-\beta|^2+|\beta-\xi|^2,$$

即　$|\alpha-\xi|^2=|\alpha-\beta|^2+|\beta-\xi|^2$.　从而　$|\alpha-\beta|\leqslant|\alpha-\xi|$.

充分性　$\forall\ \xi\in V_1$,有 $|\alpha-\beta|\leqslant|\alpha-\xi|$,$\beta\in V_1$. 再设 $\alpha=\beta_1+\gamma$,$\beta_1\in V_1$,$\gamma\in V_1^{\perp}$,那么 β_1 是 α 在 V_1 上的内射影. 由必要性的证明知

$$|\alpha-\beta_1|\leqslant|\alpha-\beta|.$$

但由假设 $|\alpha-\beta|\leqslant|\alpha-\beta_1|$,故 $|\alpha-\beta|=|\alpha-\beta_1|$.

又因 $\alpha-\beta$ 与 β_1,β 都正交，从而与 $\beta_1-\beta$ 正交. 由勾股定理，$|\alpha-\beta|^2=|\alpha-\beta_1|^2+|\beta_1-\beta|^2$，知 $|\beta_1-\beta|^2=0\Rightarrow\beta_1=\beta$，即 β 为 α 在 V_1 上的内射影.

1541. 证明：实系数线性方程组 $AX=\beta$（A 为 n 阶方阵，$X=(x_1,\cdots,x_n)'$，$\beta=(b_1,\cdots,b_n)'$）有解的充分必要条件是 β 与方程组 $A'X=0$ 的解空间 W 正交.

证　必要性　设 $AX=\beta$ 有解 X_0，即 $AX_0=\beta$，Y 为 $A'X=0$ 的任一解，即 $A'Y=0$，于是 $(\beta,Y)=\beta'Y=X'_0A'Y=X'_0(A'Y)=0$，所以 β 与 W 正交.

充分性　设 β 与 W 正交，即对 $\forall\ Y\in W$，$(\beta,Y)=0$，而 $(\beta,Y)=B'Y=0$，可知线性方程组 $\begin{bmatrix}A'\\ \beta'\end{bmatrix}Y=0$ 与 $A'Y=0$ 是同解的，所以秩 $\begin{bmatrix}A'\\ \beta'\end{bmatrix}=$ 秩 A'，即秩 $(A,\beta)=$ 秩 A. 这说明线性方程组 $AX=\beta$ 的增广矩阵与系数矩阵有相等的秩，因此 $AX=\beta$ 有解.

1542. 设 V_1,V_2 是 n 维欧氏空间 V 的子空间，且 V_1 的维数小于 V_2 的维数. 证明：V_2 中必有一非零向量正交于 V_1 中一切向量.

证　设 $\dim V_1=s$，$\dim V_2=t$，$s<t$. $\because V=V_1\oplus V_1^{\perp}$，$\therefore \dim V_1^{\perp}=n-s$. 令 $V_3=V_2\cap V_1^{\perp}$，则 V_3 是 V 的子空间. 由维数公式 I 及 $\dim(V_2+V_1^{\perp})\leqslant n$ 得 $\dim(V_2+V_1^{\perp})=\dim V_2+\dim V_1^{\perp}-\dim(V_2\cap V_1^{\perp})=t+(n-s)-\dim V_3\leqslant n$. $\therefore \dim V_3\geqslant t-s>0$. $V_3\neq\{0\}$，任取 $\alpha\in V_3$，$\alpha\neq0$，则 $\alpha\in V_2$，且 $\alpha\in V_1^{\perp}$，即 α 与 V_1 中一切向量正交.

1543. 设 V 是 n 维欧氏空间，$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 为 V 的两组基，且 $(\beta_1,\cdots\beta_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)A$，其中 $A=(a_{ij})$ 为过渡矩阵，则下面三个条件中有两个成立，另一个必然也成立：

1）$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为 V 的标准正交基；

2）$\beta_1,\cdots,\beta_n$ 为 V 的标准正交基；

3) A 为正交阵.

证 1)、2)⇒3)

$$(\beta_i,\beta_j)=(a_{1i}\alpha_1+\cdots+a_{ni}\alpha_n)(a_{1j}\alpha_1+\cdots+a_{nj}\alpha_n)$$
$$=a_{1i}a_{1j}+a_{2i}a_{2j}+\cdots+a_{ni}a_{nj}. \quad (1)$$

$\because (\beta_i,\beta_j)=\begin{cases}1 & i=j;\\ 0 & i\neq j,\end{cases}$ 由(1)式知 A 为正交矩阵.

1)、3)⇒2) 由 A 为正交矩阵,则

$$a_{1i}a_{1j}+a_{2i}a_{2j}+\cdots+a_{ni}a_{nj}=\begin{cases}1 & i=j;\\ 0 & i\neq j.\end{cases}$$

再由(1)式,得 $(\beta_i,\beta_j)=\begin{cases}1, & i=j;\\ 0, & i\neq j,\end{cases}$ 即 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 为标准正交基.

2)、3)⇒1) 因为 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\beta_1,\cdots\beta_n)A^{-1}$,$A^{-1}$ 仍为正交矩阵,所以 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为标准正交基.

八、 酉空间(U 空间)

1544. 什么叫做酉空间?

答 设 V 是复数域 C 上的一个线性空间,$\forall\ \alpha,\beta\in V$,定义了一个二元复函数,记作 (α,β),如果满足下列条件:

1) $(\alpha,\beta)=\overline{(\beta,\alpha)}$,其中 $\overline{(\beta,\alpha)}$ 是 (β,α) 的共轭复数;

2) $(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta)$;

3) $(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$;

4) $(\alpha,\alpha)\geqslant 0$ 为非负实数;当且仅当 $\alpha=0$ 时,$(\alpha,\alpha)=0$;

其中 α,β,γ 是 V 中任意向量,k 为任意复数,则称 (α,β) 为内积,V 为酉(U)空间.

1545. 在线性空间 C^n 中,设 $\alpha=(a_1,\cdots,a_n)$,$\beta=(b_1,\cdots,b_n)$,$a_i,b_i\in C(i=1,2,\cdots,n)$,定义

$$(\alpha,\beta)=a_1\overline{b_1}+\cdots+a_n\overline{b_n}=\alpha\overline{\beta'}, \quad (1)$$

则(1)式为内积,C^n 是 n 维酉空间.

1546.　酉空间的内积有哪些主要性质?

答　1) $(\alpha,k\beta)=\bar{k}(\alpha,\beta)$;

2) $(\alpha,\beta+\gamma)=(\alpha,\beta)+(\alpha,\gamma)$;

3) $(0,\alpha)=(\beta,0)=0$.

1547.　复数域 C 上的 n 维线性空间 V 是否都可以定义内积使其成为酉空间?

答　可以. 例如取 V 的一组基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$. 对任意 $\alpha=x_1\varepsilon_1+\cdots+x_n\varepsilon_n,\beta=y_1\varepsilon_1+\cdots+y_n\varepsilon_n\in V$,规定

$$(\alpha,\beta)=x_1\overline{y_1}+x_2\overline{y_2}+\cdots+x_n\overline{y_n},$$

则可以验证(α,β)为内积,从而 V 为酉空间.

注　显然不止一种方法定义内积.

1548.　设 $C[x]_n$ 为复数域 C 上次数小于 n 的多项式的全体再加上零多项式构成的线性空间,$\forall f(x),g(x)\in C[x]_n$,定义:

$$(f,g)=\sum_{i=1}^{n}f(i)\overline{g(i)}. \tag{1}$$

则(f,g)为内积,从而 $C[x]_n$ 为酉空间.

证　$\forall f,g,h\in C[x]_n,\forall k\in C$,有

$$1)\ (f,g)=\sum_{i=1}^{n}f(i)\overline{g(i)}=\overline{\sum_{i=1}^{n}\overline{f(i)}g(i)}$$

$$=\overline{\sum_{i=1}^{n}g(i)\overline{f(i)}}=\overline{(g,f)};$$

$$2)\ (f+g,h)=\sum_{i=1}^{n}[f(i)+g(i)]\overline{h(i)}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}f(i)\overline{h(i)}+\sum_{i=1}^{n}g(i)\overline{h(i)}=(f,h)+(g,h);$$

$$3)\ (kf,g)=\sum_{i=1}^{n}kf(i)\overline{g(i)}=k(f,g);$$

$$4)\ (f,f)=\sum_{i=1}^{n}f(i)\overline{f(i)}\geqslant 0,\text{且}$$

$$(f,f)=0 \Longleftrightarrow f(i)\overline{f(i)}=0 \ (i=1,\cdots,n)$$

$$\Longleftrightarrow f(i)=0 \ (i=1,\cdots,n)$$

$\Longleftrightarrow f(x)=0$ ($\because f(x)$是次数小于 n 的多项式，若 $f(x)\neq 0$，由 $f(x)$不可能有 n 个不同的根)；

所以(f,g)是内积，从而 $C[x]_n$ 成为酉空间.

1549. 在酉空间里有没有长度与正交的概念？

答 有. 设 V 是酉空间，定义$\sqrt{(\alpha,\alpha)}$为 α 的长度，记为 $\|\alpha\|$. 当$(\alpha,\beta)=0$ 时，称 α 与 β 正交，记为 $\alpha\perp\beta$，其中 $\alpha,\beta\in V$.

1550. 在酉空间 V 中，证明柯西不等式：

$$|(\alpha,\beta)|\leqslant\|\alpha\|\cdot\|\beta\|. \tag{1}$$

证 当 $\beta=0$ 时，(1)式显然成立. 下设 $\beta\neq 0$. 令 $\gamma=\alpha+t\beta$，其中 t 为复数，则

$$0\leqslant(\gamma,\gamma)=(\alpha,\alpha)+t(\beta,\alpha)+\bar{t}(\alpha,\beta)+t\,\bar{t}(\beta,\beta). \tag{2}$$

令 $t=-\dfrac{(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}$，代入(2)式，得

$$0\leqslant(\alpha,\alpha)-\frac{(\alpha,\beta)(\beta,\alpha)}{(\beta,\beta)},$$

$$\begin{aligned}\|\alpha\|^2\cdot\|\beta\|^2&=(\alpha,\alpha)\cdot(\beta,\beta)\geqslant(\alpha,\beta)(\beta,\alpha)=(\alpha,\beta)\overline{(\alpha,\beta)}\\&=|(\alpha,\beta)|^2.\end{aligned} \tag{3}$$

两边开方即得(1)式.

注 类似可证(1)式当且仅当 α 与 β 线性相关时成立等号.

1551. $\|k\alpha\|=|k|\cdot\|\alpha\|$，$\|\alpha+\beta\|\leqslant\|\alpha\|+\|\beta\|$.

1552. 任意一组线性无关的向量可以用施密特过程正交化，并扩大为 V 的一组标准正交基.

1553. 设 C^3 是欧氏空间，C^3 的一组基为

$$\alpha_1=(1,0,-i),\alpha_2=(0,1,0),\alpha_3=(2+i,0,1).$$

用施密特方法把它们变为一组标准正交基.

解 α_1,α_2 已经正交，故令 $\beta_1=\alpha_1,\beta_2=\alpha_2$.

取
$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$$
$$=(2+i,0,1)-\frac{2+2i}{2}(1,0,-i)=(1,0,i).$$

再单位化：

$$\gamma_1=\frac{1}{\|\beta_1\|}\beta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-i),$$

$$\gamma_2=\frac{1}{\|\beta_2\|}\beta_2=(0,1,0),$$

$$\gamma_3=\frac{1}{\|\beta_3\|}\beta_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,i).$$

则 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 即为所求.

1554. 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 为 n 维酉空间 V 的一组基，$\alpha=x_1\varepsilon_1+\cdots+x_n\varepsilon_n$，$\beta=y_1\varepsilon_1+\cdots+y_n\varepsilon_n$，内积定义为

$$(\alpha,\beta)=x_1\overline{y_1}+x_2\overline{y_2}+\cdots+x_n\overline{y_n},\tag{1}$$

则 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 为 V 的标准正交基$\Longleftrightarrow$对任意 $\alpha\in V$，有

$$\begin{cases}\alpha=(\alpha,\varepsilon_1)\varepsilon_1+\cdots+(\alpha,\varepsilon_n)\varepsilon_n, & (2)\\ \|\alpha\|^2=|(\alpha,\varepsilon_1)|^2+|(\alpha,\varepsilon_2)|^2+\cdots+|(\alpha,\varepsilon_n)|^2. & (3)\end{cases}$$

证　必要性　设

$$\alpha=k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+\cdots+k_n\varepsilon_n,\tag{4}$$

则

$$(\alpha,\varepsilon_m)=k_m(\varepsilon_m,\varepsilon_m)=k_m,m=1,2,\cdots,n.\tag{5}$$

将(5)代入(4)即得(2).

由(1)、(4)、(5)知

$$\|\alpha\|^2=k_1\overline{k}_1+k_2\overline{k}_2+\cdots+k_n\overline{k}_n$$
$$=|(\alpha,\varepsilon_1)|^2+\cdots+|(\alpha,\varepsilon_n)|^2.$$

充分性　由(2)知

$$\varepsilon_1=(\varepsilon_1,\varepsilon_1)\varepsilon_1+(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\varepsilon_2+\cdots+(\varepsilon_1,\varepsilon_n)\varepsilon_n,\tag{6}$$

由于 ε_1 的表示法唯一，由(6)式知

$$(\varepsilon_1,\varepsilon_1)=1,(\varepsilon_1,\varepsilon_i)=0\ (i\neq 1).$$

类似地可证 $(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$

因此，$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 为一组标准正交基.

注 实质上(2)就是 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 为标准正交基的充要条件.

1555. 什么叫做酉空间的正交补?

答 设 V_1,V_2 为酉空间 V 的两个子空间，满足

1) $V=V_1+V_2$;

2) $(\alpha,\beta)=0,\forall\ \alpha\in V_1,\forall\ \beta\in V_2$;

则称 V_2 为 V_1 的正交补，记为 $V_2=V_1^{\perp}$.

九、线性空间的同态与同构

1556. 什么叫做线性空间的同态与同构?

答 设 V,V' 是数域 P 上的两个线性空间，如果由 V 到 V' 有一个映射 σ，具有

1) $\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)$;

2) $\sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha)$,

其中 α,β 是 V 中任意向量，k 是 P 中任意数，则称 σ 为由 V 到 V' 的同态映射，而称 V 和 V' 同态，记作 $V\sim V'$.

如果 σ 是由 V 到 V' 的 1—1 的映上的映射(即双射)，那么称 σ 为同构映射，而称 V 和 V' 同构，记作 $V\cong V'$.

注 ① 如果 σ 是由 V 到 V 的同构映射，则称 V 有一个自同构.

② 如果 V,V' 都是 R 上两个欧氏空间，σ 是 V 到 V' 的双射，且满足条件 1)，2)及下面条件 3)，则称 σ 为 V 到 V' 的同构映射.

③ $(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=(\alpha,\beta)$.

1557. n 维线性空间 V 在取定一组基后，向量与它的坐标之间的对应就是由 V 到 P^n 的一个同构映射，因而 $V\cong P^n$，即数域 P

上的任意一个 n 维线性空间都与 P^n 同构.

1558. 同构映射有哪些基本性质?

答 设 σ 为 V 到 V' 的一个同构映射,则

1) $\sigma(0)=0,\sigma(-\alpha)=-\sigma(\alpha)$;

2) $\sigma(k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r)=k_1\sigma(\alpha_1)+\cdots+k_r\sigma(\alpha_r)$;

3) V 中向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性相关的充分必要条件是它们的象 $\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\cdots,\sigma(\alpha_r)$线性相关;

4) σ^{-1}是同构映射;

5) 数域 P 上两个有限维线性空间 V,V'同构的充分必要条件是它们有相同的维数;

6) 若 $\sigma_1:V\to V_1,\sigma_2:V_1\to V_2$ 都是同构映射,则 $\sigma_2\sigma_1:V\to V_2$ 也是同构映射,且$(\sigma_2\sigma_1)^{-1}=\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}$;

7) 同构的空间具有反身性、对称性与传递性,因而数域 P 上任意两个 n 维线性空间都同构.

1559. 设 V_1,V_2 都是数域 P 上的 n 维线性空间,试给出 V_1 到 V_2 的一个同构映射.

解 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 及 $\beta_1,\cdots\beta_n$ 分别是 V_1,V_2 的基,$\forall\ \alpha\in V_1,\alpha=k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n$,令 $\sigma(\alpha)=k_1\beta_1+\cdots+k_n\beta_n$,则$\forall\ \alpha,\beta\quad(\beta=l_1\alpha_1+\cdots+l_n\alpha_n)\in V_1,\forall\ k\in P$,有

$$\begin{aligned}\sigma(\alpha+\beta)&=\sigma((k_1+l_1)\alpha_1+\cdots+(k_n+l_n)\alpha_n)\\&=(k_1+l_1)\beta_1+\cdots+(k_n+l_n)\beta_n\\&=k_1\beta_1+\cdots+k_n\beta_n+l_1\beta_1+\cdots+l_n\beta_n\\&=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta),\end{aligned}$$

$$\sigma(k\alpha)=k(k_1\beta_1+\cdots+k_n\beta_n)=k\sigma(\alpha),$$

显然,σ 是 1—1 的映上的映射,所以 σ 为由 V_1 到 V_2 的一个同构映射.

1560. 设 V_1 为 R 上的由矩阵 A 的全体实系数多项式构成的线性空间,V_2 为 R 上的复数域构成的线性空间,其中

$A=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$. 证明：$V_1\cong V_2$.

证　只须证 $\dim V_1=\dim V_2$.

$\because A^2=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=-E, A^3=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}=-A$,

$A^4=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=E$, $\therefore A$ 的多项式 $f(A)$ 可由 A, A^2 线性表出.

设 $k_1A+k_2A^2=0$，即 $\begin{bmatrix}-k_2 & -k_1\\ k_1 & -k_2\end{bmatrix}=0$, $\therefore k_1=k_2=0$, A, A^2 线性无关，A, A^2 为 V_1 的一组基，因而 $\dim V_1=2$. $\because 1, i$ 为 V_2 的一组基，$\therefore \dim V_2=2$.

故 $\dim V_1=\dim V_2=2\Rightarrow V_1\cong V_2$.

1561.　设 V 是数域 P 上 n 维线性空间，$L(V)$ 为 V 上全体线性变换所成的线性空间，证明：$\dim(L(V))=n^2$.

证　取 V 的一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$，则 $\forall\ \sigma\in L(V)$, $\sigma(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)A$，其中 $A\in P^{n\times n}$，因此 $L(V)\cong p^{n\times n}$ 故

$$\dim L(V)=\dim P^{n\times n}=n^2.$$

1562.　设 V_1, V_2 是两个有限维的欧氏空间，则 $V_1\cong V_2\Longleftrightarrow \dim V_1=\dim V_2$.

1563.　设 V 与 V' 是两个 n 维欧氏空间，$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的一组基，σ 是 V 到 V' 作为线性空间的同构映射. 证明：σ 是欧氏空间 V 到 V' 的同构映射的充分必要条件是 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 与 $\sigma(\varepsilon_1),\cdots,\sigma(\varepsilon_n)$ 的度量矩阵相同.

证　先证必要性.　设 σ 是欧氏空间 V 到 V' 的同构映射，则 $\forall\ \alpha,\beta\in V$, $(\alpha,\beta)=(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))$，从而

$$(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=(\sigma(\varepsilon_i),\sigma(\varepsilon_j)),$$

即 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 与 $\sigma(\varepsilon_i),\cdots,\sigma(\varepsilon_n)$ 的度量矩阵相同.

再证充分性.　设 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 与 $\sigma(\varepsilon_i),\cdots,\sigma(\varepsilon_n)$ 的度量矩阵相

同，即$(\sigma(\varepsilon_i),\sigma(\varepsilon_j))=(\varepsilon_i,\varepsilon_j)$. 只证$\forall\ \alpha,\beta\in V$，有$((\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=(\alpha,\beta)$即可，事实上

$$\begin{aligned}(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))&=(\sigma(\sum_{i=1}^{n}a_i\varepsilon_i),\sigma(\sum_{i=1}^{n}b_i\varepsilon_i))\\&=(\sum_{i=1}^{n}a_i\sigma(\varepsilon_i),\sum_{i=1}^{n}b_i\sigma(\varepsilon_i))\\&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_ib_j(\sigma(\varepsilon_i),\sigma(\varepsilon_j))\\&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_ib_j(\varepsilon_i,\varepsilon_j)\\&=(\sum_{i=1}^{n}a_i\varepsilon_i,\sum_{i=1}^{n}b_i\varepsilon_i)=(\alpha,\beta).\end{aligned}$$

第二十章　线性变换

一、 定义

1564. 什么叫做线性映射与线性变换？

答 设 V 与 V' 是数域 P 上的两个线性空间，σ 是 V 到 V' 的映射，如果 σ 满足：

(1) $\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)$，$\forall \alpha,\beta\in V$；

(2) $\sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha)$，　$\forall \alpha\in V$，$\forall k\in P$，

则称 σ 是线性映射（或线性算子）. 特别地，V 到自身的线性映射称为线性变换，V 到基域 P 的线性映射称为线性函数.

注 条件(1)、(2)等价于下面的条件：

(3) $\sigma(k\alpha+l\beta)=k\sigma(\alpha)+l\sigma(\beta)$，$\forall \alpha,\beta\in V$，$\forall k,l\in P$.

1565. 是否存在 V 的一个变换 σ，既不满足条件(1)，又不满足条件(2)？

答 这样的变换是存在的. 比如，P 是数域，$V=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_i\in P\}$，令 $\sigma(x_1,x_2,x_3)=(x_1^2,0,0)$，显然 σ 是 V 的一个变换，它既不适合条件(1)，又不适合条件(2).

1566. 下列各变换 σ 是否是线性空间 $P[x]$ 及 $P[x]_n$ 的线性变换？

1) $\sigma(f(x))=x\cdot f(x)$；

2) $\sigma(f(x))=f(x)f'(x)$.

答 1) σ 是 $P[x]$ 的线性变换. σ 不是 $P[x]_n$ 的线性变换，因 $x^{n-1}\in P[x]_n$，但 $\sigma(x^{n-1})=x\cdot x^{n-1}=x^n\overline{\in} P[x]_n$.

2) σ 既不是 $P[x]$、也不是 $P[x]_n$ 的线性变换，因取 $f(x)=1$，

$g(x)=x$，但 $\sigma(f(x)+g(x))\neq\sigma(f(x))+\sigma(g(x))$.

二、 常见的线性变换

1567. 设 V 是数域 P 上的线性空间.

1) 规定 $\sigma(\alpha)=\alpha,\forall\ \alpha\in V$，则 σ 是线性变换，称为恒等变换，记为 I_V.

2) 规定 $\tau(\alpha)=0,\forall\ \alpha\in V$，则 τ 是线性变换，称为零变换，记为 0.

3) 规定 $\sigma_k(\alpha)=k\alpha,\forall\ \alpha\in V$，其中 $k\in P$ 为常数，则 σ_k 是线性变换，称为数乘变换.

注 当 $k=1$ 时，σ_k 就是恒等变换，当 $k=0$ 时，σ_k 就是零变换.

1568. 在 $P[x]$（或 $P[x]_n$）中微商

$$D[f(x)]=f'(x),\forall\ f(x)\in P[x]（或\ f(x)\in P[x]_n）$$

是一个线性变换.

1569. 在闭区间 $[a,b]$ 上全体连续函数记为 $C[a,b]$，它是实数域 R 上的线性空间. 积分

$$J(f(x))=\int_a^x f(t)dt,\forall\ f(x)\in C[a,b]$$

是 $C[a,b]$ 上一个线性变换.

1570. 下面所定义的变换，哪些是线性的，哪些不是？

1) 在线性空间 V 中，$\sigma(\xi)=\xi+\alpha$，其中 $\alpha\in V$ 是一固定的向量；

2) 在线性空间 V 中，$\sigma(\xi)=\alpha$，其中 $\alpha\in V$ 是一固定的向量；

3) 在 P^3 中，$\sigma(x_1,x_2,x_3)=(2x_1-x_2,x_2+x_3,x_1)$；

4) 在 $P[x]$ 中，$\sigma(f(x))=f(x+1)$；

5) 把复数域 C 看作复数域上的线性空间，$\sigma(\xi)=\bar{\xi}$；

6) 在 $P^{n\times n}$ 中，$\sigma(A)=A'$；

7) 在 $P^{n\times n}$ 中，$\sigma(X)=BXC$，其中 $B,C\in P^{n\times n}$ 是两个固定的矩

阵；

8）在 R^2 中

$$\sigma\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix};$$

9）在 P^n 中，取 $a_1,\cdots,a_n\in P$，

$$\sigma(x_1,\cdots,x_n)=a_1x_1+\cdots+a_nx_n.$$

答 1）当 $\alpha=0$ 时，α 是恒等变换. 当 $\alpha\neq0$ 时，$\sigma(0)=\alpha\neq0$，σ 不是线性变换.

2）当 $\alpha=0$ 时，σ 是零变换. 当 $\alpha\neq0$ 时，$\sigma(0)=\alpha\neq0$，σ 不是线性变换.

3）是.

4）是.

5）不是. 比如，取 $\alpha=1,k=i$，则 $\sigma(k\alpha)=-i$，$k\sigma(\alpha)=i$. 所以 $\sigma(k\alpha)\neq k\sigma(\alpha)$.

6）是. 7）是. 8）是. 9）是.

1571. 设 V 是数域 P 上一维线性空间，则 σ 是 V 的线性变换的充要条件是：$\forall\ \alpha\in V$，都有 $\sigma(\alpha)=c\alpha$，其中 c 是 P 中的一个定数.

证 取 V 的一组基 ξ，则 $V=L(\xi)$.

必要性 设 σ 是 V 的线性变换，$\sigma(\xi)\in V$，令 $\sigma(\xi)=c\xi$，则 $\forall\ \alpha\in V$，$\alpha=k\xi$，$\sigma(\alpha)=\sigma(k\xi)=k\sigma(\xi)=kc\xi=ck\xi=c\alpha$.

充分性 $\forall\ \alpha,\beta\in V$，$\forall\ k,l\in P$，由假设有

$$\sigma(k\alpha+l\beta)=c(k\alpha+l\beta)=kc\alpha+lc\beta=k\sigma(\alpha)+l\sigma(\beta),$$

所以 σ 是 V 的线性变换.

1572. 在线性空间 $P^{n\times n}$ 中，规定

$$\sigma(X)=AX-XB,X\in P^{n\times n},$$

其中 $A,B\in P^{n\times n}$ 为两个已知 n 阶矩阵. σ 是不是 $P^{n\times n}$ 的线性变换？

答 易证 σ 是 $P^{n\times n}$ 的线性变换.

1573.　设 σ 是线性空间 V 的线性变换，则

1) $\sigma(0)=0$；

2) $\sigma(a_1\xi_1+\cdots+a_n\xi_n)=a_1\sigma(\xi_1)+\cdots+a_n\sigma(\xi_n)$；

3) 当 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 线性相关，$\sigma(\xi_1),\cdots,\sigma(\xi_n)$线性相关.

三、　运算

1574.　设 σ_1,σ_2 是线性空间 V 上的两个线性变换.

1) 规定$(\sigma_1+\sigma_2)(\alpha)=\sigma_1(\alpha)+\sigma_2(\alpha)$，$\forall\ \alpha\in V$，则 $\sigma_1+\sigma_2$ 是 V 的线性变换，称其为 σ_1 与 σ_2 之和；

2) 规定$(\sigma_1\sigma_2)(\alpha)=\sigma_1(\sigma_2(\alpha))$，$\forall\ \alpha\in V$，则 $\sigma_1\sigma_2$ 是 V 的线性变换，称其为 σ_1 与 σ_2 之积；

3) 设 $k\in P$，规定$(k\sigma)(\alpha)=k(\sigma(\alpha))$，$\forall\ \alpha\in V$，则 $k\sigma$ 是 V 的线性变换，称其为数 k 与 σ 之积.

1575.　设 $L(V)$为线性空间 V 上全体线性变换，则 $L(V)$关于加法满足：

1) 封闭性：$\sigma_1,\sigma_2\in L(V)$，则 $\sigma_1+\sigma_2\in L(V)$；

2) 结合律：$(\sigma_1+\sigma_2)+\sigma_3=\sigma_1+(\sigma_2+\sigma_3)$，其中 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\in L(V)$；

3) 存在零变换 $0\in L(V)$，使

$$0+\sigma=\sigma,\ \forall\ \sigma\in L(V);$$

4) 存在负变换：$\forall\ \sigma\in L(V)$，规定$(-\sigma)(\alpha)=-(\sigma(\alpha))$，$\forall\ \alpha\in V$，则

$$(-\sigma)+\sigma=0;$$

5) 交换律：$\sigma_1+\sigma_2=\sigma_2+\sigma_1$，$\forall\ \sigma_1,\sigma_2\in L(V)$.

注　$L(V)$关于加法构成加群.

1576.　$L(V)$关于加法与乘法满足：

1) $L(V)$是加群；

2) 结合律：$(\sigma_1\sigma_2)\sigma_3=\sigma_1(\sigma_2\sigma_3)$，其中 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\in L(V)$；

3) 两种分配律：$\forall\ \sigma,\tau_1,\tau_2\in L(V)$，则

$$\sigma(\tau_1+\tau_2)=\sigma\tau_1+\sigma\tau_2;$$

$$(\tau_1+\tau_2)\sigma=\tau_1\sigma+\tau_2\sigma;$$

4) 存在单位元 I_V，对任意 $\sigma\in L(V)$，使

$$I_V\sigma=\sigma=\sigma I_V.$$

注 $L(V)$关于加法与乘法运算构成有单位元的环.

1577. $L(V)$关于乘法是否满足交换律？

答 一般不满足交换律. 比如，$V=R^2$. $\sigma(x,y)=(-y,x)$，$\tau(x,y)=(-x,y)$，则 $\sigma,\tau\in L(R^2)$. 取$(1,2)\in R^2$，$\tau\sigma(1,2)=\tau(-2,1)=(2,1)$，$\sigma\tau(1,2)=\sigma(-1,2)=(-2,-1)$，所以 $\tau\sigma\neq\sigma\tau$.

1578. $\sigma,\tau\in L(V)$，当 $\sigma\neq0,\tau\neq0$ 时，是否 $\sigma\tau\neq0$?

答 不一定. 比如在 R^2 中，

$$\sigma(x,y)=(x,0),\tau(x,y)=(0,y)$$

显然 $\sigma\neq0,\tau\neq0$，但

$$\sigma\tau(x,y)=\sigma(0,y)=(0,0),\forall\ (x,y)\in R^2,$$

即 $\sigma\tau=0$.

1579. $L(V)$关于数乘与加法满足：

1) $L(V)$关于加法是加群；

2) $(kl)\sigma=k(l\sigma),\forall\ \sigma\in L(V)$；

3) $(k+l)\sigma=k\sigma+l\sigma,\forall\ \sigma\in L(V),\forall\ k,l\in P$；

4) $k(\sigma+\tau)=k\sigma+k\tau,\forall\ \sigma,\tau\in L(V),\forall\ k\in P$；

5) $1\cdot\sigma=\sigma,\forall\ \sigma\in L(V)$.

注 $L(V)$关于数乘与加法是数域 P 上的线性空间.

1580. 什么叫做可逆线性变换？

答 设 $\sigma\in L(V)$，若存在 $\tau\in L(V)$，使得

$$\sigma\tau=\tau\sigma=I_V, \tag{1}$$

则称 σ 是可逆的，并称 τ 为 σ 的逆变换.

注 ① 可以证明满足(1)式的 τ 是唯一的，故记 $\tau=\sigma^{-1}$.

② σ 与 τ 互为逆变换.

1581. $\sigma\in L(V)$,规定

$$\sigma_n=\begin{cases} I_V, & \text{当 } n=0 \text{ 时};\\ \underbrace{\sigma\cdots\sigma}_{n\text{个}} & \text{当 } n \text{ 为自然数时}. \end{cases}$$

当 σ 可逆时,规定

$$\sigma^{-n}=(\sigma^{-1})^n,\text{其中 } n \text{ 为自然数}.$$

1582. 设 $\sigma\in L(V)$,则 $\sigma^n\cdot\sigma^m=\sigma^{n+m}$,$(\sigma^n)^m=\sigma^{nm}$,$n,m$ 是非负整数.

1583. 什么叫线性变换的多项式?

答 $\sigma\in L(V)$,$f(x)=a_mx^m+\cdots+a_1x+a_0$,规定

$$f(\sigma)=a_m\sigma^m+\cdots+a_1\sigma+a_0I_V,$$

称 $f(\sigma)$ 为线性变换 σ 的多项式.

1584. 若 $f(x),g(x)\in P[x]$,令

$$h(x)=f(x)+g(x),\ p(x)=f(x)g(x),$$

则

$$h(\sigma)=f(\sigma)+g(\sigma)=g(\sigma)+f(\sigma);$$

$$p(\sigma)=f(\sigma)g(\sigma)=g(\sigma)f(\sigma).$$

1585. 在 $V=R^3$ 中,取正交坐标系 O_{xyz},以 σ 表绕 Ox 轴由 Oy 轴向 Oz 轴方向旋转 90°的变换,以 τ 表绕 Oy 轴由 Oz 轴向 Ox 轴方向旋转 90°的变换,以 ω 表绕 Oz 轴由 Ox 轴向 Oy 轴方向旋转 90°的变换,则 $\sigma^4=\tau^4=\omega^4=I_V$,$\sigma\tau\neq\tau\sigma$,$\sigma^2\tau^2=\tau^2\sigma^2$,并验证 $(\sigma\tau)^2=\sigma^2\tau^2$ 是否成立.

解 $\forall\ \alpha=(x,y,z)\in R^3$,因为 $\sigma(\alpha)=(x,-z,y)$,$\sigma^2(\alpha)=(x,-y,-z)$,$\sigma^3(\alpha)=(x,z,-y)$,$\sigma^4(\alpha)=\alpha$,所以 $\sigma^4=I_V$.

$$\tau(\alpha)=(z,y,-x),\ \omega(\alpha)=(-y,x,z),$$

从而类似可证 $\tau^4=\omega^4=I_V$.

令 $\beta=(1,2,3)$.

因为$(\sigma\tau)(\beta)=(3,1,2)$，$(\tau\sigma)(\beta)=(2,-3,-1)$.
所以$\sigma\tau\neq\tau\sigma$.

因为$(\sigma^2\tau^2)(\alpha)=(-x,-y,z)=(\tau^2\sigma^2)(\alpha)$，所以$\sigma^2\tau^2=\tau^2\sigma^2$.

因为$(\sigma\tau)^2(\beta)=(2,3,1)$，$(\sigma^2\tau^2)(\beta)=(-1,-2,3)$，所以$(\sigma\tau)^2\neq\sigma^2\tau^2$.

1586.　在$V=P[x]$中，设$\sigma(f(x))=f'(x)$，$\tau(f(x))=xf(x)$，则$\sigma\tau-\tau\sigma=I_V$.

证　任取$f(x)\in V$，则

$$\begin{aligned}(\sigma\tau-\tau\sigma)(f(x))&=(\sigma\tau)(f(x))-(\tau\sigma)(f(x))\\&=\sigma(xf(x))-\tau(f'(x))\\&=f(x)+xf'(x)-xf'(x)\\&=f(x)=I_V(f(x)).\end{aligned}$$

1587.　设σ,τ是V的两个线性变换，如果$\sigma\tau-\tau\sigma=I_V$，那么$\sigma^k\tau-\tau\sigma^k=k\sigma^{k-1}$，$k\geqslant1$.

证　可用数学归纳法证得.

1588.　设σ,τ是幂等线性变换，即$\sigma^2=\sigma$，$\tau^2=\tau$，则

1) $(\sigma+\tau)^2=\sigma+\tau\Longleftrightarrow\sigma\tau+\tau\sigma=0$；

2) $(\sigma+\tau)^2=\sigma+\tau\Longleftrightarrow\sigma\tau=0$和$\tau\sigma=0$；

3) 当$\sigma\tau=\tau\sigma$时，$(\sigma+\tau-\sigma\tau)^2=\sigma+\tau-\sigma\tau$.

证　1) 因为

$$\begin{aligned}(\sigma+\tau)^2&=(\sigma+\tau)(\sigma+\tau)=\sigma^2+\sigma\tau+\tau\sigma+\tau^2\\&=\sigma+\tau+(\sigma\tau+\tau\sigma),\end{aligned}\tag{1}$$

所以
$$(\sigma+\tau)^2=\sigma+\tau\Longleftrightarrow\sigma\tau+\tau\sigma=0.$$

2) 由(1)式知

$$\sigma\tau=-\tau\sigma\tag{2}$$

(2)式两边右乘$\sigma\tau$得$\sigma\tau\sigma\tau=-\tau\sigma\sigma\tau$. 所以$\sigma(-\sigma\tau)\tau=-(-\sigma\tau)\tau$，$-\sigma\tau=\sigma\tau$，故$\sigma\tau=0$. 又由(2)得$\tau\sigma=0$. 反之是显然的.

3) 易证.

1589. 可逆变换是双射.

证 由第 **1604** 条可得.

四、 线性变换的矩阵

1590. 设 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 为 n 维线性空间 V 的一组基,σ,τ 是 V 的线性变换,则 $\sigma=\tau$ 的充要条件是:

$$\sigma(\varepsilon_i)=\tau(\varepsilon_i),i=1,2,\cdots,n.$$

1591. 设 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 为 n 维线性空间 V 的一组基,$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是 V 中任意 n 个向量,则存在唯一的线性变换 σ,使 $\sigma(\varepsilon_i)=\alpha_i,i=1,2,\cdots,n$.

1592. 什么叫线性变换在基下的矩阵?

答 设 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 为数域 P 上 n 维线性空间 V 的一组基,σ 是 V 的线性变换,且

$$\begin{cases}\sigma(\varepsilon_1)=a_{11}\varepsilon_1+\cdots+a_{n1}\varepsilon_n,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \sigma(\varepsilon_n)=a_{1n}\varepsilon_1+\cdots+a_{nn}\varepsilon_n,\end{cases}\tag{1}$$

则称 $A=(a_{ij})_{n\times n}$是 σ 在基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 下的矩阵.

注 ① (1)式可简写为

$$\sigma(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)A.\tag{2}$$

② 由(2)可知每个线性变换都对应一个 n 阶矩阵,再由第 **1591** 条知,在取定一组基后,$L(V)$与 $P^{n\times n}$是一一对应的.

③ 同一个线性变换对不同基而言,对应的矩阵是不同的.

1593. 设 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 是数域 P 上 n 维线性空间 V 的一组基,σ,τ 是 V 的线性变换.若

$$\sigma(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)A,\tau(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)B,$$

则

1) $(\sigma+\tau)(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)(A+B)$;

2) $(\sigma\tau)(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)(AB)$;

3) $(k\sigma)(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)(kA), k\in P$;

4) 当 σ 可逆时，$\sigma^{-1}(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)A^{-1}$;

5) $I_V(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)E$;

6) $0(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)0$.

1594. 设 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 和 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是数域 P 上 n 维线性空间 V 的两组基，σ 是 V 的线性变换，如果

$$\sigma(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)A,$$
$$\sigma(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)B,$$
$$(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)T,$$

那么

1) $B=T^{-1}AT$;

2) 当 $\xi=k_1\varepsilon_1+\cdots+k_n\varepsilon_n, k_i\in P$ 时，

$$\sigma(\xi)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)A\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix}.$$

1595. 在 P^3 中求下列各线性变换在所指定基下的矩阵.

1) σ 在基 $\eta_1=(-1,1,1),\eta_2=(1,0,-1),\eta_3=(0,1,1)$ 下的矩阵是 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\-1&2&0\end{pmatrix}$，求 σ 在基 $\varepsilon_1=(1,0,0),\varepsilon_2=(0,1,0),\varepsilon_3=(0,0,1)$ 下的矩阵；

2) $\sigma(\eta_1)=(-5,0,3),\sigma(\eta_2)=(0,-1,6),\sigma(\eta_3)=(-5,-1,9)$，其中 $\eta_1=(-1,0,2),\eta_2=(0,1,1),\eta_3=(3,-1,0)$ 是 P^3 的一组基，且 $\varepsilon_1=(1,0,0),\varepsilon_2=(0,1,0),\varepsilon_3=(0,0,1)$，求 σ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵.

解 1) 由于 $\sigma(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\-1&2&0\end{pmatrix}$,

$$(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{bmatrix}-1&1&0\\1&0&1\\1&-1&1\end{bmatrix},$$

故

$$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)\begin{bmatrix}-1&1&-1\\0&1&-1\\1&0&1\end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}&\sigma(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\\&=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{bmatrix}-1&1&0\\1&0&1\\1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\-1&2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1&-1\\0&1&-1\\1&0&1\end{bmatrix}\\&=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{bmatrix}-1&1&-2\\2&2&0\\3&0&2\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

2) 因为 $\sigma(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{bmatrix}-5&0&-5\\0&-1&-1\\3&6&9\end{bmatrix}$，

但

$$(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{bmatrix}-1&0&3\\0&1&-1\\2&1&0\end{bmatrix},$$

所以

$$\sigma(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=\sigma(\eta_1,\eta_2,\eta_3)\begin{bmatrix}-1&0&3\\0&1&-1\\2&1&0\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{bmatrix}-5 & 0 & -5\\ 0 & -1 & -1\\ 3 & 6 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{3}{7}\\ \frac{2}{7} & \frac{6}{7} & \frac{1}{7}\\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7}\end{bmatrix}$$

$$=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\cdot\frac{1}{7}\begin{bmatrix}-5 & 20 & -20\\ -4 & -5 & -2\\ 27 & 18 & 24\end{bmatrix}.$$

1596. 求下列各线性变换在所指定基下的矩阵：

1) $[0,\varepsilon_1,\varepsilon_2]$是平面上一直角坐标系，$\sigma$ 是平面上的向量对第一和第三象限分角线的垂直投影，τ 是平面上的向量对 ε_2 的垂直投影，求 σ,τ 和 $\sigma\tau$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 下的矩阵；

2) 在 $P[x]_n$ 中，设变换 σ 为 $\sigma(f(x))=f(x+1)-f(x)$，求 σ 在基 $\varepsilon_0=1,\varepsilon_i=\dfrac{x(x-1)\cdots(x-i+1)}{i!}(i=1,2,\cdots,n-1)$下的矩阵；

3) 六个函数 $\varepsilon_1=e^{ax}\cos bx,\varepsilon_2=e^{ax}\sin bx,\varepsilon_3=xe^{ax}\cos bx,\varepsilon_4=xe^{ax}\sin bx,\varepsilon_5=\dfrac{1}{2}x^2e^{ax}\cos bx,\varepsilon_6=\dfrac{1}{2}x^2e^{ax}\sin bx$ 的所有实系数线性组合构成实数域上一个六维线性空间，求微分变换 σ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_6$ 下的矩阵.

解　1) 因 $\sigma(\varepsilon_1)=\sigma(\varepsilon_2)=\dfrac{1}{2}\varepsilon_1+\dfrac{1}{2}\varepsilon_2$，故 σ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 下的矩阵为 $A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$.

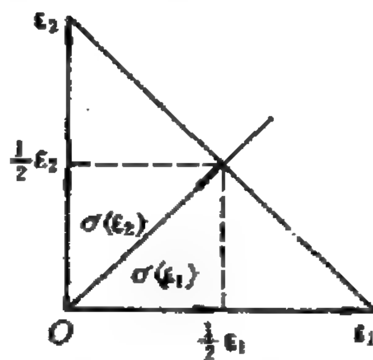


图 20-1

又 $\tau(\varepsilon_1)=0=0\varepsilon_1+0\varepsilon_2$，

$\tau(\varepsilon_2)=\varepsilon_2=0\varepsilon_1+1\cdot\varepsilon_2$，

故 τ 在 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 下的矩阵为 $B=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$.

因此 $\sigma\tau$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 下的矩阵是 $AB=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2}\\0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$

2) $\sigma(\varepsilon_0)=0$,

$\sigma(\varepsilon_1)=\sigma(x)=(x+1)-x=1=\varepsilon_0$,

$\sigma(\varepsilon_3)=\sigma(\frac{x(x-1)}{2!})=x=\varepsilon_1$,

……………………………

$\sigma(\varepsilon_i)=\sigma(\frac{x(x-1)\cdots(x-i+1)}{i!})=\varepsilon_{i-1}$,

……………………………

$\sigma(\varepsilon_{n-1})=\varepsilon_{n-2}$,

故 σ 在基 $\varepsilon_0,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{n-1}$ 下的矩阵是

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}.$$

3) $\sigma(\varepsilon_1)=a\varepsilon_1-b\varepsilon_2$, $\sigma(\varepsilon_2)=b\varepsilon_1+a\varepsilon_2$, $\sigma(\varepsilon_3)=\varepsilon_1+a\varepsilon_3-b\varepsilon_4$, $\sigma(\varepsilon_4)=\varepsilon_2+b\varepsilon_3+a\varepsilon_4$, $\sigma(\varepsilon_5)=\varepsilon_3+a\varepsilon_5-b\varepsilon_6$, $\sigma(\varepsilon_6)=\varepsilon_4+b\varepsilon_5+a\varepsilon_6$, 故 σ 在基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_6$ 下的矩阵是

$$\begin{bmatrix}a & b & 1 & 0 & 0 & 0\\-b & a & 0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & a & b & 1 & 0\\0 & 0 & -b & a & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & a & b\\0 & 0 & 0 & 0 & -b & a\end{bmatrix}.$$

1597. 全体 2×2 有理矩阵构成有理数域上一个线性空间 V，取一固定的有理矩阵 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，在 V 中定义

$$\sigma: X \longrightarrow AX-XA, \forall X\in V,$$

则

1) σ 是线性变换；

2) 在 V 中取一个基，写出 σ 在这基下的矩阵；

3) σ 一定以 0 作为一个特征根；

4) 试讨论特征根 0 的重数对于 a,b,c,d 的依赖关系.

解 1) 由第 **1572** 条知.

2) 易知 $E_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_2=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_3=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$,
$E_4=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 是 V 的一个基.

$$\sigma E_1 = AE_1-E_1A=\begin{bmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{bmatrix}=(E_1,E_2,E_3,E_4)\begin{bmatrix} 0 \\ -b \\ c \\ 0 \end{bmatrix},$$

易求出 $\sigma E_2, \sigma E_3, \sigma E_4$. σ 在此基下的矩阵是

$$A=\begin{bmatrix} 0 & -c & b & 0 \\ -b & a-d & 0 & b \\ c & 0 & d-a & -c \\ 0 & c & -b & 0 \end{bmatrix}.$$

3) 因为 $|A|=0$，所以 0 是 $|xE-A|=0$ 的根，从而 0 是 σ 的一个特征根.

4) 因为 $g(x)=|xE-A|=x^2[x^2-(a-d)^2-4bc]$，所以当 $(a-d)^2+4bc\neq 0$ 时，特征根 0 的重数为 2；当 $(a-d)^2+4bc=0$ 时，特征根 0 的重数为 4.

1598. 设 $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$,则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 R^3 的一组基.将 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 改造为正交基 e_1,e_2,e_3.设线性变换 σ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下矩阵为 $\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$,求 σ 在基 e_1,e_2,e_3 下的矩阵.

解 因为由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 作成的 3 阶行列式不等于 0,所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关,从而是 R^3 的一组基.

将 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 变为正交基:

$$e_1=\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},$$

$$e_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,e_1)}{(e_1,e_1)}e_1=-2\alpha_1+\alpha_2,$$

$$e_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,e_1)}{(e_1,e_1)}e_1-\frac{(\alpha_3,e_2)}{(e_2,e_2)}e_2=-\frac{4}{3}\alpha_1+\frac{1}{2}\alpha_2+\alpha_3.$$

因为

$$(e_1,e_2,e_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1&-2&-\frac{4}{3}\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&1\end{bmatrix},$$

所以 σ 在基 e_1,e_2,e_3 下的矩阵为

$$\begin{bmatrix}1&-2&-\frac{4}{3}\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2&-\frac{4}{3}\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&2&1\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

1599. 在数域 P 上 n 阶矩阵所成的线性空间 V 中取定方阵 A,B,C,D，则 $\sigma(X)=AXB+CX+XD$ 是 V 的线性变换，并且当 $C=D=0$ 时，σ 可逆$\Longleftrightarrow|AB|\neq0$.

证 $\forall\ k,l\in P,\forall\ X,Y\in V$，因为

$$\sigma(kX+lY)=A(kX+lY)B+C(kX+lY)+(kX+lY)D$$
$$=k\sigma(X)+l\sigma(Y),$$

$\therefore\sigma$ 是线性变换.

当 $C=D=0$ 时，$\sigma(X)=AXB$.

充分性　当 $|AB|\neq0$ 时，A,B 可逆，令 $\tau(X)=A^{-1}XB^{-1}$，则 $\sigma\tau=\tau\sigma=I_V$. $\therefore\sigma$ 可逆.

必要性　设 σ 可逆，则 $\sigma\sigma^{-1}=\sigma^{-1}\sigma=I_V$. 取 $E\in V,E=\sigma\sigma^{-1}(E)=A\sigma^{-1}(E)B$，两边取行列式知 $|A|\neq0,|B|\neq0,\therefore|AB|\neq0$.

1600. 在 $P^{2\times2}$ 中定义三个线性变换如下：

$$\sigma_1(X)=AX,\ \sigma_2(X)=XA,\ \sigma_3(X)=AXA,\ \forall\ X\in P^{2\times2},$$

其中 $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\in P^{2\times2}$. 设 $E_{11}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$，$E_{12}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$，$E_{21}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$，$E_{22}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$.

1) 分别求 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ 在 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 下的矩阵；

2) 求 $\sigma_1-2\sigma_2$ 在 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 下的矩阵；

3) 求 σ_1^2 在 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 下的矩阵.

解 1) 因为

$$\sigma_1(E_{11})=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&0\\c&0\end{bmatrix}=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})\begin{bmatrix}a\\0\\c\\0\end{bmatrix},$$

$$\sigma_1(E_{12})=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})\begin{bmatrix} 0 \\ a \\ 0 \\ c \end{bmatrix},$$

$$\sigma_1(E_{21})=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})\begin{bmatrix} b \\ 0 \\ d \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\sigma_1(E_{22})=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})\begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 0 \\ d \end{bmatrix},$$

所以

$$\sigma_1(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})\begin{bmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & d & 0 & d \end{bmatrix}.$$

类似地，

$$\sigma_2(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})=\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix},$$

$$\sigma_3(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})\begin{bmatrix} a^2 & ac & ab & bc \\ ab & ad & b^2 & bd \\ ac & c^2 & ad & cd \\ bc & cd & bd & d^2 \end{bmatrix}.$$

2) $(\sigma_1-2\sigma_2)(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})$

$$=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})\begin{bmatrix}-a & -2b & b & 0\\ -2c & a-2d & 0 & b\\ c & 0 & d-2a & -2b\\ 0 & c & -2c & -d\end{bmatrix}.$$

3) σ_1^2 在 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 下的矩阵为

$$\begin{bmatrix}a & 0 & b & 0\\ 0 & a & 0 & b\\ c & 0 & d & 0\\ 0 & c & 0 & d\end{bmatrix}^2.$$

1601. 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 是数域 P 上三维线性空间 V 的一组基，

$$\sigma(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{31} & a_{33}\end{bmatrix},\qquad(1)$$

求

1) σ 在基 $\varepsilon_3,\varepsilon_2,\varepsilon_1$ 下的矩阵 A；

2) σ 在基 $\varepsilon_1,k\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵 $B,k(\neq0)\in P$；

3) σ 在基 $\varepsilon_1+\varepsilon_2,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵 C.

解　由(1)式知

$$\sigma(\varepsilon_3)=(\varepsilon_3,\varepsilon_2,\varepsilon_1)\begin{bmatrix}a_{33}\\ a_{23}\\ a_{13}\end{bmatrix},$$

$$\sigma(\varepsilon_2)=(\varepsilon_3,\varepsilon_2,\varepsilon_1)\begin{bmatrix}a_{32}\\ a_{22}\\ a_{12}\end{bmatrix},$$

$$\sigma(\varepsilon_1)=(\varepsilon_3,\varepsilon_2,\varepsilon_1)\begin{bmatrix}a_{31}\\ a_{21}\\ a_{11}\end{bmatrix},$$

所以
$$A=\begin{bmatrix} a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{13} & a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}.$$

2)
$$B=\begin{bmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13} \\ \dfrac{a_{21}}{k} & a_{22} & \dfrac{a_{23}}{k} \\ a_{31} & ka_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

3) $\because \sigma(\varepsilon_1+\varepsilon_2)=(\varepsilon_1+\varepsilon_2,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{bmatrix} a_{11}+a_{12} \\ a_{21}+a_{22}-a_{11}-a_{12} \\ a_{31}+a_{32} \end{bmatrix}$,

$$\sigma(\varepsilon_2)=(\varepsilon_1+\varepsilon_2,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22}-a_{12} \\ a_{32} \end{bmatrix},$$

$$\sigma(\varepsilon_3)=(\varepsilon_1+\varepsilon_2,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23}-a_{13} \\ a_{33} \end{bmatrix},$$

$\therefore$
$$C=\begin{bmatrix} a_{11}+a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+a_{22}-a_{11}-a_{12} & a_{22}-a_{12} & a_{23}-a_{13} \\ a_{31}+a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

1602. 设 σ 是数域 P 上线性空间 V 的线性变换，$\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in V$ 且线性无关，那么 σ 是单射 $\Longleftrightarrow \sigma(\alpha_1),\cdots,\sigma(\alpha_n)$ 线性无关.

证 必要性 令 $k_1\sigma(\alpha_1)+\cdots+k_n\sigma(\alpha_n)=0$，$k_i\in P$，则 $\sigma(k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n)=0$. 由于 σ 是单射，$\therefore k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n=0$. 由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性无关知 $k_1=\cdots=k_n=0$.

充分性 $\forall\ \alpha,\beta\in V$，若 $\sigma(\alpha)=\sigma(\beta)$，设 $\alpha_1=x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n$，$\beta=y_1\alpha_1+\cdots+y_n\alpha_n$，$x_i,y_i\in P$，则 $\sigma(\alpha)=x_1\sigma(\alpha_1)+\cdots+x_n\sigma(x_n)$，$\sigma(\beta)=y_1\sigma(\alpha_1)+\cdots+y_n\sigma(\alpha_n)$. $\because \sigma(\alpha_1),\cdots,\sigma(\alpha_n)$ 线性无关，$\therefore x_i=y_i$，$i=1,2,\cdots,n$. 因此 $\alpha=\beta$. 从而 σ 是单射.

1603. 设 $g(x)=ax^2+bx+c\in P[x]$，σ 是 $P[x]$ 的微分变

换，$f(t)=t^2+2t-5$，求 $f(\sigma)(g(x))$.

解 因为 $f(\sigma)=\sigma^2+2\sigma-5I_{P[x]}$，所以

$$f(\sigma)(g(x))=\sigma^2(g(x))+2\sigma(g(x))-5g(x)$$
$$=-5ax^2+(4a-5b)x+(2a+2b-5c).$$

1604. 设 σ 是 n 维线性空间 V 的线性变换，则下面的三个条件等价：

1) σ 是可逆的；2) σ 是单射；3) σ 是满射.

证 1)⇒2). 第 **1589** 条已证.

2)⇒3). 取 V 的一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$，由于 σ 是单射，因而知 $\sigma(\alpha_1),\cdots,\sigma(\alpha_n)$ 也是 V 的一组基. $\forall\ \alpha\in V$，

$$\alpha=k_1\sigma(\alpha_1)+\cdots+k_n\sigma(\alpha_n)=\sigma(k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n)=\sigma(\beta),$$

其中 $\beta\in V$，故 σ 是满射.

3)⇒1). 取定 V 的一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$，则存在 $\beta_i\in V$，使得 $\sigma(\beta_i)=\alpha_i, i=1,2,\cdots,n$. 由于 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，可证 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 也线性无关，并为 V 的一组基.

$\forall\ \alpha=k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n\in V$，定义

$$\tau(\alpha)=k_1\beta_1+\cdots+k_n\beta_n，且\ \tau(\alpha_i)=\beta_i, i=1,2,\cdots,n.$$

$\forall\ \gamma\in V$，$\gamma=l_1\beta_1+\cdots+l_n\beta_n=s_1\alpha_1+\cdots+s_n\alpha_n$，

$$(\tau\sigma)(\gamma)=\tau(l_1\sigma(\beta_1))+\cdots+\tau(l_n\sigma(\beta_n))=\tau(l_1\alpha_1)+\cdots+\tau(l_n\alpha_n)$$
$$=l_1\beta_1+\cdots+l_n\beta_n=\gamma,$$

即 $\tau\sigma=I_V$. 同理可证 $\sigma\tau=I_V$. 所以 σ 可逆.

注 在无限维线性空间中，结论不成立. 例如在 $P[x]$ 中，定义 $\sigma(f(x))=xf(x)$，$\tau(f(x))=f'(x)$. σ 是单射，但不是满射，因为 1 无原象；τ 是满射，但不是单射.

1605. 设 C 为复数域，σ 为线性空间 C^n 上的任一线性变换，S_1,S_2 为 C^n 的任意两个子空间，$\sigma(S_1\cap S_2)=\sigma(S_1)\cap\sigma(S_2)$？

答 $\forall\ \alpha\in\sigma(S_1\cap S_2)$，则存在 $\beta\in S_1\cap S_2$，使得 $\alpha=\sigma(\beta)$. 因 $\beta\in S_1$，$\beta\in S_2$，故 $\sigma(\beta)\in\sigma(S_1)$，$\sigma(\beta)\in\sigma(S_2)$，$\sigma(\beta)\in\sigma(S_1)\cap\sigma(S_2)$，

即 $\alpha\in\sigma(S_1)\cap\sigma(S_2)$. 从而 $\sigma(S_1\cap S_2)\subseteq\sigma(S_1)\cap\sigma(S_2)$.

但没有反包含. 如在 C^3 中,令

$$S_1=\{(a,0,a)\mid a\in C\},S_2=\{(0,b,0)\mid b\in C\},$$

易知 S_1 和 S_2 均为 C^3 的子空间,且 $S_1\cap S_2=\{0\}$. 规定

$\sigma:(x_1,x_2,x_3)\longrightarrow(0,x_1+x_2+x_3,0)$,则 σ 是 C^3 的一个线性变换.

因为

$\sigma(S_1\cap S_2)=\{0\},\sigma(S_1)=\sigma(S_2)=S_2$,所以

$$\sigma(S_1)\cap\sigma(S_2)\neq\sigma(S_1\cap S_2).$$

1606. 设 σ 是数域 P 上线性空间 V 的线性变换,若 $\sigma^{k-1}(\alpha)\neq0$,但 $\sigma^k(\alpha)=0,\alpha\in V$,那么 $\alpha,\sigma(\alpha),\cdots,\sigma^{k-1}(\alpha)$线性无关,$k$ 为自然数.

证 用反证法. 设 $\alpha,\sigma(\alpha),\cdots,\sigma^{k-1}(\alpha)$线性相关,则存在不全为零的数 $l_0,l_1,\cdots,l_{k-1}\in P$,使得

$$l_0\alpha+l_1\sigma(\alpha)+\cdots+l_{k-1}\sigma^{k-1}(\alpha)=0.$$

设 l_i 是第一个不等于零的系数,即 $l_0=l_1=\cdots=l_{i-1}=0,l_i\neq0$,则 $l_i\sigma^i(\alpha)+l_{i+1}\sigma^{i+1}(\alpha)+\cdots+l_{k-1}\sigma^{k-1}(\alpha)=0$. 两边施以 σ^{k-i-1},得 $l_i\sigma^{k-1}(\alpha)+l_{i+1}\sigma^k(\alpha)+\cdots+l_{k-1}\sigma^{2k-i-1}(\alpha)=0$. 由于 $\sigma^k(\alpha)=0$,从而 $l_i\sigma^{k-1}(\alpha)=0$. 但 $\sigma^{k-1}(\alpha)\neq0$, $\therefore l_i=0$. 与假设矛盾. 故 $\alpha,\sigma(\alpha),\cdots,\sigma^{k-1}(\alpha)$线性无关.

1607. 在 $P^{2\times2}$中,设

$$\sigma\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix},\tau\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}sa&0\\0&td\end{bmatrix},$$

其中 $s,t,a,b,c,d\in P$,则 σ,τ 是 $P^{2\times2}$上的线性变换,并求 $\sigma+\tau,\sigma\tau$ 及 $\tau\sigma$.

解 由定义易知 σ,τ 是 $P^{2\times2}$上线性变换.

$$(\sigma+\tau)\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\sigma\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}+\tau\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(s+1)a+b&a-b\\c+d&(t-1)d+c\end{bmatrix},$$

$$(\sigma\tau)\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}sa&sa\\td&-td\end{bmatrix},(\tau\sigma)\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}sa+sb&0\\0&tc-td\end{bmatrix}.$$

1608. 二维线性空间中，线性变换 σ_1 对基 $\alpha_1=(1,2)$，$\alpha_2=(2,1)$ 的矩阵是 $\begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix}$，$\sigma_2$ 对基 $\beta_1=(1,1)$，$\beta_2=(1,2)$ 的矩阵是 $\begin{bmatrix}3&3\\2&4\end{bmatrix}$. 求 $\sigma_1+\sigma_2$ 对 β_1,β_2 的矩阵和 $\sigma_1\sigma_2$ 对 α_1,α_2 的矩阵.

解 $\sigma(\alpha_1,\alpha_2)=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix}$，$\sigma_2(\beta_1,\beta_2)=(\beta_1,\beta_2)\begin{bmatrix}3&3\\2&4\end{bmatrix}$

$(\alpha_1,\alpha_2)=(\beta_1,\beta_2)T$，即 $\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}T$ $\therefore T=\begin{bmatrix}0&3\\1&-1\end{bmatrix}$

$$\sigma(\beta_1,\beta_2)=\sigma_1(\alpha_1,\alpha_2)T^{-1}=(\beta_1,\beta_2)T\begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix}T^{-1}$$

$$=(\beta_1,\beta_2)\begin{bmatrix}5&6\\-\frac{2}{3}&-1\end{bmatrix}.$$

$$\therefore\quad(\sigma_1+\sigma_2)(\beta_1,\beta_2)=(\beta_1,\beta_2)\left[\begin{bmatrix}5&6\\-\frac{2}{3}&-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&3\\2&4\end{bmatrix}\right]$$

$$=(\beta_1,\beta_2)\begin{bmatrix}8&9\\\frac{4}{3}&3\end{bmatrix}.$$

$$\sigma_2(\alpha_1,\alpha_2)=(\alpha_1,\alpha_2)T^{-1}\begin{bmatrix}3&3\\2&4\end{bmatrix}T=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{bmatrix}5&4\\1&2\end{bmatrix},$$

$$\therefore\quad(\sigma_1\sigma_2)(\alpha_1,\alpha_2)=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&4\\1&2\end{bmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{bmatrix}7&8\\13&14\end{bmatrix}.$$

1609. 设 V 是实数域 R 上三维线性空间，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 是 V 的一组基，σ 是 V 上线性变换：

$$\sigma(\varepsilon_1)=\varepsilon_1,\ \sigma(\varepsilon_2)=\varepsilon_1+\varepsilon_2,\ \sigma(\varepsilon_3)=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3.$$

1) 试求 T 的逆变换 σ^{-1} 在 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵；

2) 求 σ^{-1} 在 $\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\sigma(\varepsilon_3)$ 下的矩阵.

解 1) $\because \sigma(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$,

$$\therefore \quad \sigma^{-1}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

2) $\sigma^{-1}(\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\sigma(\varepsilon_3))=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$

$$=(\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\sigma(\varepsilon_3))\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=(\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\sigma(\varepsilon_3))\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

1610. 设 $V=R^3$ 的一组基为 $\alpha_1=(1,1,0)$，$\alpha_2=(1,2,0)$，$\alpha_3=(0,2,-1)$，σ 为线性变换，且 $\sigma(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A$，其中 $A=\begin{bmatrix}2&0&3\\0&-2&-1\\1&-1&4\end{bmatrix}$，而 α 在基 $\beta_1=(1,2,3)$，$\beta_2=(1,3,5)$，$\beta_3=(0,2,1)$ 下的坐标为 $(1,-2,1)$. 求 $\sigma(\alpha)$ 在 β_1,β_2,β_3 下的坐标.

解 设 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)T$，则

$$\begin{bmatrix}1&1&0\\2&3&2\\3&5&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&2&2\\0&0&-1\end{bmatrix}T. \tag{1}$$

由(1)式求出 $T=\begin{bmatrix}-6 & -11 & -4\\ 7 & 12 & 4\\ -3 & -5 & -1\end{bmatrix}$. 又因为

$$\alpha=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix},$$

所以

$$\sigma(\alpha)=\sigma(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$$

$$=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)T^{-1}AT\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$$

$$=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{bmatrix}237\frac{1}{3}\\-10\\115\frac{2}{3}\end{bmatrix}.$$

1611. σ 是数域 P 上 n 维线性空间 V 上的线性变换,如果 σ 在任一组基下的矩阵都相同,那么 $\sigma=kI_V,k\in P$.

证　设 σ 在 V 的一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵为 A,X 为任一 n 阶可逆矩阵,令$(\beta_1,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)X$,则 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 也是 V 的一组基. 因而 σ 在 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 下的矩阵为 $X^{-1}AX=A$,即 $AX=XA$,即 A 与一切 n 阶可逆矩阵可交换. 所以 $A=kE,k\in P$. 从而 $\sigma=kI_V,k\in P$.

1612.　设 n 维线性空间 V 的线性变换 σ 把线性无关向量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 分别变为 $\beta_1,\cdots,\beta_n$,则 σ 在基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 下的矩阵为 BA^{-1},其中 A 和 B 的列分别是向量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 和 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 在基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 下的坐标.

证 由假设知

$$(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)A,(\beta_1,\cdots,\beta_n)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)B.$$

由于 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，因此 A 可逆. 于是

$$(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)A^{-1}.$$

因为

$$\sigma(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\beta_1,\cdots,\beta_n)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)B,$$

所以

$$\sigma(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=\sigma(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)A^{-1}=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)BA^{-1}.$$

1613. 在 n 阶矩阵的集合中，不存在 n 阶矩阵 A,B 使 $AB-BA=E$. 在 V 的线性变换中，是否也不存在 σ,τ 使 $\sigma\tau-\tau\sigma=I_V$ 呢?

答 在有限维线性空间中不存在 $\sigma\tau-\tau\sigma=I_V$. 因为如果存在，则取一组基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 后，

$$\sigma(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)A,\tau(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)B.$$

由 $\sigma\tau-\tau\sigma=I_V$ 可以得出 $AB=BA=E$. 矛盾.

但在无限维线性空间中可能有 $\sigma\tau-\tau\sigma=I_V$，比如，$V=P[x]$，令 $\sigma(f(x))=f'(x)$，$\tau(f(x))=xf(x)$，由第 **1604** 条的注知 $\sigma\tau-\tau\sigma=I_V$.

1614. 在 n 阶矩阵的集合中，若 n 阶矩阵 A,B 适合 $AB=E$，则 A 可逆. n 维线性空间 V 上的线性变换 σ,τ 适合 $\sigma\tau=I_V$，是否必有 σ 可逆? 当 V 是无限维线性空间呢?

解 当 V 是 n 维线性空间时，设 σ,τ 关于 V 的某一组基的矩阵为 A,B，则由 $\sigma\tau=I_V$ 有 $AB=BA=E$，从而有 $\sigma\tau=\tau\sigma=I_V$，即 σ 可逆. 当 V 是无限维线性空间时，σ 未必可逆，比如，在 $P[x]$中，定义 $\sigma(f(x))=a_nx^{n-1}+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x+a_1$，$\tau(f(x))=a_nx^{n+1}+a_{n-1}x^n+\cdots+a_1x^2+a_0x$，易知 σ,τ 都是 $P[x]$上的线性变换，并且 $(\sigma\tau)(f(x))=f(x)$，$\sigma\tau=I_V$，但 $\tau\sigma\neq I_V$，所以 σ 不可逆.

1615. 设线性变换 $\sigma:R^2\longrightarrow R^2$ 在基 $e_1=(1,0)$，$e_2=(0,1)$

下的矩阵为$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. 若 $\varepsilon_1=-(k-1)e_1+ke_2,\varepsilon_2=-ke_1+(k+1)e_2$,其中 k 是自然数,求 σ^{-k}在 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 下的矩阵.

解　设 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$,由$(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=(e_1,e_2)\begin{bmatrix} -(k-1) & -k \\ k & k+1 \end{bmatrix}$可知 σ 在 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 下的矩阵为

$$B=\begin{bmatrix} -(k-1) & -k \\ k & k+1 \end{bmatrix}^{-1}A\begin{bmatrix} -(k-1) & -k \\ k & k+1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}=A.$$

故 σ^{-k}在 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 下的矩阵为 $B^{-k}=\begin{bmatrix} 1-k & -k \\ k & k+1 \end{bmatrix}$.

1616.　设 σ 是复数域上三维线性空间 V 的线性变换,σ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵 $A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$,适当选取新基 η_1,η_2,η_3,使 σ 在新基下的矩阵为对角矩阵. 写出相应的基变换的过渡矩阵 Q,并验算 $Q^{-1}AQ$.

解　由 $|\lambda E-A|=\lambda(\lambda^2+14)=0$ 知:$\lambda_1=0,\lambda_2=\sqrt{14}i$,$\lambda_3=-\sqrt{14}i$.

则
$$\eta_1=2\varepsilon_1-\varepsilon_2+2\varepsilon_3,$$
$$\eta_2=(3-2\sqrt{14}i)\varepsilon_1+13\varepsilon_2+(2+3\sqrt{14}i)\varepsilon_3,$$
$$\eta_3=(3+2\sqrt{14}i)\varepsilon_1+13\varepsilon_2+(2-3\sqrt{14}i)\varepsilon_3$$
是 σ 的分别属于 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 的一个特征向量,由于 η_1,η_2,η_3 是线性无关的,故取它们作为新基. 由 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 到 η_1,η_2,η_3 的过渡矩阵为

$$Q=\begin{bmatrix} 2 & 3-2\sqrt{14}i & 3+2\sqrt{14}i \\ -1 & 13 & 13 \\ 2 & 2+3\sqrt{14}i & 2-3\sqrt{14}i \end{bmatrix}.$$

经验算有 $Q^{-1}AQ=\mathrm{diag}(0,\sqrt{14}i,-\sqrt{14}i)$.

1617. （凯莱 哈密尔顿） 设 σ 是 n 维线性空间 V 的线性变换，若 A 是 σ 在 V 的某一组基下的矩阵，而 $f(\lambda)=|\lambda E-A|$，则 $f(\sigma)=0$.

注 ① 可能存在次数小于 n 的多项式 $g(x)$，使 $g(\sigma)=0$. 例如，在 R^3 中，$\sigma(a,b,c)=(c,0,0)$是一线性变换，取 $g(x)=x^2$，则有 $g(\sigma)=0$.

② 因为 A 有最小多项式 $d_n(\lambda)$，而 $d_n(A)=0$，由矩阵与线性变换的一一对应，所以 $d_n(\sigma)=0$. 因此求 σ 的最小多项式与求相应的矩阵 A 的最小多项式一致.

1618. 设 σ 是数域 P 上 n 维线性空间 V 的线性变换，则

1) 在 $P[x]$中有一次数$\leqslant n$ 的多项式 $f(x)$，使 $f(\sigma)=0$；

2) 当 $f(\sigma)=0, g(\sigma)=0$ 时，$d(\sigma)=0, d(x)=(f(x),g(x))$；

3) 当 $f(\sigma)=0$ 时，σ 可逆$\Longleftrightarrow f(x)$的常数项不为 0.

证 1) 由第 **1617** 条知.

2) 由题设，$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$，于是

$$d(\sigma)=u(\sigma)f(\sigma)+v(\sigma)g(\sigma)=0.$$

3) $f(\sigma)=0\Longleftrightarrow f(A)=0$. σ 可逆$\Longleftrightarrow A$ 可逆$\Longleftrightarrow f(x)$的常数项不为 0.

1619. 设 σ 是数域 P 上 n 维线性空间 V 上的可逆线性变换，则

1) σ 的特征根全不为 0；

2) 如果 $\lambda\in P$ 是 σ 的特征根，那么$\frac{1}{\lambda}$是 σ^{-1}的特征根.

证 将 σ 转化为对应方阵后讨论即得.

1620. 设 V 是数域 P 上 n 维线性空间，$L(V)$为 V 上一切线性变换的全体，那么 $L(V)$是 P 上线性空间（见 **1579** 条）求 $L(V)$ 的一组基及维数.

证 取 V 的一组基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$，则 $L(V)$与 $P^{n\times n}$之间存在一个同

构映射. 取 $P^{n\times n}$的一组基$\{E_{ij}|i、j=1,2,\cdots,n\}$,其中 E_{ij}为(i,j)位置的元为1,其余都为0的 n 阶矩阵. 对每个 E_{ij}定义一个线性变换

$$\sigma_{ij}(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)E_{ij}$$

则可证$\{\sigma_{ij}|i、j=1,2,\cdots,n\}$为 $L(V)$的一组基. 所以

$$\dim L(V)=\dim P^{n\times n}=n^2.$$

1621. 设 σ,τ 是 n 维线性空间 V 的两个线性变换,则 $\sigma\tau$ 的秩$\geqslant\sigma$ 的秩$+\tau$ 的秩$-n$.

证 在 V 中任取一组基,设 σ,τ 在此基下的矩阵分别为 A, B,则 $\sigma\tau$ 在此基下的矩阵为 AB. 故

$$\sigma\tau \text{ 的秩}=\text{秩}(AB)\geqslant\text{秩 } A+\text{秩 } B-n$$
$$=\sigma \text{ 的秩}+\tau \text{ 的秩}-n.$$

五、 核和值域(象)

1622. 什么叫做线性变换的值域与核?

答 设 σ 是线性空间 V 的一个线性变换,σ 的全体象组成的集合 $\sigma(V)=\{\sigma(\alpha)|\alpha\in V\}$称为 σ 的值域(象);所有被 σ 变成零向量的向量组成的集合 $N=\{\alpha\in V|\sigma(\alpha)=0\}$,称为 σ 的核,记为 $N=\ker\sigma$.

1623. $\sigma(V)$和 $\ker\sigma$ 都是 V 的子空间.

1624. 什么叫做线性变换的秩和零度?

答 σ 的秩$=\dim\sigma(V)$;σ 的零度$=\dim\ker\sigma$.

1625. 设 σ 是 n 维线性空间 V 的线性变换,$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的基,且 $\sigma(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)A$,则

1) $\sigma(V)=L(\sigma(\varepsilon_1),\cdots,\sigma(\varepsilon_n))$;

2) σ 的秩$=A$ 的秩.

1626. 设 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 为 V 的一组基,σ 为 V 上的一个线性变换,$\sigma(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)A$,秩 $A=r$,如果 $A=(B_1,\cdots,B_n)$,其中 B_i 为 A 的列向量,$B_{i_1},\cdots,B_{i_r}$为 $B_1,\cdots,B_n$ 的一个极大线性无关

组，那么 $\sigma(\varepsilon_{i1}),\cdots,\sigma(\varepsilon_{ir})$ 为 $\sigma(V)$ 的一组基.

证　$(\sigma(\varepsilon_1),\cdots,\sigma(\varepsilon_n))=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)A$，由假设及第 **1418** 条知 $\sigma(\varepsilon_{i1}),\cdots,\sigma(\varepsilon_{ir})$ 为 $\sigma(\varepsilon_1),\cdots,\sigma(\varepsilon_n)$ 的一个极大线性无关组. 再由第 **1625** 条知

$$\sigma V=L(\sigma(\varepsilon_1),\cdots,\sigma(\varepsilon_n))=L(\sigma(\varepsilon_{i1}),\cdots,\sigma(\varepsilon_{ir})).$$

1627.　设 σ 是 n 维线性空间 V 的线性变换，则

$$\sigma \text{ 的秩}+\sigma \text{ 的零度}=\dim\sigma(V)+\dim\ker\sigma=n=\dim V.$$

1628.　设 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 为线性空间 V 的一组基，σ 是 V 的线性变换，$\sigma(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)A$，秩 $A=r$. n 元齐次方程组 $AX=0$ 的基础解系为 $C_1,\cdots,C_{n-r}$，令

$$\eta_i=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)C_i,i=1,2,\cdots,n-r, \tag{1}$$

则 $\ker\sigma=L(\eta_1,\cdots,\eta_{n-r})$.

证　$\forall\ \xi\in L(\eta_1,\cdots,\eta_{n-r})$，则

$$\xi=k_1\eta_1+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r}.$$

但由(1)式知 $\sigma(\eta_i)=\sigma(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)C_i=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)AC_i=0$，所以 $\sigma(\xi)=0$，即 $\xi\in\ker\sigma$. 故 $L(\eta_1,\cdots,\eta_{n-r})\subseteq\ker\sigma$. 又 $\dim L(\eta_1,\cdots,\eta_{n-r})=n-r$，$\dim\ker\sigma=n-\dim\sigma V=n-$ 秩 $A=n-r$，$\therefore\ker\sigma=L(\eta_1,\cdots,\eta_{n-r})$.

1629.　设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 是四维线性空间 V 的一组基，线性变换 σ 在这组基下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2&1\\-1&2&1&3\\1&2&5&5\\2&-2&1&-2\end{pmatrix}.$$

1) 求 σ 在基 $\eta_1=\varepsilon_1-2\varepsilon_2+\varepsilon_4,\eta_2=3\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4,\eta_3=\varepsilon_3+\varepsilon_4,\eta_4=2\varepsilon_4$ 下的矩阵；

2) 求 σ 的核与值域；

3) 在 σ 的核中选一组基，把它扩充为 V 的一组基，并求 σ 在

这组基下的矩阵；

4）在 σ 的值域中选一组基，把它扩充成 V 的一组基，并求 σ 在这组基下的矩阵.

解 1）$\because (\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&3&0&0\\0&-1&1&0\\1&-1&1&2\end{pmatrix}$,

故 σ 在基 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 下的矩阵是

$$B=T^{-1}AT=\begin{pmatrix}2&-3&3&2\\\frac{2}{3}&-\frac{4}{3}&\frac{10}{3}&\frac{10}{3}\\\frac{8}{3}&-\frac{16}{3}&\frac{40}{3}&\frac{40}{3}\\0&1&-7&-8\end{pmatrix},$$

其中 $T=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&3&0&0\\0&-1&1&0\\1&-1&1&2\end{pmatrix}$.

2）先求 $\ker\sigma$. 设 $\xi\in\ker\sigma$，并设它在 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 下的坐标为 (x_1,x_2,x_3,x_4)，$\sigma(\xi)$ 在 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 下的坐标为 $(0,0,0,0)$. 由 $AX'=0$ 得基础解系：$C'_1=(-2,-\frac{3}{2},1,0)$，$C'_2=(-1,-2,0,1)$. 令 $\alpha_1=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)C_1$，$\alpha_2=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)C_2$，则 $\ker\sigma=L(\alpha_1,\alpha_2)$.

再由 $\sigma(V)=L(\sigma(\varepsilon_1),\cdots,\sigma(\varepsilon_4))$，又 $\dim\sigma(V)=4-2=2$，且 $\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2)$ 线性无关，从而 $\sigma(V)=L(\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2))$.

3）由 2）知 α_1,α_2 是 $\ker\sigma$ 的基，易知 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\alpha_1,\alpha_2$ 是 V 的一组

基，$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\alpha_1,\alpha_2)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)\begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & -1\\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -2\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. 故 σ 在 ε_1,

$\varepsilon_2,\alpha_1,\alpha_2$ 下的矩阵是

$$B=T^{-1}AT=\begin{pmatrix}5 & 2 & 0 & 0\\ \frac{9}{2} & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0\\ 2 & -2 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

其中 $T=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & -1\\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -2\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

4) 由 2)知 $\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 是 V 的一组基. 因为

$$(\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\varepsilon_3,\varepsilon_4)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 2 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

所以 σ 在基 $\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 下的矩阵是:

$$C=T^{-1}AT=\begin{pmatrix}5 & 2 & 2 & 1\\ \frac{9}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

其中 $T=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1630. 设 $V=P[x]_n$，定义线性变换如下：

$$\sigma(f(x))=xf'(x)-f(x), \forall f(x)\in P[x]_n.$$

1) 求 $\ker\sigma$ 和 $\sigma(V)$；　　2) $V=\ker\sigma\oplus\sigma(V)$.

解　1) 易知 $1,x,\cdots,x^{n-1}$ 是 V 的一组基，且 $\sigma(1)=x\cdot 0-1=-1$，$\sigma(x)=x\cdot 1-x=0$，$\sigma(x^2)=x\cdot 2x-x^2=x^2$，$\cdots$，$\sigma(x^{n-1})=x(n-1)x^{n-2}-x^{n-1}=(n-2)x^{n-1}$，故 σ 关于这组基的矩阵是

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2 \end{bmatrix},$$

且 $\sigma(V)=L(1,x^2,\cdots,x^{n-1})=\{a_0+a_1x^2+\cdots+a_{n-2}x^{n-1}\,|\,a_i\in P\}$，$\dim\ker\sigma=n-\dim\sigma(V)=1$，于是 $\ker\sigma=L(x)=\{kx\,|\,k\in P\}$.

2) 由 1) 不难得出 $\ker\sigma\cap\sigma(V)=\{0\}$，且 $\dim(\ker\sigma+\sigma(V))=\dim\ker\sigma+\dim\sigma(V)=n$，而 $\ker\sigma+\sigma(V)$ 为 V 的子空间，因此 $V=\ker\sigma\oplus\sigma V$.

1631. 设 σ 是 R^3 的线性变换，且

$$\sigma(x,y,z)=(x+2y-z,y+z,x+y-2z).$$

求 $\sigma(R^3)$.

解　取 R^3 的一组基 $\varepsilon_1=(1,0,0)$，$\varepsilon_2=(0,1,0)$，$\varepsilon_3=(0,0,1)$，于是 $\sigma(\varepsilon_1)=(1,0,1)$，$\sigma(\varepsilon_2)=(2,1,1)$，$\sigma(\varepsilon_3)=(-1,1,-2)$. 而 $\sigma(\varepsilon_1)$，$\sigma(\varepsilon_2)$ 线性无关，构成 $\sigma(R^3)$ 的基. $\therefore\sigma(R^3)=L(\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2))$

1632. 令 P^4 表示数域 P 上四元列空间，取

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 5 & -1\\1 & 1 & -2 & 3\\3 & -1 & 8 & 1\\1 & 3 & -9 & 7\end{bmatrix},$$

对于 $\xi\in P^4$，令 $\sigma(\xi)=A\xi$，求 σ 的核的维数和值域的维数.

解 $\because$ 秩 $A=2$，$\therefore \dim\sigma(V)=\sigma$ 的秩 $=A$ 的秩 $=2$. 又 $\dim\sigma(V)+\dim\ker\sigma=4$，$\therefore \dim\ker\sigma=2$.

1633. 设 $P^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in P\}$ 是数域 P 上 n 维行空间，定义

$$\sigma(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(0,x_1,\cdots,x_{n-1}).\qquad(1)$$

1) σ 是 P^n 的一个线性变换，且 $\sigma^n=0$；

2) 求 $\ker\sigma$ 和 $\sigma(V)$ 的维数；

3) V 是否为 $\ker\sigma+\sigma(V)$ 的直和？

解 1) 显然 σ 是 P^n 的线性变换. 对于任意 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in P^n$，$\sigma^n(x_1,\cdots,x_n)=(0,\cdots,0)$，$\therefore \sigma^n=0$.

2) $\forall\ \xi\in\ker\sigma$，则 $\sigma(\xi)=(0,x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})=(0,\cdots,0)$. $\therefore x_1=\cdots=x_{n-1}=0$，$\xi=(0,\cdots,0,x_n)=x_n\varepsilon_n$，故 $\ker\sigma=L(\varepsilon_n)$，其中 $\varepsilon_n=(0,\cdots,0,1)$，$\therefore \dim\ker\sigma=1$. 因此，$\dim\sigma(V)=n-1$. 且由(1)式知 $\sigma(V)=L(\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)$.

3) 因为 $\sigma(V)\cap\ker\sigma\neq\{0\}$，故 V 不等于 $\ker\sigma$ 与 $\sigma(V)$ 的直和.

1634. 设 V 的复数域上以 e_1,e_2,e_3,e_4 为基的 4 维线性空间，σ 为 V 上的线性变换，$\sigma(e_i)=e_1$，$i=1,2,3$，$\sigma(e_4)=e_2$，求 $\sigma(V)$，$\ker\sigma$，$\sigma(V)+\ker\sigma$ 及 $\sigma(V)\cap\ker\sigma$ 的维数.

解 σ 关于基 $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ 的矩阵是

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

故 $\dim\sigma(V)=$ 秩 $A=2$，$\dim\ker\sigma=4-2=2$．由题设，$\sigma(V)=L(e_1,e_2)$．$\forall\ \xi\in\sigma(V)\cap\ker\sigma$，则 $\xi=a_1e_1+a_2e_2$，$\sigma(\xi)=a_1\sigma e_1+a_2\sigma e_2=(a_1+a_2)e_1=0$．$\therefore a_1+a_2=0$，$\xi=a_1(e_1-e_2)$．可见 $\sigma(V)\cap\ker\sigma=L(e_1-e_2)$．因为 $e_1-e_2\neq0$，所以 $\dim(\sigma(V)\cap\ker\sigma)=1$．$\dim(\sigma(V)+\ker\sigma)=\dim\sigma(V)+\dim\ker\sigma-\dim(\sigma(V)\cap\ker\sigma)=2+2-1=3$．

1635. 设 σ,τ 是线性空间 V 上的线性变换，且 $\sigma^2=\sigma,\tau^2=\tau$，则

1) $\sigma(V)=\tau(V)\Longleftrightarrow\sigma\tau=\tau,\tau\sigma=\sigma$；

2) $\ker\sigma=\ker\tau\Longleftrightarrow\sigma\tau=\sigma,\tau\sigma=\tau$．

证 1) 必要性 $\forall\ \alpha\in V$，有 $\tau(\alpha)\in\tau(V)$．因为 $\sigma(V)=\tau(V)$，所以存在 $\beta\in V$，使 $\tau(\alpha)=\sigma(\beta)$．从而

$$(\sigma\tau)(\alpha)=\sigma(\tau(\alpha))=\sigma(\sigma(\beta))=\sigma(\beta)=\tau(\alpha).$$

由 α 的任意性知 $\sigma\tau=\tau$．类似地，$\tau\sigma=\sigma$．

充分性 设 $\sigma\tau=\tau$，$\tau\sigma=\sigma$，$\forall\ \sigma(\alpha)\in\sigma(V)$，有 $\sigma(\alpha)=(\tau\sigma)(\alpha)\in\tau(V)$，故 $\sigma(V)\subseteq\tau(V)$．类似地，$\tau(V)\subseteq\sigma V$．$\therefore\sigma(V)=\tau(V)$．

2) 必要性 $\forall\ \alpha\in V$，$\sigma^2(\alpha)=\sigma(\alpha)$，即 $\sigma(\sigma(\alpha)-\alpha)=0$，所以有 $\sigma(\alpha)-\alpha\in\ker\sigma=\ker\tau$．从而 $\tau(\sigma(\alpha)-\alpha)=0$．故 $(\tau\sigma)(\alpha)=\tau(\alpha)$．由 α 的任意性知 $\tau\sigma=\tau$．类似地，$\sigma\tau=\sigma$．

充分性 $\forall\ \alpha\in\ker\sigma$，由 $\sigma(\alpha)=0$ 知 $\tau(\alpha)=(\tau\sigma)(\alpha)=\tau(\sigma(\alpha))=\tau(0)=0$．$\therefore\alpha\in\ker\tau$，即 $\ker\sigma\subseteq\ker\tau$．类似地，$\ker\tau\subseteq\ker\sigma$．故 $\ker\sigma=\ker\tau$．

1636. 设 W_1,W_2 是 n 维线性空间 V 的两个子空间，且其维数之和为 n，则存在 V 的线性变换 σ，使 $\ker\sigma=W_1$，$\sigma(V)=W_2$．

证 设 $\dim W_1=S$，则 $\dim W_2=n-s=m$．在 W_2 中任取一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$，再在 W_1 中取一组基 $\beta_1,\cdots,\beta_s$，并将其扩充为 V 的基 $\beta_1,\cdots,\beta_s,\beta_{s+1},\cdots,\beta_n$．用 σ 表示由以下条件所确定的线性变换：

$$\sigma(\beta_1)=\cdots=\sigma(\beta_s)=0,\sigma(\beta_{s+1})=\alpha_1,\cdots,\sigma(\beta_n)=\alpha_m.$$

首先,显然 $\sigma(V)=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)=W_2$. 其次由于 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 是 W_1 的基,$\therefore W_1=L(\beta_1,\cdots,\beta_s)\subseteq\ker\sigma$.

另一方面,$\forall\ \alpha\in\ker\sigma$,设 $\alpha=k_1\beta_1+\cdots+k_s\beta_s+k_{s+1}\beta_{s+1}+\cdots+k_n\beta_n$,则由 $\sigma(\alpha)=0$,得

$$\sigma(\alpha)=\sigma(k_1\beta_1+\cdots+k_s\beta_s+k_{s+1}\beta_{s+1}+\cdots+k_n\beta_n)=k_{s+1}\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_m=0.$$

由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性无关得 $k_{s+1}=\cdots=k_m=0$. 从而 $\alpha=k_1\beta_1+\cdots+k_s\beta_s\in W_1$,$\therefore\ker\sigma\subseteq W_1$,故 $\ker\sigma=W_1$.

1637. 设 n 维线性空间 V 有两个子空间 V_1 和 V_2,使 $\ker\sigma=V_1\cap V_2$,其中 $\sigma\in L(V)$,则存在 $\sigma_1,\sigma_2\in L(V)$,使得 $V_1\subseteq\ker\sigma_2$,$V_1\subseteq\ker\sigma_1$,且 $\sigma_1+\sigma_2=\sigma$.

证 因为 $\ker\sigma=\{0\}$时结论是明显的,所以无妨假定 $\ker\sigma\neq\{0\}$,并设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_p$ 是 $\ker\sigma$ 的基,将它分别扩充为 V_1 和 V_2 的基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_p,\beta_1,\cdots,\beta_s$ 和 $\alpha_1,\cdots,\alpha_p,\gamma_1,\cdots,\gamma_t$. 由维数公式知 $\alpha_1,\cdots,\alpha_p,\beta_1,\cdots,\beta_s,\gamma_1,\cdots,\gamma_t$ 线性无关. 故可扩充为 V 的基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_p,\beta_1,\cdots,\beta_s,\gamma_1,\cdots,\gamma_t,\delta_1,\cdots,\delta_q$. 从而 $p+s+t+q=n$.

作 σ_1,σ_2,使

$$\sigma_1(\alpha)=\begin{cases}0, & \alpha\in V_2,\\ \sigma(\alpha), & \alpha\in\{\gamma_1,\cdots,\gamma_t\},\\ \dfrac{1}{2}\sigma(\alpha), & \alpha\in\{\delta_1,\cdots,\delta_q\};\end{cases}$$

$$\sigma_2(\alpha)=\begin{cases}0, & \alpha\in V_1,\\ \sigma(\alpha), & \alpha\in\{\beta_1,\cdots,\beta_s\},\\ \dfrac{1}{2}\sigma(\alpha), & \alpha\in\{\delta_1,\cdots,\delta_q\}.\end{cases}$$

则 σ_1,σ_2 即为所求.

1638. 设 σ 是有限维线性空间 V 的线性变换,W 为 V 的子空间,则 $\dim\sigma(W)+\dim(\ker\sigma\cap W)=\dim W$.

证 设 $\dim(\ker\sigma\cap W)=m(\neq 0)$,$\dim W=S$,取 $\ker\sigma\cap W$ 的

一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$，扩充为 W 的基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1},\cdots,\alpha_s$，则 $\sigma(\alpha_1)=\cdots=\sigma(\alpha_m)=0$，$W=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1},\cdots,\alpha_s)$，

$$\sigma(W)=L(\sigma(\alpha_1),\cdots,\sigma(\alpha_m),\sigma(\alpha_{m+1}),\cdots,\sigma(\alpha_s))$$
$$=L(\sigma(\alpha_{m+1}),\cdots,\sigma(\alpha_s)). \quad (1)$$

设 $k_{m+1}\sigma(\alpha_{m+1})+\cdots+k_s\sigma(\alpha_s)=0$，则 $\sigma(k_{m+1}\alpha_{m+1}+\cdots+k_sd_s)=0$，$k_{m+1}\alpha_{m+1}+\cdots+k_s\alpha_s\in\ker\sigma\cap W$，$k_m\alpha_{m+1}+\cdots+k_s\alpha_s=l_1\alpha_1+\cdots+l_m\alpha_m=0$. 由唯一性知 $k_{m+1}=\cdots=k_s=l_1=\cdots=l_m=0$，即 $\sigma(\alpha_{m+1})$，$\cdots$，$\sigma(\alpha_s)$线性无关. 由(1)式有

$$\dim\sigma(W)=s-m=\dim W-\dim(\ker\sigma\cap W),$$

即

$$\dim\sigma(W)+\dim(\ker\sigma\cap W)=\dim W.$$

1639. 给定数域 P 上有限维线性空间 $V_0,V_1,\cdots,V_n,V_{n+1}$，其中 $V_0=V_{n+1}=\{0\}$，线性映射

$$\sigma_i: V_i\longrightarrow V_{i+1}, i=0,1,\cdots,n$$

满足条件：$\ker\sigma_{i+1}=\sigma_i(V)$，$i=0,1,\cdots,n-1$，则

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\cdot\dim V_i=0.$$

证 由维数公式得

$$\dim V_i=\dim\ker\sigma_i+\dim\sigma_i(V)=\dim\ker\sigma_i+\dim\ker\sigma_{i+1}.$$

取 $i=1,2,\cdots,n$，得

$$\dim V_1=\dim\ker\sigma_1+\dim\ker\sigma_2,$$
$$\dim V_2=\dim\ker\sigma_2+\dim\ker\sigma_3,$$
$$\cdots\cdots$$
$$\dim V_n=\dim\ker\sigma_n+\dim\ker\sigma_{n+1}.$$

把上式第 i 个式子乘以 $(-1)^i$，两边相加，可得

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\dim V_i=(-1)\dim\ker\sigma_1+(-1)^n\dim\sigma_n(V).$$

由于 $\dim V_0=\dim\ker\sigma_0+\dim\ker\sigma_1$，$V_0=\{0\}$，因此 $\ker\sigma_0=\{0\}$，

$\dim \ker\sigma_0=0$. 再由 $\sigma_n(V)\subseteq V_{n+1}=\{0\}$ 即知 $\dim\sigma_n(V)=0$,因此有

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\dim V_i=0.$$

1640. 在线性空间 $P[x]_n(n>1)$ 中,

1) 求微分运算 σ 的特征值;

2) σ 在任何一组基下的矩阵都不可能是对角矩阵.

解 1)在 $P[x]_n$ 中取一组基:$1,x,\frac{x^2}{2!},\cdots,\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$. σ 在此基下的矩阵是

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix},$$

因为 A 的特征值 $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$,它也是 σ 的特征值.

2)A 是若当块,故 A 不可能与对角矩阵相似. 所以 σ 在任何基下的矩阵都不可能是对角矩阵.

1641. 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 是四维线性空间 V 的一组基,线性变换 σ 在这组基下的矩阵是

$$A=\begin{bmatrix}5 & -2 & -4 & 3\\ 3 & -1 & -3 & 2\\ -3 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} & -\frac{5}{2}\\ -10 & 3 & 11 & -7\end{bmatrix},$$

1) 求 σ 在基 $\eta_1=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4,\eta_2=2\varepsilon_1+3\varepsilon_2+\varepsilon_3,\eta_3=\varepsilon_3,\eta_4=\varepsilon_4$ 下的矩阵;

2) 求 σ 的特征值和相应的特征向量.

解 1) 因为$(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)T$,其中

$$T=\begin{bmatrix}1&2&0&0\\1&3&0&0\\1&1&1&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}.$$

所以 σ 在 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 下的矩阵为

$$B=T^{-1}AT=\begin{bmatrix}0&0&6&-5\\0&0&-5&4\\0&0&\frac{7}{2}&-\frac{3}{2}\\0&0&5&-2\end{bmatrix}.$$

2) $\because A\sim B$, $\therefore |\lambda E-A|=|\lambda E-B|=\lambda^2(\lambda-1)(\lambda-\frac{1}{2})$. 故 σ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=1,\lambda_4=\frac{1}{2}$，且 σ 的属于 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 的一组线性无关特征向量为 $\xi_1=2\varepsilon_1+3\varepsilon_2+\varepsilon_3$， $\xi_2=-\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_4$；$\sigma$ 的属于 $\lambda_3=1$ 的一个线性无关特征向量为 $\xi_3=3\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3-2\varepsilon_4$；$\sigma$ 的属于 $\lambda_4=\frac{1}{2}$的一个线性无关特征向量为 $\xi_4=-4\varepsilon_1-2\varepsilon_2+\varepsilon_3+6\varepsilon_4$.

1642. 设 σ 是数域 P 上 n 维线性空间 V 的线性变换，W_1，W_2 是 V 的子空间，并且 $V=W_1\oplus W_2$，则

$$\sigma\text{ 有逆变换}\Longleftrightarrow V=\sigma(W_1)\oplus\sigma(W_2).$$

证 必要性 $\because\sigma$ 是满射，$\therefore\sigma(V)=V$. 于是$\forall\ \eta\in V$，必有 $\xi\in V$，使 $\sigma(\xi)=\eta$. $\because V=W_1\oplus W_2$，$\therefore\xi=\xi_1+\xi_2,\xi_1\in W_1,\xi_2\in W_2$. 于是 $\eta=\sigma(\xi)=\sigma(\xi_1)+\sigma(\xi_2)$，$\sigma(\xi_1)\in\sigma(W_1)$，$\sigma(\xi_2)\in\sigma(W_2)$，$\therefore V\subseteq\sigma(W_1)+\sigma(W_2)$. 而 $\sigma(W_1)+\sigma(W_2)\subseteq V$ 是显然的，故 $V=\sigma(W_1)+\sigma(W_2)$.

$\forall\ \eta\in\sigma(W_1)\cap\sigma(W_2)$，由于 σ 是单射，故仅有唯一的 $\xi\in V$，使 $\eta=\sigma(\xi)\in\sigma(W_1)\cap\sigma(W_2)$，$\sigma(\xi)\in\sigma(W_1)$ 且 $\sigma(\xi)\in\sigma(W_2)$，即 $\xi\in W_1$ 且 $\xi\in W_2$. $\therefore\xi\in W_1\cap W_2=\{0\}$，$\therefore\xi=0$. 从而 $\eta=\sigma(\xi)=\sigma(0)$

$=0$. 故 $V=\sigma(W_1)\oplus\sigma(W_2)$.

充分性　因为 $\sigma(V)\supseteq\sigma(W_1)+\sigma(W_2)=V$, 又 $\sigma(V)\subseteq V$, 所以有 $\sigma(V)=V$. 故 σ 是满射. 再由第 **1604** 条知 σ 有逆变换.

1643.　设 V 为 n 维线性空间, $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 为 V 的基, $\bar{V}=\{(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)|\alpha_i\in V\}$, 则 $\varphi:\sigma\longrightarrow(\sigma(\varepsilon_1),\cdots,\sigma(\varepsilon_n))$ 是 $L(V)$ 到 $\bar{V}$ 的一个同构映射, 其中 $L(V)$ 为 V 的一切线性变换的全体.

证　φ 显然是 $L(V)$ 到 $\bar{V}$ 的映射. $\forall\ (\beta_1,\cdots,\beta_n)\in\bar{V}$, 由于存在唯一的线性变换 σ, 使 $\sigma(\varepsilon_i)=\beta_i, i=1,2,\cdots,n$, 即 $\varphi(\sigma)=(\sigma(\varepsilon_1),\cdots,\sigma(\varepsilon_n))=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$, σ 是 $L(V)$ 到 $\bar{V}$ 的满射, 从而为双射. 其次, 设 $\sigma,\tau\in L(V)$, 则

$$\varphi(\sigma+\tau)=((\sigma+\tau)\varepsilon_1,\cdots,(\sigma+\tau)\varepsilon_n)$$
$$=(\sigma(\varepsilon_1),\cdots,\sigma(\varepsilon_n))+(\tau(\varepsilon_1),\cdots,\tau(\varepsilon_n))=\varphi(\sigma)+\varphi(\tau).$$

类似地, $\varphi(k\sigma)=k\varphi(\sigma)$, $\therefore\varphi$ 是 $L(V)$ 到 $\bar{V}$ 的一个同构映射.

1644.　设 σ 是 V 的线性变换, 则

1) $\sigma(V)\subseteq\ker\sigma\Longleftrightarrow\sigma^2=0$;

2) $\ker\sigma\subseteq\ker\sigma^2\subseteq\ker\sigma^3\subseteq\cdots$;

3) $\sigma(V)\supseteq\sigma^2(V)\supseteq\sigma^3(V)\supseteq\cdots$.

证　1) 充分性　$\forall\ \sigma(\xi)\in\sigma(V)$, $\sigma(\sigma(\xi))=\sigma^2(\xi)=0\xi=0$. $\therefore$ $\sigma(\xi)\in\ker\sigma$, 故 $\sigma(V)\subseteq\ker\sigma$.

必要性　$\forall\ \eta\in V$, $\because\ \sigma(V)\subseteq\ker\sigma$, $\therefore\ \sigma(\eta)\in\ker\sigma$. 故 $\sigma^2(\eta)=\sigma(\sigma(\eta))=0$, $\therefore\sigma^2=0$.

2) $\forall\ \xi\in\ker\sigma^s$, 则 $\sigma^s(\xi)=0$, 于是 $\sigma^{s+1}(\xi)=\sigma(\sigma^s(\xi))=\sigma(0)=0$. $\therefore\xi\in\ker\sigma^{s+1}$. 故 $\ker\sigma^s\subseteq\ker\sigma^{s+1}$, $s=1,2,\cdots$

3) $\forall\ \sigma^k(\eta)\in\sigma^k(V)$, $\sigma^k(\eta)=\sigma^{k-1}(\sigma(\eta))\in\sigma^{k-1}(V)$, $\therefore\sigma^k(V)\subseteq\sigma^{k-1}(V)$, $k=2,3,\cdots$, $\therefore\sigma(V)\supseteq\sigma^2(V)\supseteq\sigma^3(V)\supseteq\cdots$

1645.　设 σ 是数域 P 上线性空间 V 的一个线性变换, $f(x)$ 和 $g(x)\in P[x]$, $h(x)=f(x)g(x)$, 则

1) $\ker(f(\sigma))+\ker(g(\sigma))\subseteq\ker(h(\sigma))$;

2) 当 $(f(x),\ g(x))=1$ 时，$\ker(f(\sigma))\oplus\ker(g(\sigma))=\ker(h(\sigma))$.

证 1) $\forall\ \alpha\in\ker(f(\sigma))+\ker(g(\sigma))$，则 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$，其中 $\alpha_1\in\ker(f(\sigma))$，$\alpha_2\in\ker(g(\sigma))$. $\therefore (f(\sigma))(\alpha_1)=0,(g(\sigma))(\alpha_2)=0$. 于是

$$
\begin{aligned}
(h(\sigma))(\alpha)&=(h(\sigma)(\alpha_1)+(h(\sigma)(\alpha_2)\\
&=(f(\sigma)g(\sigma))(\alpha_1)+(f(\sigma)g(\sigma))(\alpha_2)=0.
\end{aligned}
$$

故 $\alpha\in\ker(h(\sigma))$. 故 $\ker f(\sigma))+\ker(g(\sigma))\subseteq\ker(h(\sigma))$.

2) $\because (f(x),g(x))=1$，$\therefore$ 存在 $u(x),v(x)\in P[x]$，使

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1,u(x),v(x)\in P[x].$$

所以
$$u(\sigma)f(\sigma)+v(\sigma)g(\sigma)=I_V. \tag{1}$$

$\forall\ \beta\in\ker(h(\sigma))$，则 $(h(\sigma))(\beta)=0$. 由(1)式得

$$\beta=(u(\sigma)f(\sigma))(\beta)+(v(\sigma)g(\sigma))(\beta)=\beta_1+\beta_2, \tag{2}$$

其中 $\beta_1=(u(\sigma)f(\sigma))(\beta)$，$\beta_2=(v(\sigma)g(\sigma))(\beta)$. $\because (g(\sigma))(\beta_1)=(g(\sigma)u(\sigma)f(\sigma))(\beta)=(u(\sigma)h(\sigma))(\beta)=0$，$\therefore \beta_1\in\ker(g(\sigma))$. 同法，$\beta_2\in\ker(f(\sigma))$. 由(2)式，$\beta\in\ker(f(\sigma))+\ker(g(\sigma))$，所以 $\ker(h(\sigma))\subseteq\ker(f(\sigma))+\ker(g(\sigma))$.

再由 1)得 $\ker(h(\sigma))=\ker(f(\sigma))+\ker(g(\sigma))$.

$\forall\ \xi\in\ker(\mathrm{f}(\sigma))\cap\ker(g(\sigma))$，则 $(f(\sigma))(\xi)=(g(\sigma))(\xi)=0$. 由(1)，$\xi=(u(\sigma)f(\sigma))(\xi)+(v(\sigma)g(\sigma))(\xi)=0$，$\therefore \ker(h(\sigma))=\ker(f(\sigma))\oplus\ker(g(\sigma))$.

1646. 设 A 是 n 维线性空间 V 的线性变换 σ 关于某一基的矩阵，则

$$\text{秩 } A^2=\text{秩 } A\Longleftrightarrow V=\sigma(V)\oplus\ker\sigma.$$

证 必要性 设 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的一组基，σ 关于此基的矩阵为 A，则 σ^2 关于此基的矩阵为 A^2. 而 $\sigma(V)=L(\sigma(\varepsilon_1),\cdots,\sigma(\varepsilon_n))=L(\sigma(\varepsilon_{i_1}),\cdots,\sigma(\varepsilon_{i_s}))$，这里 $\sigma(\varepsilon_{i_1}),\cdots,\sigma(\varepsilon_{i_s})$ 为 $\sigma(V)$ 的一组基. 于是，$\sigma^2(V)=L(\sigma^2(\varepsilon_{i_1},\cdots,\sigma^2(\varepsilon_{i_s}))$.

设秩 A^2 = 秩 A，则 $\dim\sigma^2(V)=\dim\sigma(V)$，$\sigma^2(\varepsilon_{i_1}),\cdots,\sigma^2(\varepsilon_{i_s})$ 为 $\sigma^2(V)$ 的基. $\forall\ \alpha\in\sigma(V)\cap\ker\sigma$，则 $\alpha\in\sigma(V)$，$\alpha=a_1\sigma(\varepsilon_{i_1})+\cdots+a_s\sigma(\varepsilon_{i_s})$，并且 $0=\sigma(\alpha)=a_1\sigma^2(\varepsilon_{i_1})+\cdots+a_s\sigma^2(\varepsilon_{i_s})$. 从而 $a_1=\cdots=a_s=0$，即 $\alpha=0$，故 $\sigma(V)\cap\ker\sigma=\{0\}$，即 $\sigma(V)+\ker\sigma$ 为直和. 又因为 $\dim(\sigma(V)+\ker\sigma)=\dim\sigma(V)+\dim\ker\sigma=n$，所以 $V=\sigma(V)\oplus\ker\sigma$.

充分性　设 $V=\sigma(V)\oplus\ker\sigma$，任取 $\alpha\in\sigma(V)$，有 $\beta\in V$，使 $\alpha=\sigma(\beta)$，而 $\beta=\sigma(\beta_1)+r$，$r\in\ker\sigma$，$\beta_1\in V$，于是 $\alpha=\sigma(\beta)=\sigma^2(\beta_1)$，即 $\alpha=\sigma^2(\beta_1)\in\sigma^2(\gamma)$，故 $\sigma(V)\subseteq\sigma^2(V)$. 显然 $\sigma^2(V)\subseteq\sigma(V)$，故而 $\sigma(V)=\sigma^2(V)$，从而 秩 $A=\dim\sigma(V)=\dim\sigma^2(V)=$ 秩 A^2.

1647.　设 σ 是线性空间 V 上的线性变换，如果 $\sigma^2=\sigma$，那么 $V=\sigma(V)\oplus\ker\sigma$.

证　由第 **1646** 条可得.

1648.　设 σ 是 n 维线性空间 V 的线性变换，则存在正整数 k，使得 $\ker\sigma^k=\ker\sigma^{k+1}$，且对一切 $t\geqslant1$ 的整数，恒有 $\ker\sigma^k=\ker\sigma^{k+t}$.

证　若 $\ker\sigma=\{0\}$，则 σ 是单射，故 σ 可逆. 从而 $\{0\}=\ker\sigma=\ker\sigma^2=\cdots=\ker\sigma^k=\ker\sigma^{k+1}=\cdots=\ker\sigma^{k+t}=\cdots$

若 $\ker\sigma\neq\{0\}$，则由第 **1644** 条知

$$0<\dim\ker\sigma\leqslant\dim\ker\sigma^2\leqslant\cdots\leqslant\dim\ker\sigma^{n+1}\leqslant n.\tag{1}$$

由于不超过 n 的正整数只有 n 个，故由(1)知必存在正整数 $k\leqslant n$，使

$$\dim\ker\sigma^k=\dim\ker\sigma^{k+1}.\tag{2}$$

由于 $\dim\sigma^k(V)+\dim\ker\sigma^k=\dim\sigma^{k+1}(V)+\dim\ker\sigma^{k+1}=n$. 故由(2)得 $\dim\sigma^k(V)=\dim\sigma^{k+1}(V)$. 但 $\sigma^k(V)\supseteq\sigma^{k+1}(V)$，所以 $\sigma^k(V)=\sigma^{k+1}(V)$，于是 $\sigma^{k+2}(V)=\sigma(\sigma^{k+1}(V))=\sigma(\sigma^k(V))=\sigma^{k+1}(V)$. 递推得知对一切自然数 t 都有 $\sigma^k(V)=\sigma^{k+t}(V)$. 由 $\dim\sigma^k(V)+\dim\ker\sigma^k=\dim\sigma^{k+t}(V)+\dim\ker\sigma^{k+t}=n$ 以及 $\ker\sigma^k\subseteq\ker\sigma^{k+t}$ 得 dim

$\ker\sigma^k=\dim\ker\sigma^{k+t}$，故 $\ker\sigma^k=\ker\sigma^{k+t}$，$t\geq 1$ 的整数.

六、 正交变换

1649. 什么叫做正交变换？

答 设 σ 是欧氏空间 V 上的线性变换，且满足 $(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=(\alpha,\beta)$，$\forall\ \alpha,\beta\in V$，则称 σ 为正交变换.

1650. 设 σ 是 n 维欧氏空间 V 的线性变换，则下面的四条等价：

1）σ 是正交变换；

2）$|\sigma(\alpha)|=|\alpha|$，$\forall\ \alpha\in V$；

3）如果 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 为 V 的标准正交基，那么 $\sigma(\varepsilon_1),\cdots,\sigma(\varepsilon_n)$ 也是 V 的标准正交基；

4）σ 在任一组标准正交基下的矩阵都是正交矩阵.

1651. 设 σ 是 n 维欧氏空间 V 的线性变换，如果 σ 在 V 的一组标准正交基下的矩阵为正交矩阵，那么它在 V 的任一组标准正交基下的矩阵也是正交矩阵.

证 设 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的一组标准正交基，且 $\sigma(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)A$，其中 A 为正交矩阵，则可证 $\sigma(\varepsilon_1),\cdots,\sigma(\varepsilon_n)$ 也是 V 的标准正交基.

$\forall\ \alpha,\beta\in V$，$\alpha=k_1\varepsilon_1+\cdots+k_n\varepsilon_n$，$\beta=l_1\varepsilon_1+\cdots+l_n\varepsilon_n$，则 $(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=k_1l_1+\cdots+k_nl_n=(\alpha,\beta)$，即 σ 为正交变换，从而由第 **1650** 条即得结论.

1652. 设 V 是 n 维欧氏空间，$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为 V 的标准正交基，σ 是 V 的线性变换，$A=(a_{ij})$ 是 σ 关于这组基的矩阵，于是

$$a_{ji}=(\sigma(\alpha_i),\alpha_j),i,j=1\cdots,n.$$

证 由 $\sigma(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)A$ 得 $\sigma(\alpha_i)=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}\alpha_k$，$i=1,2,\cdots,n$. 又 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为标准正交基，故

$$(\sigma(\alpha_i),\alpha_j)=(\sum_{k=1}^{n}a_{ki}\alpha_k,\alpha_j)=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}(\alpha_k,\alpha_j)=a_{ji}.$$

1653.　设 σ,τ 是 n 维欧氏空间 V 的两个正交变换，则

1) σ 在 V 的任一组基下矩阵的行列式都等于 1 或 -1；

2) σ 是可逆变换，且 σ^{-1} 也是正交变换；

3) $\sigma\tau$ 是正交变换；

4) σ 是 V 的自同构映射.

证　取 V 的一组标准正交基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 且

$$\sigma(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)A,\tau(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)B,\quad(1)$$

由(1)知 A,B 都是正交矩阵.

1) 任取 V 的一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$，设

$$(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)T,\sigma(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)C,$$

则 $C=T^{-1}AT$. $\therefore |C|=|A|$. 但 A 为正交矩阵，所以 $|C|=|A|=$ 1 或 -1.

2) 由于 A 可逆，$\therefore\sigma$ 可逆，且

$$\sigma^{-1}(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)A^{-1}.$$

由于 A^{-1} 为正交矩阵，故 σ^{-1} 为正交变换.

3) 因 $(\sigma\tau)(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)AB$，而 AB 为正交矩阵，故 $\sigma\tau$ 是正交变换.

4) 因 σ 是正交变换，故为可逆变换. 因而 σ 是双射，又保持加法、数乘、内积运算，因此 σ 是 V 的自同构映射.

注　当 $|A|=1$ 时，称 σ 为旋转或第一类正交变换；当 $|A|=-1$ 时，称 σ 为第二类正交变换.

1654.　设 σ 是欧氏空间 V 的一个变换，若满足 $(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=(\alpha,\beta)$，$\forall\ \alpha,\beta\in V$，则 σ 是正交变换.

证　先证 $\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)$，$\forall\ \alpha,\beta\in V$. 因为

$$(\sigma(\alpha+\beta)-\sigma(\alpha)-\sigma(\beta),\sigma(\alpha+\beta)-\sigma(\alpha)-\sigma(\beta))$$
$$=(\sigma(\alpha+\beta),\sigma(\alpha+\beta))-2(\sigma(\alpha+\beta),\sigma(\alpha))-2(\sigma(\alpha+\beta),$$

$$\sigma(\beta))+2(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))+(\sigma(\alpha),\sigma(\alpha))+(\alpha(\beta),\sigma(\beta))$$
$$=(\alpha+\beta,\alpha+\beta)-2(\alpha+\beta,\alpha)-2(\alpha+\beta,\beta)+2(\alpha,\beta)+(\alpha,\alpha)$$
$$+(\beta,\beta)$$
$$=0,$$

所以　$\sigma(\alpha+\beta)-\sigma(\alpha)-\sigma(\beta)=0$，即 $\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)$.

类似地可证 $\sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha)$. 这样 σ 为线性变换，又保持内积，故 σ 是正交变换.

1655.　设 σ 是 n 维欧氏空间 V 的变换，$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 为 V 的一组标准正交基，如果 $(\sigma(\varepsilon_i),\sigma(\varepsilon_j))=(\varepsilon_i,\varepsilon_j)$，$i,j=1,2,\cdots,n$，那么 σ 是正交变换.

证　$\forall\ \alpha,\beta\in V$，则 $\alpha=k_1\varepsilon_1+\cdots+k_n\varepsilon_n$，$\beta=l_1\varepsilon_1+\cdots+l_n\varepsilon_n$，于是

$$(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}k_il_j(\sigma(\varepsilon_i),\sigma(\varepsilon_j))=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}k_il_j(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=(\alpha,\beta).$$

再由第 **1654** 条知 σ 是正交变换.

1656.　正交变换保持夹角不变.

证　设 σ 是欧氏空间 V 的正交变换，任取非零向量 $\alpha,\beta\in V$，则

$$\cos(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=\frac{(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))}{\sqrt{\sigma(\alpha),\sigma(\alpha))}\cdot\sqrt{(\sigma(\beta),\sigma(\beta))}}$$
$$=\frac{(\alpha,\beta)}{\sqrt{(\alpha,\alpha)}\sqrt{(\beta,\beta)}}=\cos(\alpha,\beta),$$

$\therefore$　　　　$(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=(\alpha,\beta)$.

注　反之不成立. 即 σ 是欧氏空间 V 的线性变换，如果保持夹角不变，σ 不一定是正交变换. 比如规定 $\sigma(\alpha)=3\alpha$，$\forall\ \alpha\in V$，显然 σ 保持夹角不变. 但 $|\sigma(\alpha)|=3|\alpha|$，长度变了，故 σ 不是正交变换.

1657.　若在欧氏空间 V 中，规定

$$d(\alpha,\beta)=|\alpha-\beta|,\forall\ \alpha,\beta\in V,$$

(称 $d(\alpha,\beta)$ 为 α 与 β 的距离)，则

1) $d(\alpha,\gamma)\leqslant d(\alpha,\beta)+d(\beta,\gamma)$;

2) 保持距离不变的变换 σ 是正交变换.

证 1) $d(\alpha,\gamma)=|\alpha-\gamma|=|\alpha-\beta+\beta-\gamma|$

$$\leqslant|\alpha-\beta|+|\beta-\gamma|=d(\alpha,\beta)+d(\beta,\gamma).$$

2) $\forall\ \alpha,\beta\in V$,因为

$$(\sigma(\alpha)-\sigma(\beta),\sigma(\alpha)-\sigma(\beta))$$
$$=(\sigma(\alpha),\sigma(\alpha))+(\sigma(\beta),\sigma(\beta)-2(\sigma(\alpha),\sigma(\beta)),$$

所以

$$|\sigma(\alpha)-\sigma(\beta)|^2=|\sigma(\alpha)|^2+|\sigma(\beta)|^2-2(\sigma(\alpha),\sigma(\beta)), \quad (1)$$
$$|\alpha-\beta|^2=|\alpha|^2+|\beta|^2-2(\alpha,\beta), \quad (2)$$
$$|\sigma(\alpha)-\sigma(\beta)|^2=[d(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))]^2=[d(\alpha,\beta)]^2=|\alpha-\beta|^2,$$
$$|\sigma(\alpha)|^2=|\sigma(\alpha)-\sigma0|^2=[d(\sigma(\alpha),\sigma0)]^2=[d(\alpha,0)]^2=|\alpha|^2.$$

类似地,$|\sigma(\beta)|^2=|\beta|^2$. 再由(1)、(2)知$(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=(\alpha,\beta)$,所以 σ 是正交变换.

1658. 正交变换的特征值只能是±1.

证 设 σ 是正交变换,λ 是 σ 的任一特征值,α 是相应的一个特征向量,则 $\sigma(\alpha)=\lambda\alpha$. 于是

$$(\alpha,\alpha)=(\sigma(\alpha),\sigma(\alpha))=(\lambda\alpha,\lambda\alpha)=\lambda^2(\alpha,\alpha).$$

从而 $\lambda^2=1$,即 $\lambda=\pm1$.

1659. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是欧氏空间 V 的一组标准正交基,试求正交变换 σ,使

$$\sigma(\alpha_1)=\frac{2}{3}\alpha_1+\frac{2}{3}\alpha_2-\frac{1}{3}\alpha_3,\sigma(\alpha_2)=\frac{2}{3}\alpha_1-\frac{1}{3}\alpha_2+\frac{2}{3}\alpha_3.$$

解 设 $\sigma(\alpha_3)=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$, $\sigma(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A$, 则由 σ 为正交变换知

$$A=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3x_1 \\ 2 & -1 & 3x_2 \\ -1 & 2 & 3x_2 \end{bmatrix}$$

必为正交矩阵.由列正交有

$$\begin{cases}6x_1+6x_2-3x_3=0,\\6x_1-3x_2+6x_3=0,\\x_1^2+x_2^2+x_3^2=1.\end{cases}$$

解之可得 $x_1=-\frac{1}{3}, x_2=x_3=\frac{2}{3}$,或 $x=\frac{1}{3}, x_2=x_3=-\frac{2}{3}$.

故 $\sigma(\alpha_3)=\frac{1}{3}\alpha_1-\frac{2}{3}\alpha_2-\frac{2}{3}\alpha_3$ 或 $\sigma(\alpha_3)=-\frac{1}{3}\alpha_1+\frac{2}{3}\alpha_2+\frac{2}{3}\alpha_3$.

因而 σ 对应的方阵为

$$A=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&2&1\\2&-1&-2\\-1&2&-2\end{bmatrix} \quad 或\ A=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&2&-1\\2&-1&2\\-1&2&2\end{bmatrix}.$$

1660. 设 η 是欧氏空间 V 中的一个单位向量,定义 $\sigma(\alpha)=\alpha-2(\eta,\alpha)\eta$,则

1) σ 是正交变换(称为镜面反射);

2) 当 V 为有限维空间时,σ 是第二类的正交变换;

3) 当 V 为 n 维欧氏空间,正交变换 σ 有特征根 1,且属于特征根 1 的特征子空间的维数为 $n-1$ 时,σ 为镜面反射.

证 1) 由于

$$\sigma(k\alpha)=k\alpha-2(\eta,k\alpha)\eta=k[\alpha-2(\eta,\alpha)\eta]=k\sigma(\alpha),$$
$$\sigma(\alpha+\beta)=(\alpha+\beta)-2(\eta,\alpha+\beta)\eta=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta),$$
$$(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=(\alpha-2(\eta,\alpha)\eta,\beta-2(\eta,\beta)\eta)=(\alpha,\beta),$$

故 σ 为正交变换.

2) 设 $\dim V=n$,将 η 扩充为 V 的一组标准正交基 $\eta,\eta_2,\cdots,\eta_n$,且

$$\sigma(\eta)=\eta-2(\eta,\eta)\eta=-\eta,$$
$$\sigma(\eta_i)=\eta_i-2(\eta,\eta_i)\eta=\eta_i, i=2,\cdots,n,$$

故 $\sigma(\eta,\eta_2\cdots,\eta_n)=(\eta,\eta_2,\cdots,\eta_n)\begin{bmatrix}-1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{bmatrix}$. 由 $|A|=-1$ 知 σ 为第二类的正交变换.

3) 取 $n-1$ 维特征子空间 V_1 的一组标准正交基 $\eta_2,\cdots,\eta_n$，再添加一个 η_1，使 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 为 V 的标准正交基. 设 $\sigma(\eta_1)=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_n\eta_n$，$k_i$ 为实数. 由于 η_i 都是 V_1 的向量，故 $\sigma(\eta_i)=\eta_i$，$i=2,\cdots,n$. σ 在基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 下的矩阵为 $A=\begin{bmatrix}k_1 & & & 0\\ k_2 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ k_n & 0 & & 1\end{bmatrix}$. 因为 σ 为正交变换，$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 为标准正交基，所以 A 为正交矩阵，从而 $k_1^2=1$，$k_2=\cdots=k_n=0$.

又 V_1 为 $n-1$ 维，故 $\eta_1\overline{\in}V_1$，即 η_1 不能是 σ 的属于特征根 1 的特征向量，故只有 $k_1=-1$，即 $\sigma(\eta_1)=-\eta_1$. 这样，对 V 中任意向量 $\alpha=a_1\eta_1+a_2\eta_2+\cdots+a_n\eta_n$，均有 $\sigma(\alpha)=\sigma(a_1\eta_1+a_2\eta_2+\cdots+a_n\eta_n)=\alpha-2(\alpha,\eta_1)\eta_1$，故 σ 为镜面反射.

1661.　1) 设 α,β 是欧氏空间 V 中两个不同的单位向量，则存在镜面反射 σ，使 $\sigma(\alpha)=\beta$；

2) n 维欧氏空间 V 中任一正交变换都可以表成一系列镜面反射的乘积.

证　1) α,β 是两个不同的单位向量，即 $(\alpha,\alpha)=(\beta,\beta)=1$，$\alpha-\beta\neq0$. 镜面反射定义为

$$\sigma(\gamma)=\gamma-2(\eta,\gamma)\eta,\forall\ \gamma\in V. \tag{1}$$

其中 η 是待定单位向量. 由于要求 $\sigma(\alpha)=\beta$，故由(1)式得

$$\alpha-2(\eta,\alpha)\eta=\beta. \tag{2}$$

由 $0\neq\alpha-\beta=2(\eta,\alpha)\eta$ 知 $(\eta,\alpha)\neq0$. 由(2)知 $\eta=\dfrac{\alpha-\beta}{2(\eta,\alpha)}$,

$0\neq(\eta,\alpha)=(\frac{\alpha-\beta}{2(\eta,\alpha)},\alpha)=\frac{1}{2(\eta,\alpha)}(\alpha-\beta,\alpha)=\frac{1}{2(\eta,\alpha)}(1-(\alpha,\beta))$，所以 $1-(\alpha,\beta)\neq0$. 又 $|(\alpha,\beta)|^2\leqslant(\alpha,\alpha)\cdot(\beta,\beta)=1$，$\therefore |(\alpha,\beta)|<1$.

令 $\eta=\frac{\alpha-\beta}{\sqrt{2(1-(\alpha,\beta))}}$，易证 $(\eta,\eta)=1$，故 η 即为(1)式所求的单位向量，且 $\sigma(\alpha)=\beta$.

2）设 σ 为 n 维欧氏空间 V 的任一正交变换，取 V 的一个标准正交基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$，则 $\eta_1=\sigma(\varepsilon_1),\cdots,\eta_n=\sigma(\varepsilon_n)$ 也是 V 的一组标准正交基. 如果 $\eta_1=\varepsilon_1,\cdots,\eta_n=\varepsilon_n$，则 σ 就是恒等变换.

作镜面反射 $\sigma_1(x)=x-2(x,\varepsilon_1)\varepsilon_1$，$\forall\ x\in V$，则有 $\sigma_1(\varepsilon_1)=-\varepsilon_1$，$\sigma_1(\varepsilon_j)=\varepsilon_j$，$j=2,\cdots,n$. 显然有 $\sigma=\sigma_1\sigma_2$.

如果 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 与 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 不全相同，假定 $\varepsilon_1\neq\eta_1$，则由 ε_1,η_1 是两个不同的单位向量及1)知，存在镜面反射 σ_1，使 $\sigma_1(\varepsilon_1)=\eta_1$.

令 $\sigma_1(\varepsilon_j)=\xi_j$，$j=2,\cdots,n$. 若 $\xi_j=\eta_j$，$j=2,\cdots,n$，则 $\sigma=\sigma_1$ 结论成立. 否则可设 $\xi_2\neq\eta_2$，再作镜面反射 σ_2：$\sigma_2(x)=x-2(x,\eta)\eta$，$\eta=\frac{\xi_2-\eta_2}{\sqrt{2(1-(\xi_2,\eta_2)}}$. 于是 $\sigma_2(\xi_2)=\eta_2$，且可验算有 $\sigma_2\eta_2=\eta_1$. 如此继续下去，设 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n\xrightarrow{\sigma_1}\eta_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\xrightarrow{\sigma_2}\eta_1,\eta_2,\xi_3\cdots,\xi_n\longrightarrow\cdots\xrightarrow{\sigma_s}\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_w$，则 $\sigma=\sigma_s\sigma_{s-1}\cdots\sigma_2\sigma_1$，其中 σ_i 都是镜面反射.

1662. 在 $n(n>2)$ 维欧氏空间 V 中，S 是向量的集合，且其中有 $n-1$ 个线性无关向量，非零向量 α 与 S 中的每一向量正交，若 V 上的线性变换 σ 不改变 S 的每一向量，而把 α 变成 $-\alpha$，则 σ 是正交变换.

证 设 S 的 $n-1$ 个线性无关的向量为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$，并令 $W=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1})$，则 W 为 V 的一个 $n-1$ 维子空间，且 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$ 为其一组基. 正交化得 W 的一组标准正交基 $\eta_1,\cdots,\eta_{n-1}$.

又 α 与 S 中每一向量正交，从而 $(\alpha,\alpha_i)=0$，$(\alpha,\eta_i)=0$，$i=1,\cdot$

$2,\cdots,n-1$. 将 α 单位化，且令 $\eta_n=\frac{\alpha}{|\alpha|}$，则 $-\eta_n=\frac{-\alpha}{|\alpha|}$. 这样就得到 V 的两组标准正交基 $\eta_1,\cdots,\eta_{n-1},\eta_n$ 与 $\eta_1,\cdots,\eta_{n-1},-\eta_n$.

因 σ 为线性变换，且不改变 S 的每一向量，而把 α 变成 $-\alpha$，故 $\sigma(\eta_i)=\eta_i,i=1,2,\cdots,n-1,\sigma(\eta_n)=-\eta_n$，即线性变换 σ 把 V 的一组标准正交基变为另一组标准正交基，即 σ 为正交变换.

1663. 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 和 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 是 n 维欧氏空间中两个向量组，则存在正交变换 σ，使 $A\alpha_i=\beta_i,i=1,\cdots,m$ 的充要条件是

$$(\alpha_i,\alpha_j)=(\beta_i,\beta_j),\ i、j=1,2,\cdots,m. \tag{1}$$

证　必要性显然，下证充分性

设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 是 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 的一个极大线性无关组，

则

$$\begin{vmatrix} (\alpha_1,\alpha_1) & \cdots & (\alpha_1,\alpha_r) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\alpha_r,\alpha_1) & \cdots & (\alpha_r,\alpha_r) \end{vmatrix} \neq 0.$$

但 $(\beta_i,\beta_j)=(\alpha_i,\alpha_j)$，所以

$$\begin{vmatrix} (\beta_1,\beta_1,) & \cdots & (\beta_1,\beta_r) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\beta_r,\beta_1) & \cdots & (\beta_r,\beta_r) \end{vmatrix} \neq 0,$$

于是 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 线性无关.

任取 $\beta_s(s=1,\cdots,m)$，由 $\alpha_s=l_{s1}\alpha_1+\cdots+l_{sr}\alpha_r$ 以及(1)式可证

$$(\beta_s-l_{s1}\beta_1-\cdots-l_{sr}\beta_r,\beta_s-l_{s1}\beta_1-\cdots-l_{sr}\beta_r)=0.$$

从而 $\beta_s=l_{s1}\beta_1+\cdots+l_{sr}\beta_r$. 这样 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 也是 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 的一个极大线性无关组.

再将 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 正交单位化，即

$$(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_r)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)T,\text{其中 } T=\begin{bmatrix} t_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & t_r \end{bmatrix},\text{且 } t_i>0,$$

$i=1,\cdots,r$ 使 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_r$ 为正交单位向量组.

再令 $(\eta_1,\cdots,\eta_r)=(\beta_1,\cdots,\beta_r)T$，则 $\eta_1,\cdots,\eta_r$ 也是正交单位向量组.

分别将 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_r$ 和 $\eta_1,\cdots,\eta_r$ 扩充为 V 的两组标准正交基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 和 $\eta_1,\cdots,\eta_n$，则存在线性变换 σ，使 $\sigma(\varepsilon_i)=\eta_i,i=1,\cdots,n$，且 $(\beta_1,\cdots,\beta_r)T=(\eta_1,\cdots,\eta_r)=(\sigma(\varepsilon_1),\cdots,\sigma(\varepsilon_r))=(\sigma(\alpha_1),\cdots,\sigma(\alpha_r))T$

$\therefore\quad(\beta_1,\cdots,\beta_r)=(\sigma(\alpha_1),\cdots,\sigma(\alpha_r))$，即 $\sigma(\alpha_i)=\beta_i,i=1,2,\cdots,r.$

$\forall\ \beta_s$，有 $\alpha_s=l_{s1}\alpha_1+\cdots+l_{sr}\alpha_r,\beta_s=l_{s1}\beta_1+\cdots+l_{sr}\beta_r$，

$\therefore\quad\sigma(\alpha_s)=l_{s1}\sigma(\alpha_1)+\cdots+l_{sr}\sigma(\alpha_r)=\beta_s,s=1,2,\cdots,m.$

七、 酉变换

1664. 什么叫做酉变换?

答 设 V 是酉空间，σ 是 V 的线性变换，如果满足 $(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=(\alpha,\beta),\forall\ \alpha,\beta\in V$，那么称 σ 是 V 的一个酉变换.

1665. 设 V 是 n 维酉空间，σ 是 V 的线性变换，则下面的五条等价：

1) σ 是酉变换；

2) $|\sigma\alpha|=\alpha,\ \forall\ \alpha\in V$；

3) σ 在某一组标准正交基下矩阵为酉矩阵；

4) σ 把任一标准正交基变为标准正交基；

5) σ 在任一组标准正交基下矩阵为酉矩阵.

证 1)⇒2) 因为 $|\sigma(\alpha)|^2=(\sigma(\alpha),\sigma(\alpha))=(\alpha,\alpha)=|\alpha|^2$，所以 $|\sigma\alpha|=|\alpha|$.

2)⇒3). 设 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 为 V 的一组标准正交基，$\sigma(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)A$，$(\sigma(\varepsilon_k+\varepsilon_j),\sigma(\varepsilon_k+\varepsilon_j))=(\varepsilon_k,\varepsilon_k)+(\varepsilon_j,\varepsilon_j)+(\varepsilon_k,\varepsilon_j)+(\varepsilon_j,\varepsilon_k)$，则由 $|\sigma(\alpha)|=|\alpha|$ 得

$$(\sigma\varepsilon_k,\sigma\varepsilon_j)+(\sigma\varepsilon_j,\sigma\varepsilon_k)=(\varepsilon_k,\varepsilon_j)+(\varepsilon_j,\varepsilon_k).$$

用 $i\varepsilon_k$ 换 ε_k 得

$$(\sigma(i\varepsilon_k),\sigma\varepsilon_j)+(\sigma\varepsilon_j,\sigma(i\varepsilon_k))=(i\varepsilon_k,\varepsilon_j)+(\varepsilon_j,i\varepsilon_k).$$

$$\therefore\quad i(\sigma\varepsilon_k,\sigma\varepsilon_j)-i(\sigma\varepsilon_j,\sigma\varepsilon_k)=i(\varepsilon_k,\varepsilon_j)-i(\varepsilon_j,\varepsilon_k).$$

化简得　$(\sigma\varepsilon_k,\sigma\varepsilon_j)=(\varepsilon_k,\varepsilon_j)$. 又

$$a_{1k}\bar{a}_{1j}+\cdots+a_{nk}\bar{a}_{nj}=(\sigma\varepsilon_k,\sigma\varepsilon_j)=(\varepsilon_k,\varepsilon_j)=\begin{cases}1,k=j;\\0,k\neq j.\end{cases}$$

即 $\bar{A}'A=E$, A 为酉矩阵.

3)⇒4). 设 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 为 V 的一组标准正交基, σ 在 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 下的矩阵为 A,那么

$$\begin{aligned}(\sigma(\varepsilon_i),\sigma(\varepsilon_j))&=(a_{1i}\varepsilon_1+\cdots+a_{ni}\varepsilon_n,a_{1j}\varepsilon_1+\cdots+a_{nj}\varepsilon_n)\\&=a_{1i}\bar{a}_{1j}+\cdots+a_{ni}\bar{a}_{nj}=\begin{cases}1,\ i=j;\\0,\ i\neq j.\end{cases}\end{aligned}$$

即 $\sigma(\varepsilon_1),\cdots,\sigma(\varepsilon_n)$ 为 V 的一组标准正交基.

4)⇒1). 在 V 中取一组标准正交基 $\varepsilon_1,\cdots\varepsilon_n$, $\sigma(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)A$,由假设知 $\sigma(\varepsilon_1),\cdots,\sigma(\varepsilon_n)$ 为标准正交基,所以 A 为酉矩阵. 对任意的 $\alpha,\beta\in V$, $\alpha=\sum\limits_{i=1}^{n}k_i\varepsilon_i$, $\beta=\sum\limits_{i=1}^{n}l_i\varepsilon_i$, $(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=(\sum\limits_{i=1}^{n}k_i\sigma(\varepsilon_i),\sum\limits_{i=1}^{n}l_i\sigma(\varepsilon_i))=\sum\limits_{i=1}^{n}k_i\bar{l}_i$, $(\alpha,\beta)=(\sum\limits_{i=1}^{n}k_i\varepsilon_i,\sum\limits_{i=1}^{n}l_i\varepsilon_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}k_i\bar{l}_i$, $\therefore(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=(\alpha,\beta)$. 由 σ 的任意性知 σ 为酉变换.

5)⇒3). 显然.

3)⇒5). 设 $\sigma(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)A$,其中 A 是酉矩阵,任取 V 的一组标准正交基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$,且

$$\sigma(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)B,\tag{1}$$

$$(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)X,\tag{2}$$

则 X 是酉矩阵, $B=X^{-1}AX$,从而 B 为酉矩阵.

1666.　对于 n 维酉空间 V 而言,有

1）酉变换是自同构映射；

2）酉变换是可逆变换，其逆也是酉变换；

3）两个酉变换之积是酉变换；

4）酉变换在任一组基下的矩阵的行列式的模等于 1；

5）酉变换的特征值为 $e^{i\theta}$.

证　1)，2)，3)的证明同第 **1653** 条.

4）设酉矩阵为 A，则 $A\overline{A}'=E$. $\therefore \det A\cdot\det\overline{A}'=\det A\cdot\det\overline{A}=1$. 故 $|\det A|^2=1$，$|\det A|=1$.

设 σ 是 n 维酉空间 V 的线性变换，取 V 的一组标准正交基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$，且 $\sigma(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)A$，其中 A 为酉矩阵. 再任取一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$，设 $\sigma(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)B$，那么 $B=X^{-1}AX$，$\therefore \det B=\det A$.

5）由于酉矩阵的模等于 1.

八、　对称变换

1667.　什么叫做对称变换？

答　V 是 n 维欧氏空间，σ 是 V 的线性变换，如果满足

$$(\sigma(\alpha),\beta)=(\alpha,\sigma(\beta)),\forall\ \alpha,\beta\in V,$$

那么称 σ 为对称变换.

1668.　设 σ 是欧氏空间 V 的对称变换，则

1）σ 在 V 的标准正交基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 下的矩阵为对称矩阵；

2）当 V_1 是 σ 的不变子空间时 $V_1^{\perp}$ 也是.

证　1）设 $\sigma(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)A$，$A=(a_{ij})$，那么 $a_{ji}=(\sigma(\varepsilon_i),\varepsilon_j)=(\varepsilon_i,\sigma(\varepsilon_j))=(\sigma(\varepsilon_j),\varepsilon_i)=a_{ij}$，$i$、$j=1,2,\cdots,n$.

2）$\forall\ \alpha\in V_1^{\perp}$，下证 $\sigma(\alpha)\in V_1^{\perp}$. $\forall\ \beta\in V_1$，则 $\sigma(\beta)\in V_1$，所以 $(\sigma(\alpha),\beta)=(\alpha,\sigma(\beta))=0$，由 β 的任意性知$(\sigma(\alpha)\in V_1^{\perp}$.

1669.　设 σ 是 n 维欧氏空间 V 的一个线性变换，σ 在基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵为 A，则 σ 为对称变换的充要条件是 $A'G=GA$，其

中 G 为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 的度量矩阵.

证　设 $\alpha=x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n,\beta=y_1\alpha_1+\cdots+y_n\alpha_n$ 为 V 中任意两个向量,则 $(\alpha,\beta)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}x_i(\alpha_i,\alpha_j)y_j=X'GY$,其中 $X=(x_1,\cdots,x_n)'$,$Y=(y_1,\cdots,y_n)'$. 由条件知 $\sigma(\alpha)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)AX$,
$\sigma(\beta)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)AY$. 故
$(\sigma(\alpha),\beta)=(AX)'GY=X'A'GY,(\alpha,\sigma(\beta))=X'G(AY)=X'GAY$.
于是 σ 为对称变换的充要条件为 $A'G=GA$.

1670.　设 σ 是 n 维欧氏空间 V 的一个对称变换,则存在 V 的一组标准正交基,σ 关于这组基的矩阵为 $\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$.

1671.　设 σ 是 n 维欧氏空间 V 的一个线性变换,则 σ 是对称变换的充要条件是 σ 有 n 个两两正交的特征向量.

证　必要性　因为 σ 是对称变换,所以存在 V 的标准正交基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$,使 σ 关于这组基的矩阵为对角矩阵,即

$$\sigma(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix},$$

其中 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 为两两正交的特征向量.

充分性　设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为 σ 的 n 个两两正交的特征向量,而且 $\sigma(\alpha_i)=\lambda_i\alpha_i$,$\lambda_i$ 为特征值,$i=1,2,\cdots,n$. 令 $\varepsilon_i=\dfrac{\alpha_i}{|\alpha_i|}$,$i=1,\cdots,n$,则 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 为 V 的一组标准正交基. 由于 $\sigma(\varepsilon_i)=\dfrac{1}{|\alpha_i|}\sigma(\alpha_i)=\dfrac{\lambda}{|\alpha_i|}\alpha_i$
$=\lambda_i\varepsilon_i,i=1,\cdots,n$,所以 σ 关于标准正交基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 的矩阵为实对角矩阵,从而也是实对称矩阵,故 σ 是对称变换.

1672.　设 σ 是 n 维欧氏空间 V 的一个线性变换,若 σ 满足下列三个条件中的任意两个,则它必然满足第三个:

1) σ 是正交变换;

2) σ 是对称变换;

3) $\sigma^2=I_V$.

证 1),2)$\Rightarrow$3). 设 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的一组标准正交基,σ 关于这组基的矩阵是 A,则 σ^2 关于这组基的矩阵是 A^2. 因 σ 是正交变换,$\therefore A$ 是正交矩阵,即 $AA'=I$. 又 σ 是对称变换,$\therefore A=A'$. 因而 $A^2=AA=A'A=I$,故 $\sigma^2=I_V$.

1),3)$\Rightarrow$2). 因为 σ 是正交变换,而且 $\sigma^2=I_V$. $\forall\ \xi,\eta\in V$, $(\sigma(\xi),\eta)=(\sigma(\xi),I_V(\eta))=(\sigma(\xi),\sigma^2(\eta))=(\xi,\sigma(\eta))$.

2),3)$\Rightarrow$1). $\forall\ \xi,\eta\in V$,于是 $(\sigma(\xi),\sigma(\eta))=(\xi,\sigma^2(\eta))=(\xi,\eta)$.

1673. 1) 证明两个对称变换的和还是一个对称变换;

2) 两个对称变换的积是否为对称变换?

3) 找出两个对称变换的积是对称变换的充要条件.

证 设 σ,τ 是 V 的对称变换,则 $\forall\ \alpha,\beta\in V$,

$$((\sigma+\tau)(\alpha),\beta)=(\sigma(\alpha)+\tau(\alpha),\beta)=(\sigma(\alpha),\beta)+(\tau(\alpha),\beta)$$
$$=(\alpha,\sigma(\beta))+(\alpha,\tau(\beta))=(\alpha,(\sigma+\tau)(\beta)).$$

$\therefore \sigma+\tau$ 是对称变换.

两个对称变换的积不一定是对称变换. 但不难证明两个对称变换的积仍是对称变换的充要条件为 $\sigma\tau=\tau\sigma$.

1674. 设 σ 是欧氏空间 V 的对称变换,则 $\sigma(V)$ 是 $\ker\sigma$ 的正交补.

证 取 $\ker\sigma$ 的正交基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$. $\forall\ \beta\in\sigma(V)$,则 $\beta=\sigma(\alpha)$, $\alpha\in V$. $\because(\beta,\alpha_i)=(\sigma(\alpha),\alpha_i)=(\alpha,\sigma(\alpha_i))=(\alpha,0)=0$, $\therefore\beta\perp\ker\sigma$, $\beta\in(\ker\sigma)^{\perp}$, $\sigma(V)\subseteq(\ker\sigma)^{\perp}$.

其次, $\dim\sigma(V)=n-\dim\ker\sigma$, $\dim(\ker\sigma)^{\perp}=n-\dim\ker\sigma$, 故 $\sigma(V)=(\ker\sigma)^{\perp}$.

1675. 设 σ 是 V 的对称变换,则对于 $\alpha\in V$, $(\sigma(\alpha),\alpha)\geqslant 0$ $\Longleftrightarrow\sigma$ 的特征值全是非负实数.

证 σ 是对称变换,σ 关于 V 的一个标准正交基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 的矩

阵 $A=(a_{ij})$是实对称矩阵. $\forall\ \alpha=x_1\varepsilon_1+\cdots+x_n\varepsilon_n\in V$,则

$(\sigma(\alpha),\alpha)=(x_1\sigma(\varepsilon_1)+\cdots+x_n\sigma(\varepsilon_n),x_1\varepsilon_1+\cdots+x_n\varepsilon_n)=X'AX.$

由此可知,$(\sigma(\alpha),\alpha)\geqslant0\Longleftrightarrow X'AX\geqslant0\Longleftrightarrow A$ 是半正定矩阵$\Longleftrightarrow A$ 的特征值全是非负实数$\Longleftrightarrow\sigma$ 的特征根全是非负实数.

1676. 设 σ 是 n 维欧氏空间 V 的一个对称变换,λ_0 是 σ 的一个特征根,则 λ_0 的代数重数等于特征子空间 V_{λ_0} 的维数.

证 由于实对称矩阵可对角化,因此几何重数等于代数重数. 故而结论成立.

九、 反对称变换

1677. 什么叫反对称变换?

答 欧氏空间 V 的一个线性变换 σ 称为反对称的,如果有 $(\sigma(\alpha),\beta)=-(\alpha,\sigma(\beta)),\forall\ \alpha,\beta\in V.$

1678. 设 σ 是 n 维欧氏空间 V 的线性变换,那么

1) σ 为反对称的$\Longleftrightarrow\sigma$ 在标准正交基下的矩阵为反对称矩阵;

2) 当 V_1 是反对称变换 σ 的不变子空间时,$V_1^{\perp}$ 也是.

证 证法类似于第 **1668** 条.

1679. 设 σ 为欧氏空间 V 的一个变换,如果对 V 中任意向量 α,β,都有$(\sigma(\alpha),\beta)=-(\alpha,\sigma(\beta))$,那么 σ 必为反对称变换.

证 $\forall\ \alpha,\beta\in V$,$\because(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=-(\alpha,\sigma^2(\beta))$
$=-(\sigma^2(\alpha),\beta)$,$\therefore(\alpha,\sigma^2(\beta))=(\sigma^2(\alpha),\beta)$. 从而

$$\begin{aligned}(\sigma(\alpha+\beta),\sigma(\gamma))&=-(\alpha+\beta,\sigma^2(\gamma))=-(\alpha,\sigma^2(\gamma))-(\beta,\sigma^2(\gamma))\\&=(\sigma(\alpha),\sigma(\gamma))+(\sigma(\beta),\sigma(r))\\&=(\sigma(\alpha)+\sigma(\beta),\sigma(r)).\end{aligned}$$

于是 $(\sigma(\alpha+\beta)-(\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)),\sigma(\alpha+\beta)-(\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)))$

$$\begin{aligned}&=\sigma(\alpha+\beta),\sigma(\alpha+\beta))-2(\sigma(\alpha+\beta),\sigma(\alpha)+\sigma(\beta))\\&\quad+(\sigma(\alpha)+\sigma(\beta),\sigma(\alpha)+\sigma(\beta))\end{aligned}$$

$$=(\sigma(\alpha+\beta),\sigma(\alpha+\beta))-2(\sigma(\alpha+\beta),\sigma(\alpha+\beta))$$
$$+(\sigma(\alpha+\beta),\sigma(\alpha+\beta))=0.$$

故 $\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)$. 类似地 $\sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha)$.

1680. 设 σ 为 n 维欧氏空间 V 的一个反对称变换，则

1) 线性变换 $\sigma\pm I_V$ 均为满秩的；

2) 线性变换 $\tau=(\sigma-I_V)(\sigma+I_V)^{-1}$ 为正交变换.

证 取 V 的一组标准正交基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$. 设 σ 和 I_V 在这组基下的矩阵为 A 和 E,则 $\sigma\pm I_V$ 在这组基下的矩阵为 $A\pm E$.

1) 因为 σ 为反对称变换,所以 A 为反对称矩阵,由 A 的特征值只能为零或纯虚数知 $|1\cdot E-A|=|E-A|\neq 0$,即 $|A-E|\neq 0$. 于是 $\sigma-I_V$ 是满秩的. 又 $(A+E)'=A'+E=E-A$,故 $A+E$ 也为满秩矩阵. 因此 $\sigma+I_V$ 也为满秩的.

2) 因 $\tau=(\sigma-I_V)(\sigma+I_V)^{-1}$ 在上述基下的矩阵为 $U=(A-E)(A+E)^{-1}$,容易验证 U 为正交矩阵,故 τ 为正交变换.

十、 共轭变换

1681. 什么叫做共轭变换?

答 设 σ 是 n 维欧氏空间 V 的任一线性变换,σ 在 V 的标准正交基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 下的矩阵是 A,则称 A' 在基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 下所对应的线性变换 σ' 为 σ 的共轭(线性)变换. 有时也称 σ' 为 σ 的转置变换.

1682. 设 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 为欧氏空间 V 的一组标准正交基,σ' 是 σ 的共轭变换,则 $(\sigma(\varepsilon_i),\varepsilon_k)=(\varepsilon_i,\sigma'(\varepsilon_k))$.

证 因为

$$(\sigma(\varepsilon_i),\varepsilon_k)=(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\varepsilon_j,\varepsilon_k)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(\varepsilon_j,\varepsilon_k)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\delta_{jk}=a_{ik},$$

$$(\varepsilon_i,\sigma'(\varepsilon_k))=(\varepsilon_i,\sum_{j=1}^{n}a_{jk}\varepsilon_j)=\sum_{j=1}^{n}a_{jk}(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=\sum_{j=1}^{n}a_{jk}\delta_{ij}=a_{ik},$$

故结论成立.

1683. 设 σ 是 n 维欧氏空间 V 的线性变换,则 V 的线性变换 τ 是 σ 的共轭变换的充要条件是对 V 中任意向量 α,β,有

$$(\sigma(\alpha),\beta)=(\alpha,\sigma(\beta)). \tag{1}$$

证　取 V 的标准正交基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$,任取 $\alpha,\beta\in V$,则

$$\alpha=\sum_{j=1}^{n}k_j\varepsilon_j,\ \beta=\sum_{j=1}^{n}l_j\varepsilon_j.$$

必要性　若 $\tau=\sigma'$,则由 **1682** 条知

$$(\sigma(\alpha),\beta)=(\sigma(\sum_{j=1}^{n}k_j\varepsilon_j),\sum_{j=1}^{n}l_j\varepsilon_j)=\sum_{i,j=1}^{n}k_il_j(\sigma(\varepsilon_i),\varepsilon_j)$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n}k_il_j(\varepsilon_i,\sigma'(\varepsilon_j))=(\alpha,\sigma'(\beta)).$$

充分性　因为对 σ 的共轭变换 σ',上面的必要性已经证明了

$$(\sigma(\alpha),\beta)=(\alpha,\sigma'(\beta)). \tag{2}$$

由(1)式与(2)式得 $(\alpha,\sigma'(\beta))=(\alpha,\tau(\beta))$,或 $(\alpha,(\sigma'-\tau)(\beta))=0$. 因 α,β 是任意的,故取 $\beta=\varepsilon_j$,$(\sigma'-\tau)(\varepsilon_j)=\alpha$ 得 $(\sigma'-\tau)(\varepsilon_j)=0$,$j=1,\cdots,n$,所以 $\sigma'-\tau=0$,即 $\sigma'=\tau$.

1684. 用 σ' 表示 n 维欧氏空间 V 上线性变换 σ 的共轭变换,则

1) $(\sigma')'=\sigma$;

2) $(k\sigma)'=k\sigma'$,k 为实数;

3) $(\sigma_1+\sigma_2)'=\sigma'_1+\sigma'_2$;

4) $(\sigma_1\sigma_2)'=\sigma'_2\sigma'_1$.

证　取标准正交基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$,记 $\sigma(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)A$,由矩阵的性质可证 1),2),3),4).

十一、 幂零变换

1685. 什么叫做幂零变换?

答 设 σ 是 n 维线性空间 V 的一个线性变换，如果存在自然数 m，使 $\sigma^m=0$，那么称 σ 是幂零变换.

1686. 设 σ 是 n 维线性空间 V 上的任一线性变换，则存在线性变换 τ,υ，使得 $\sigma=\tau+\upsilon$，其中 τ 可以对角化而 υ 为幂零的.

证 设 σ 关于 V 的基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 的矩阵为 A，由第 **1257** 条可知 $A=D+N$，这里 D 与对角矩阵相似，N 是幂零矩阵.

设 D 和 N 关于所取基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 所对应的线性变换分别为 τ 和 υ，则由 $A=D+N$ 可得 $\sigma=\tau+\upsilon$，并且由 D 是可对角化的知 τ 也是可对角化的，由 N 是幂零的知 υ 也是幂零的.

1687. 1）有限维线性空间 V 的幂零变换的特征根都是零；

2）如果有限维线性空间 V 的幂零变换 σ 可以对角化，那么 σ 一定是零变换.

证 1）因为幂零矩阵的特征值都是 0.

2）若 A 可以对角化，则存在可逆矩阵 T，使得

$$T^{-1}AT=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}.$$

由 1)知 $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$，故 $T^{-1}AT=0$，因此 $A=T0T^{-1}=0$. 从而 A 对应的线性变换 $\sigma=0$.

1688. 设 σ 为 n 维线性空间 V 中的幂零线性变换，则在 V 中存在一组基

$$\begin{cases}\alpha_1,\sigma(\alpha_1),\cdots,\sigma^{N_1-1}(\alpha_1),\sigma^{N_1}(\alpha_1)=0;\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \alpha_s,\sigma(\alpha_s),\cdots,\sigma^{N_s-1}(\alpha_s),\sigma^{N_s}(\alpha_s)=0;\end{cases}$$

其中 $N_1,\cdots,N_s$ 为自然数，且 $N_1+N_2+\cdots+N_s=n$.

证 若 $\alpha\in V$，有 $\sigma^{N-1}(\alpha)\neq0$，但 $\sigma^N(\alpha)=0$，则称 α 的高度为

N. 令 $W=L(\alpha,\sigma(\alpha),\cdots,\sigma^{N-1}(\alpha))$，则 W 是 σ 的不变子空间，且 $\dim W=N$，并称 W 为循环子空间. 下面只要证明 V 可以分解为若干个循环子空间的直和即可.

在 V 中取维数最大的循环子空间为 W，且

$$W=L(\alpha,\sigma(\alpha),\cdots,\sigma^{m-1}(\alpha)),\dim W=m,$$

即 $\sigma^{m-1}\alpha\neq 0,\sigma^{m}(\alpha)=0$.

若 $m=n$，则 V 就是循环子空间.

若 $m<n$，则讨论与 W 交为 $\{0\}$ 的一切不变子空间，记其中最大维数的不变子空间为 H，令

$$M=W\oplus H \tag{1}$$

下证 $V=M$. 由 $M\subseteq V$ 知只要证 $V\subseteq M$ 即可.

对 V 中向量的高度用数学归纳法. V 中高度为 0 的向量，只有唯一零向量 $0\in M$.

归纳假定 V 中高度为 k 的向量 $\gamma\in V$，都有 $\gamma\in M$. 再取 V 中高度为 $k+1$ 的向量 β，下证 $\beta\in M$.

$$0=\sigma^{k+1}(\beta)=\sigma^{k}(\sigma(\beta)),$$

即 $\sigma(\beta)$的高度为 k，由归纳假定 $\sigma(\beta)\in M=W\oplus H$，从而

$$\sigma(\beta)=\alpha_1+\alpha_2,\text{其中 }\alpha_1\in M,\alpha_2\in H. \tag{2}$$

用 σ^k 作用(2)式，得

$$0=\sigma^{k}(\alpha_1)+\sigma^{k}(\alpha_2). \tag{3}$$

由于 W 与 H 均为 σ 的不变子空间，所以 $\sigma^{k}(\alpha_1)\in W,\sigma^{k}(\alpha_2)\in H$. 而 W 与 H 是直和，则由(3)式知

$$\sigma^{k}(\alpha_1)=\sigma^{k}(\alpha_2)=0.$$

由 $\alpha_1\in W$，则

$$\alpha_1=k_0\alpha+k_1\sigma(\alpha)+\cdots+k_{m-1}\sigma^{m-1}(\alpha) \tag{4}$$

用 σ^{m-1}作用，并注意 $k+1\leqslant m,k\leqslant m-1$，则

$$0=\sigma^{m-1}(\alpha_1)=k_0\sigma^{m-1}(\alpha).$$

但 $\sigma^{m-1}(\alpha)\neq 0$，$\therefore k_0=0$. 由(4)式得

$$\alpha_1=\sigma(k_1\alpha+\cdots+k_{m-1}\sigma^{m-2}(\alpha))=\sigma(\alpha_3), \qquad (5)$$

其中 $\alpha_3=k_1\alpha+\cdots+k_{m-1}\sigma^{m-2}\alpha\in W$.

由(1),(5)两式得 $\sigma(\beta)=\sigma(\alpha_3)$ 或 $\alpha_2=\sigma(\beta-\alpha_3)\in H$.

令

$$T=L(\beta-\alpha_3)+H, \qquad (6)$$

$\forall\ \gamma\in L(\beta-\alpha_3)+\alpha_4\in T$,其中 $\alpha_4\in H$,则

$$\sigma(\gamma)=l\sigma(\beta-\alpha_3)+\sigma(\alpha_4)=l\alpha_2+\sigma(\alpha_4)\in H\subseteq T,$$

即证得 T 为 σ 的不变子空间.

1) 当 $T=H$ 时,$\beta-\alpha_3\in H$(由(6)式知). 令 $\beta-\alpha_3=\alpha_5\in H$,$\therefore$ $\beta=\alpha_3+\alpha_5\in W+H=M$. 即得 $V\subseteq M$.

2) 当 $T\neq H$ 时,H 是 T 的真子空间. 由于 H 是与 W 交为 $\{0\}$ 的最大不变子空间,所以 $T\cap W\neq\{0\}$.

令 $\alpha_6\in T\cap W$,$\alpha_6\neq 0$,因为 $\alpha_6\in W$,$\alpha_6\in T$,所以

$$\alpha_6=k(\beta-\alpha_3)+\alpha_7,\text{其中 }\alpha_7\in H \qquad (7)$$

可证 $k\neq 0$. 否则若 $k=0$,则 $\alpha_6=\alpha_7\in H$,这与 $W\cap H=\{0\}$ 矛盾. 所以 $k\neq 0$. 由(7)式得 $\beta=(\alpha_3+\frac{1}{k}\alpha_6)-\frac{1}{k}\alpha_7\in W+H$,$\therefore V\subseteq M$. 从而 $V=W\oplus H$,其中 W 是循环子空间,H 是 σ 的不变子空间. 把 H 看成 V,则 $H=H_1\oplus H_2$,其中 H_1 是循环子空间,H_2 是 σ 的不变子空间. 这样继续下去,经过有限步便得 $V=W_1\oplus\cdots\oplus W_s$,其中 W_i 都是循环子空间.

十二、 幂等变换

1689. 什么叫做幂等变换?

答 线性变换 σ 是幂等变换,如果 $\sigma^2=\sigma$.

1690. 设 V 是 n 维线性空间,则 V 上任意线性变换必可表为一个可逆线性变换与一个幂等变换的乘积.

证 由第 **1592** 条及第 **1252** 条可得.

1691.　设 σ 是 n 维线性空间 V 的幂等变换，则

1) σ 可对角化；

2) σ 的特征根只能是 0 或 1；

3) $V=V_0\oplus V_1$，其中 V_0 为 σ 的特征根 0 的特征子空间，V_1 为 σ 的特征根 1 的特征子空间.

证　由第 **1592** 条及第 **1065** 条可得.

十三、　对合变换

1692.　什么叫做对合变换？

答　数域 P 上 n 维线性空间 V 的一个线性变换 σ 叫做对合变换，如果 $\sigma^2=I_V$.

1693.　设 σ 是 V 的一个对合变换，则

1) σ 的特征根只能是 ± 1；

2) σ 可对角化；

3) $V=V_1\oplus V_{-1}$，这里 V_1 是 σ 的属于特征根 1 的特征子空间，V_{-1} 是 σ 的属于特征根 -1 的特征子空间.

证　由第 **1592** 条及第 **1077** 条可得.

十四、　不变子空间

1694.　什么叫做不变子空间？

答　设 σ 是线性空间 V 的线性变换，W 是 V 的子空间，如果 $\forall \xi\in W$，有 $\sigma(\xi)\in W$，那么称 W 是 σ 的不变子空间，简称 σ-子空间.

1695.　设 W 是数域 P 上 n 维线性空间 V 的子空间，σ 是 V 的线性变换，则

1) $W=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$ 是 σ-子空间 $\Longleftrightarrow \sigma(\alpha_i)\in W, i=1,\cdots,s$；

2) σ 在 V 的某基下矩阵为准对角矩阵 $\begin{bmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_s \end{bmatrix}$ 的充要

条件是 $V=W_1\oplus\cdots\oplus W_s$，其中 W_i 为 σ-子空间，$i=1,\cdots,s$；

3）当特征多项式 $f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s}$ 时，V 要分解为不变子空间的直和 $V=W_1\oplus\cdots\oplus W_s$，其中

$$W_i=\{\alpha\mid(\sigma-\lambda_i I_V)^{r_i}(\alpha)=0,\alpha\in V\}；$$

4）$\sigma(V)$ 和 $\ker\sigma$ 都是 σ-子空间；

5）当 $g(x)\in P[x]$ 时，$(g(\sigma))(V)$，$\ker(g(\sigma))$ 都是 σ-子空间.

1696. 设 W 为 σ-子空间，也是 τ-子空间，W 是否为 $(\sigma+\tau)$-子空间，$(\sigma\tau)$-子空间？

答 是. 事实上，$\forall\ \alpha\in W$，由于 $\sigma(\alpha)\in W$，$\tau(\alpha)\in W$，所以 $(\sigma+\tau)(\alpha)=\sigma(\alpha)+\tau(\alpha)\in W$，故 W 是 $(\sigma+\tau)$-子空间. 类似地可得 W 也是 $(\sigma\tau)$-子空间.

1697. 若 W_1,W_2 都是 σ-子空间，W_1+W_2，$W_1\cap W_2$ 是否也是 σ-子空间？

答 是. 事实上，W_1+W_2，$W_1\cap W_2$ 都是 V 的子空间. $\forall\ \alpha\in W_1+W_2$，$\alpha=\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_1\in W_1$，$\alpha_2\in W_2$，则 $\sigma(\alpha)=\alpha(\alpha_1+\alpha_2)=\sigma(\alpha_1)+\sigma(\alpha_2)$. $\because\sigma(\alpha_1)\in W_1$，$\sigma(\alpha_2)\in W_2$，$\therefore\sigma(\alpha)\in W_1+W_2$. 从而知 W_1+W_2 为 σ-子空间. 类似地可得 $W_1\cap W_2$ 是 σ-子空间.

1698. 若 W 是 σ-子空间，且 σ 可逆，W 是否也是 σ^{-1}—子空间？

解 当 $\dim V=n$ 时，结论成立. 事实上，当 $W=\{0\}$ 时显然. 当 $W\neq\{0\}$ 时，任取 W 的一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$，由于 W 对 σ 不变，且 σ 可逆，故 $\sigma(\alpha_1)\cdots,\sigma(\alpha_s)$ 为 W 中 s 个线性无关的向量，从而为 W 的基. 又由于 $\sigma(W)\subseteq W$，故 $\sigma(\alpha_1),\cdots,\sigma(\alpha_n)$ 也是 $\sigma(W)$ 的一组基，因此 $\sigma(W)=W$. 这样，$\forall\ \alpha\in W$，便有 $\beta\in W$，使 $\sigma(\beta)=\alpha$. 于是 $\sigma^{-1}(\alpha)=\beta\in W$，即 W 也是 σ^{-1}-子空间.

但是，对无限维线性空间来说，结论不真，如令 P 为数域，

$$V=\{\sum_{-\infty}^{+\infty}a_ix_i\mid a_i\in P,只有有限个\ a_i\neq 0\}.$$

规定

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_i x_i = \sum_{-\infty}^{+\infty} b_i x_i \Longleftrightarrow a_i = b_i,$$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_i x_i + \sum_{-\infty}^{+\infty} b_i x_i = \sum_{-\infty}^{+\infty} (a_i + b_i) x_i,$$

$$k \sum_{-\infty}^{+\infty} a_i x_i = \sum_{-\infty}^{+\infty} k a_i x_i, k \in P.$$

易证 V 为无限维线性空间. 定义 V 的一个变换 σ 如下：

$$\sigma\left(\sum_{-\infty}^{+\infty} a_i x_i\right) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_i x_{i+1}.$$

易知 σ 是 V 的一个可逆线性变换，且 $\sigma(x_i) = x_{i+1}$，$\sigma^{-1}(x_i) = x_{i-1}$，$i = \pm 1, \pm 2, \cdots$. 令 $W = L(x_0, x_1, x_2)$，显然 $\sigma(W) \subseteq W$，但 $\sigma^{-1}(W)$ 不包含 W，因为 $\sigma^{-1} x_0 = x_{-1} \overline{\in} W$.

1699.　设 σ 是 R^2 的线性变换，σ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 下的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$，试求 σ 的所有不变子空间.

解　显然 $\{0\}$ 和 R^2 是 σ-子空间. 若 W 为 σ 的非平凡不变子空间，则 $\dim W = 1$. 令 $W = L(\alpha)$，则 $\sigma(\alpha) = \lambda\alpha$，即 α 为 λ 的特征向量，λ 为 σ 的实特征值. 但 $|\lambda E - A| = \lambda^2 + 1 \neq 0$，故上述 W 不存在，即 σ 仅有两个不变子空间.

1700.　设 $V = R_n[x]$ 为全体次数小于 n 的实系数多项式和零多项式所成的实数域 R 上的线性空间. 对于 $f(x) \in R_n[x]$，定义：$\sigma(f(x)) = f'(x)$ （$f'(x)$ 表示 $f(x)$ 的微商），则

1) $I_V - \sigma$ 为可逆线性变换；

2) 求出线性变换 σ 的全部不变子空间.

解　1) 在 $R_n[x]$ 的基 $1, x, \frac{x^2}{2!}, \cdots, \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ 下，I_V 和 σ 的矩阵分别为单位矩阵和

$$D=\begin{pmatrix}0 & 1 & & 0\\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & 0\end{pmatrix},$$

所以线性变换 $I_V-\sigma$ 关于上面所取基的矩阵为

$$E-D=\begin{pmatrix}1 & -1 & & 0\\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -1\\ & & & 1\end{pmatrix},$$

显然 $E-D$ 为可逆矩阵，故 $I_V-\sigma$ 是可逆线性变换.

2) 显然 $R_m[x](0\leqslant m\leqslant n)$ 是 σ-子空间. 设 W 为 σ 的一个非零不变子空间，则 W 中必有次数最高的多项式，取其中之一记为 $f(x)$：

$$f(x)=a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+\cdots+a_1x+a_0,\ a_k\neq 0,0\leqslant k<n,$$

于是

$$\sigma(f(x))=ka_kx^{k-1}+(k-1)a_{k-1}x^{k-2}+\cdots+a_1\in W,$$

$$\sigma^2(f(x))=k(k-1)a_kx^{k-2}+(k-1)(k-2)a_{k-1}x^{k-3}+\cdots+2a_2\in W,$$

$$\cdots\cdots$$

$$\sigma^{k-1}(f(x))=k!\,a_kx+(k-1)!\,a_{k-1}\in W,$$

$$\sigma^k(f(x))=k!\,a_k\in W.$$

由于 $k!a_k\neq 0$，故由上面最后一式得 $1\in W$，再由倒数第二式知 $x\in W$，逐步往上推，可求得

$$1,x,x^2,\cdots,x^{k-1},x^k\in W.$$

由于 $f(x)$ 是 W 中次数最高的多项式，所以 $W=R_{k+1}[x]$. 因此 σ 的全部不变子空间为

$$\{0\},R,R_2[x],R_3[x],\cdots,R_{n-1}[x],R_n[x].$$

1701.　设 σ 是数域 P 上 n 维线性空间 V 的一个线性变换，且 σ 关于 V 的基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 的矩阵是

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0\end{bmatrix}.$$

求 σ 的所有不变子空间.

证　由第 **1700** 条，并把 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 看成第 **1700** 条的 $1,x,\frac{x^2}{2!},\cdots,\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ 即可求出 $n+1$ 个不变子空间来(因为它们同构).

1702.　1) 举例说明某些数域 P 上的有限维线性空间 V 的线性变换 σ 未必有 V 的关于 σ 的一维不变子空间.

2) 举例说明实数域 R 上的无限维线性空间 V 的线性变换 σ 未必有 V 的关于 σ 的一维不变子空间.

3) 设 $R[a,b]$ 是 $[a,b]$ 上任意阶可导函数的集合，对函数通常的加法、实数与函数通常的乘法所成的(实数域上)无限维线性空间，试决定 $R[a,b]$ 的线性变换 σ(微分变换)：$\sigma(f(x))=f'(x)$，$f(x)\in R[a,b]$ 的所有一维不变子空间.

解　1) 在 R^2 中，取 $\alpha_1=(1,0),\alpha_2=(0,1)$，则 α_1,α_2 是 R^2 的一组基. 规定

$$\sigma(\alpha_1)=\alpha_2,\sigma(\alpha_2)=-\alpha_1,\sigma(a\alpha_1+b\alpha_2)=a\alpha_2-b\alpha_1.$$

易知 σ 是 R^2 的一个线性变换，并且 σ 关于基 α_1,α_2 的矩阵是 $\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$. 于是 σ 的特征多项式 $f(x)=x^2+1$ 无实零点，即 σ 无特征根. 从而 σ 无一维不变子空间.

2) 对无限维线性空间 $R[x]$ 来说，$\sigma(f(x))=xf(x)$，是 $R[x]$ 的线性变换，并且当 $f(x)\neq 0$ 时，易知 $f(x),xf(x)$ 线性无关，所以 $R[x]$ 中无 σ 的一维不变子空间.

3) 令 W 为 $R[a,b]$中 σ 的一维不变子空间，任取非零的向量 $f(x)\in W$，则 $W=L(f(x))$，并且有实数 λ，使 $\sigma(f(x))=\lambda f(x)$，即 $f'(x)=\lambda f(x)$，$f(x)=ke^{\lambda x}$，这里 $k\neq 0$，所以 $W=L(e^{\lambda x})$ $(\lambda\in R)$ 为所求 σ 的一切一维不变子空间.

1703. 设 σ,τ 是线性空间 V 的两个线性变换，且 $\sigma\tau=\tau\sigma$，又设 λ 为 σ 的特征根，V_λ 为 σ 的属于 λ 的特征子空间，则 V_λ 是 τ-子空间.

证 $\forall\ \alpha\in V_\lambda$，欲证 $\tau(\alpha)\in V_\lambda$. 若 $\tau(\alpha)=0$，则得证；若 $\tau(\alpha)\neq 0$，则 $\sigma(\tau(\alpha))=(\sigma\tau)(\alpha)=\tau(\sigma(\alpha))=\tau(\lambda\alpha)=\lambda(\tau(\alpha))$. 故 $\tau(\alpha)$为 σ 的属于 λ 的特征向量，即 $\tau(\alpha)\in V_\lambda$. 故 V_λ 为 τ-子空间.

1704. 设 n 维线性空间 V 的线性变换 σ 在基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵为 A.

1) 若 $A=\begin{bmatrix}A_1 & B\\ 0 & A_2\end{bmatrix}$，则 A_1 是 $k(k<n)$阶矩阵$\Longleftrightarrow W_1=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)$为 σ-子空间；

2) 若 $A=\begin{bmatrix}A_1 & 0\\ B & A_2\end{bmatrix}$，则 A_1 是 k 阶矩阵$\Longleftrightarrow W_2=L(\alpha_{k+1},\cdots,\alpha_n)$是 σ-子空间；

3) 若 $A=\begin{bmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_2\end{bmatrix}$，则 A_1 是 k 阶$(k<n)$矩阵$\Longleftrightarrow W_1,W_2$ 都在 σ 之下不变.

证 容易验证.

1705. 设 σ 是 n 维欧氏空间 V 的正交变换，则 σ 的不变子空间的正交补也是 σ 的不变子空间.

证 设子空间 V_1 对 σ 不变，则 σ 也是 V_1 的线性变换，且是双射. $\forall\ \alpha\in V_1^\perp$，$\forall\ x\in V_1$，有 $y\in V_1$ 使 $\sigma(y)=x$. 于是

$$(\sigma(\alpha),x)=(\sigma(\alpha),\sigma(y))=(\alpha,y)=0,$$

即 $\sigma(\alpha)$与 V_1 中任意向量正交，故 $\sigma(\alpha)\in V_1^\perp$，即 $V_1^\perp$ 对 σ 不变.

第二十一章　双线性函数

一、 线性函数

1706. 什么叫线性函数?

答 设 V 是数域 P 上的一个线性空间,f 是 V 到 P 的一个映射,$\forall\ \alpha,\beta\in V,\forall\ k\in P$,如果 f 满足:

1) $f(\alpha+\beta)=f(\alpha)+f(\beta)$;

2) $f(k\alpha)=kf(\alpha)$.

则称 f 为 V 上的一个线性函数.

注 类似于线性变换,线性函数有下述基本性质:

1) $f(0)=0,f(-\alpha)=-f(\alpha)$;

2) 当 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$ 时,

$$f(\beta)=k_1f(\alpha_1)+k_2f(\alpha_2)+\cdots+k_sf(\alpha_s).$$

1707. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是数域 P 中任意数,$\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in P^n$,则函数

$$f(\alpha)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n \tag{1}$$

是 P^n 上的一个线性函数.而且,P^n 上任一个线性函数都可表成(1)这种形式.当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$ 时,$f(\alpha)=0$,称 f 为零函数,用 0 表示.

1708. 1) 设 P 是一个数域,则

$$\Pi_i: P^n\longrightarrow P,$$

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n)\longrightarrow a_i$$

是 P^n 上的一个线性函数(称为投影函数).

2) 设 V 是实数域 R 上 t 的多项式所成的线性空间,则

$$f:V\longrightarrow R,$$

$$p(t) \longrightarrow \int_0^1 p(t)dt, p(t) \in V$$

是 V 上的一个线性函数.

3) 设 P 是一个数域,则

$$g: P^{n\times n} \longrightarrow P,$$
$$A \longrightarrow \mathrm{tr}A$$

是 $p^{n\times n}$上的一个线性函数.

4) 设 t 是数域 P 中的一个定数,则

$$L_t: P[x] \longrightarrow P,$$
$$f[x] \longrightarrow f(t), f(x) \in p[x]$$

是 $P[x]$ 上的一个线性函数.

证　易于验证.

1709.　设 V 是数域 P 上一个三维线性空间,$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 是它的一组基,f 是 V 上一个线性函数,且

$$f(\varepsilon_1+\varepsilon_2)=1, f(\varepsilon_2-2\varepsilon_3)=-1, f(\varepsilon_1+\varepsilon_2)=-3,$$

求 $f(x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+x_3\varepsilon_3)$.

解　由 f 是成性的得

$$\begin{cases} f(\varepsilon_1) + f(\varepsilon_3) = 1, \\ f(\varepsilon_2) - 2f(\varepsilon_3) = -1, \\ f(\varepsilon_1) + f(\varepsilon_2) = -3. \end{cases}$$

解得　$f(\varepsilon_1)=4, f(\varepsilon_2)=-7, f(\varepsilon_3)=-3$. 于是

$$\begin{aligned} & f(x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+x_3\varepsilon_3) \\ &= x_1f(\varepsilon_1)+x_2f(\varepsilon_2)+x_3f(\varepsilon_3) \\ &= 4x_1-7x_2-3x_3. \end{aligned}$$

1710.　设 f 是实平面 R^2 上由 $f(3,1)=5, f(5,2)=1$ 所定义的线性函数,求 $f(x,y)$ 及 $f(-1,2)$.

解　记 $f(x,y)=ax+by$,则 $3a+b=5, 5a+2b=1$. 解得 $a=9, b=-22$,所以 $f(x,y)=9x-22y$,从而 $f(-1,2)=-53$.

1711. 设 V 是数域 P 上一个 n 维线性空间，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的一组基，$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 P 中任意 n 个数，则存在唯一的 V 上线性函数 f，使 $f(\varepsilon_i)=a_i,i=1,2,\cdots,n$.

1712. 如果线性空间 V 上的两个线性函数 f_1、f_2 之积恒等于零，亦即 $\forall\ \alpha\in V$，有 $f_1(\alpha)f_2(\alpha)=0$，那么其中至少有一个函数恒等于零．

证 用反证法　若 f_1、f_2 都不恒等于零，即存在 $\alpha,\beta\in V$，使

$$f_1(\alpha)\neq 0,f_2(\beta)\neq 0. \tag{1}$$

但　$$f_1(\alpha)f_2(\alpha)=0,f_1(\beta)f_2(\beta)=0,$$

从而　$f_2(\alpha)=0,f_1(\beta)=0$,

$$\begin{aligned}0&=f_1(\alpha+\beta)f_2(\alpha+\beta)\\&=(f_1(\alpha)+f_1(\beta)(f_2(\alpha)+f_2(\beta))\\&=f_1(\alpha)f_2(\beta),\end{aligned}$$

这与(1)矛盾．

1713. 设 f 是数域 P 上线性空间 V 上的非零线性函数，称集合 $\{\alpha\in V\mid f(\alpha)=0\}$ 为 f 的核，记为 $\ker f$. 则

1) $\ker f$ 是 V 的一个子空间；

2) 对于 $\varepsilon\in V\text{-}\ker f$，$V$ 中任一向量 α 可以唯一地表为 $\alpha=\beta+a\varepsilon$，其中 $\beta\in\ker f,a\in P$.

证 1) 容易验证．

2) 先证存在性　由 $\varepsilon\in V\text{-}\ker f$ 知 $f(\varepsilon)\neq 0$. 令 $\beta=\alpha-\dfrac{f(\alpha)}{f(\varepsilon)}\varepsilon$，则 $f(\beta)=f(\alpha)-\dfrac{f(\alpha)}{f(\varepsilon)}f(\varepsilon)=0$，所以 $\beta\in\ker f$. 令 $a=f(\alpha)/f(\varepsilon)$，则 $\alpha=\beta+a\varepsilon$.

再证唯一性　若 $\alpha=\beta_1+a_1\varepsilon$，其中 $\beta_1\in\ker f,a_1\in P$，则 $\beta-\beta_1=(a_1-a)\varepsilon$. 那么 $0=f(\beta-\beta_1)=(a_1-a)f(\varepsilon)$. 而 $f(\varepsilon)\neq 0$，故 $a_1=a$，从而 $\beta=\beta_1$.

1714. 如果数域 P 上线性空间 V 上的两个线性函数 f_1 和

f_2 有相同的核：$K=\ker f_1=\ker f_2$，则 $f_1=\lambda f_2$，$\lambda\in P$ 是非零数．

证 当 f_1，f_2 中有一个恒为零时，比如设 $f_1=0$，则 $\ker f_1=\ker f_2=V$，因而另一个也恒为零，这时结论成立．

当 $f_1\neq 0$，$f_2\neq 0$ 时，取 $\varepsilon\in V-K$，令 $\lambda=f_1(\varepsilon)/f_2(\varepsilon)\neq 0$，则 $\forall\ \alpha\in V$，由第 **1713** 条，α 可唯一地表为 $\alpha=\beta+a\varepsilon$，$\beta\in K$．于是

$$f_1(\alpha)=f_1(\beta)+af_1(\varepsilon)=af_1(\varepsilon),$$

$$\lambda f_2(\alpha)=\lambda(f_2(\beta)+af_2(\varepsilon))=a\lambda f_2(\varepsilon)=af_1(\varepsilon).$$

从而 $f_1(\alpha)=\lambda f_2(\alpha)$．由 α 的任意性，所以 $f_1=\lambda f_2$．

二、 对偶空间

1715. 数域 P 上线性空间 V 上的所有线性函数对于如下规定的加法和纯量乘法：

$$(f+g)(\alpha)=f(\alpha)+g(\alpha),$$

$$(af)(\alpha)=af(\alpha),\forall\ \alpha\in V,\forall\ a\in P,$$

（f，g 是 V 上的线性函数）作成 P 上的一个线性空间．

证 先验证 $f+g$ 及 af 是 V 上的线性函数．事实上，$\forall\ \alpha,\beta\in V$，$\forall\ a,b,c\in P$，

$$\begin{aligned}(f+g)(a\alpha+b\beta)&=f(a\alpha+b\beta)+g(a\alpha+b\beta)\\&=a(f(\alpha)+g(\alpha))+b(f(\beta)+g(\beta))\\&=a(f+g)(\alpha)+b(f+g)(\beta),\\(cf)(a\alpha+b\beta)&=cf(a\alpha+b\beta)\\&=caf(\alpha)+cbf(\beta)\\&=a(cf)(\alpha)+b(cf)(\beta).\end{aligned}$$

其次验证加法及纯量乘法满足线性空间定义的八个条件，下面只验证 $a(f+g)=af+ag$，其余略．$\forall\ \alpha\in V$，

$$\begin{aligned}[a(f+g)](\alpha)&=a[f(\alpha)+g(\alpha)]\\&=af(\alpha)+ag(\alpha)\end{aligned}$$

$$=(af)(\alpha)+(ag)(\alpha)$$
$$=(af+ag)(\alpha).$$

1716. 设 R 是实数域，R^2 是实平面，

$$f:R^2\longrightarrow R,(x,y)\longrightarrow x+y;$$
$$g:R^2\longrightarrow R,(x,y)\longrightarrow x-y.$$

求 $f+g$，$7f$ 和 $3f-2g$.

解 $(f+g)(x,y)=f(x,y)+g(x,y)$
$$=x+y+x-y=2x.$$

类似地可得　$7f(x,y)=7x+7y$.

$(3f-2g)(x,y)=x+5y$.

1717. 什么叫做对偶空间？

答 设 V 是数域 P 上一个 n 维线性空间．设 V 上全体线性函数组成的集合为 $L(V,P)$. 在 $L(V,P)$ 上定义加法和数乘运算（见第 **1715** 条），$L(V,P)$ 为 P 上一个线性空间，称 $L(V,P)$ 为 V 的对偶空间，记为 V^*.

1718. 设 V 是 P 上 n 维线性空间，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 为 V 的一组基，作 ε_1 的特征函数如下：

$$f(\alpha)=\begin{cases}1,\alpha=\varepsilon_1;\\0,\alpha\in\{\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\},\end{cases}$$

则 $f\in V^*$.

证 由第 **1711** 条可得．

注 ① 为了区别起见，记 ε_1 的特征函数为 f_i，即

$$f_i(\varepsilon_j)=\begin{cases}1,&i=j;\\0,&i\neq j.\end{cases}$$

1719. 设 V 是数域 P 上的 n 维线空间，$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 为 V 的一组基，由它们确定的 n 个特征函数为 $f_1,\cdots,f_n$，则

1) $f_1,\cdots,f_n$ 为 V^* 的一组基；

2) $\dim V^*=\dim V=n$.

注 ① 称 $f_1,\cdots,f_n$ 为 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 的对偶基.

② 给定线性空间 V 的一组基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 后,由第 **1711** 条知,其对偶基 $f_1,\cdots,f_n$ 是唯一的。

③ V^* 的基不唯一,这是因为,如果 $f_1,\cdots,f_n$ 为 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 的一组对偶基,那么 $f_1,2f_2,\cdots,nf_n$ 也是 V^* 的一组基(当然,这组基不能称为 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 的对偶基).

1720 求 R^3 的基 $\alpha_1=(1,-1,3),\alpha_2=(0,1,-1),\alpha_3=(0,3,-2)$的对偶基 f_1,f_2,f_3.

解 先求 α_1 的特征函数 f_1,设 $\alpha=(x,y,z)$,$f_1(\alpha)=a_1x+a_2y+a_3z$,

$$f_1(\alpha_j)=\begin{cases}1, j=1;\\0, j\neq 1,\end{cases}$$

则

$$\begin{cases}a_1-a_2+3a_3=1,\\ \quad a_2-a_3=0,\\ \quad 3a_2-2a_3=0.\end{cases}$$

解方程组,得 $a_1=1,a_2=0,a_3=0$. 于是 $f_1(\alpha)=x$.

类似地可求得 $f_2(\alpha)=7x-2y-3z$,

$$f_3(\alpha)=-2x+y+z.$$

1721. 任意取定 n 个不同实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,根据拉格朗日插值公式,得到 n 个多项式:

$$p_i(x)=\frac{(x-a_1)\cdots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\cdots(x-a_n)}{(a_i-a_1)\cdots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdots(a_i-a_n)},i=1,2,\cdots,n.$$

1) $p_1(x),p_2(x),\cdots,p_n(x)$是线性空间 $V=R[x]_n$ 的一组基;

2) $p_i(a_j)=\begin{cases}1, & i=j,\\0, & i\neq j;\end{cases}$

3) 设 $f_1,\cdots,f_n$ 为 $p_1(x),\cdots,p_n(x)$的对偶基,则

$$f_i(g(x))=g(a_i),\forall\ g(x)\in P[x]_n.$$

1722.　设 V 是实数域 R 上次数不超过 1 的多项式及零多项式所成的线性空间，令

$$f_1: V \longrightarrow R, f(t) \longrightarrow \int_0^1 f(t)dt, f(t) \in V;$$

$$f_2: V \longrightarrow R, f(t) \longrightarrow \int_0^2 f(t)dt, f(t) \in V.$$

求 V 的基 $\{\alpha_1, \alpha_2\}$，使之对偶于 $\{f_1, f_2\}$.

解　设 $\alpha_1 = a + bt, \alpha_2 = c + dt$，则由对偶基的定义得

$$\begin{cases} f_1(\alpha_1) = 1, \\ f_2(\alpha_1) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} f_1(\alpha_2) = 0, \\ f_2(\alpha_2) = 1. \end{cases}$$

从而有

$$\begin{cases} a + \frac{1}{2}b = 1, \\ 2a + 2b = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} c + \frac{1}{2}d = 0, \\ 2c + 2d = 1. \end{cases}$$

分别解得

$$\begin{cases} a = 2, \\ b = -2; \end{cases} \quad \begin{cases} c = -\frac{1}{2} \\ d = 1. \end{cases}$$

于是 $\{2 - 2t, -\frac{1}{2} + t\}$ 是 V 的基且对偶于 $\{f_1, f_2\}$.

1723.　设 S 是数域 P 上线性空间 V 的非空子集，

$$S_0 = \{f \in V^* \mid \forall\, s \in S, f(s) = 0\},$$

则 S_0 是 V^* 的子空间.

证　S_0 是非空的，因为零函数属于 S_0.

$\forall\, f, g \in S_0, \forall\, a, b \in P, \forall\, s \in S$. 因为

$$(af + bg)(s) = (af)(s) + (bg)(s) = af(s) + bg(s) = a0 + b0 = 0,$$

所以 $af + bg \in S_0$，即 S_0 是 V^* 的子空间.

1724.　设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 是数域 P 上线性空间 V 的基，$f_1, \cdots, f_n$ 是 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 的对偶基，则

1) $\beta = f_1(\beta)\alpha_1 + \cdots + f_n(\beta)\alpha_n, \forall\, \beta \in V$;

2) $g=g(\alpha_1)f_1+\cdots+g(\alpha_n)f_n,\forall\ g\in V^*$.

证 1) 设 $\beta=a_1\alpha_1+\cdots+a_i\alpha_i+\cdots+a_n\alpha_n$，则 $f_i(\beta)=a_i,i=1,2,\cdots,n$.

2)
$$\begin{aligned} g(\beta)&=g(f_1(\beta)\alpha_1+\cdots+f_n(\beta)\alpha_n)\\ &=f_1(\beta)g(\alpha_1)+\cdots+f_n(\beta)g(\alpha_n)\\ &=g(\alpha_1)f_1(\beta)+\cdots+g(\alpha_n)f_n(\beta)\\ &=(\sum_{i=1}^n g(\alpha_i)f_i)(\beta). \end{aligned}$$

由 β 的任意性，即得 2).

1725. 设 V 是 n 维线性空间，α 是 V 中非零向量，则存在 $\varphi\in V^*$，使 $\varphi(\alpha)\neq0$，从而 $\varphi\neq0$.

证 将 α 扩充为 V 的一组基 $\alpha,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，则 α 的特征函数即为所求.

1726. 令 $V=P[x]_3$，对 $p(x)=c_0+c_1x+c_2x^2\in V$，定义

$$\begin{cases} f_1(p(x))=\int_0^1 p(x)dx,\\ f_2(p(x))=\int_0^2 p(x)dx,\\ f_3(p(x))=\int_0^{-1} p(x)dx. \end{cases} \tag{1}$$

f_1,f_2,f_3 都是 V 上的线性函数．找出 V 的一组基 $p_1(x),p_2(x),p_3(x)$，使 f_1,f_2,f_3 是它的对偶基.

证 先证 $f_1\in V^*$. $\forall\ g(x),h(x)\in V,\forall\ k\in P$，则 $f_1(g(x)+h(x))=\int_0^1(g(x)+h(x))dx=\int_0^1 g(x)dx+\int_0^1 h(x)dx=f_1(g(x))+f_1(h(x))$.

类似地可证 $f_1(kg(x))=kf_1(g(x))$. 所以 $f_1\in V^*$.

类似地可证 $f_2,f_3\in V^*$.

设 $p_1(x),p_2(x),p_3(x)$ 为 V 的一组基，且 f_1,f_2,f_3 为它的对

偶基.

先求 $p_1(x)=c_0+c_1x+c_2x^2$. 由(1)得

$$\begin{cases} c_0+\frac{1}{2}c_1+\frac{1}{3}c_2=1, \\ 2c_0+2c_1+\frac{8}{3}c_2=0, \\ -c_0+\frac{1}{2}c_1-\frac{1}{3}c_2=0. \end{cases}$$

解得 $c_0=c_1=1, c_2=-\frac{3}{2}$. 故

$$p_1(x)=1+x-\frac{3}{2}x^2.$$

类似地可求得

$$p_2(x)=-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}x^2;$$

$$p_3(x)=-\frac{1}{3}+x-\frac{1}{2}x^2.$$

1727. 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 是 V 的基, $f_1,\cdots,f_n$ 与 $g_1,\cdots,g_n$ 分别是对偶于 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 和 $\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$ 的 V^* 的基. A 是 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 到 $\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$ 的过渡矩阵, 则 (A^{-1}) 是 $\{f_1,\cdots,f_n\}$ 到 $\{g_1,\cdots,g_n\}$ 的过渡矩阵.

1728. 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 是线性空间 V 的一组基, f_1,f_2,f_3 是它的对偶基. 令

$$\alpha_1=\varepsilon_1-\varepsilon_3, \alpha_2=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3, \alpha_3=\varepsilon_2+\varepsilon_3,$$

则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 V 的一组基, 并求它的对偶基(用 f_1,f_2,f_3 表出).

证　设 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)A$, 其中

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

因为 $|A|\neq 0$, 所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为 V 的一组基.

设 g_1,g_2,g_3 是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的对偶基，则

$$(g_1,g_2,g_3)=(f_1,f_2,f_3)(A')^{-1}$$

$$\stackrel{\triangle}{=}(f_1,f_2,f_3)\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 2\\ -1 & 1 & -1\end{bmatrix},$$

即 $g_1=f_2-f_3, g_2=f_1-f_2+f_3, g_3=-f_1+2f_2-f_3$.

1729.　设 V 是数域 P 上一个 n 维线性空间，V^* 是 V 的对偶空间，取定 $x\in V$，定义

$$x^{**}: f\longrightarrow f(x), \forall\ f\in V^*,$$

则 x^{**} 是 V^* 的一个线性函数，从而 x^{**} 属于 V^* 的对偶空间 $(V^*)^*=V^{**}$.

证　因为 $f(x)\in P$，所以 x^{**} 是 V^{**} 到 P 的一个映射.

$\forall\ f,g\in V^*, \forall\ k\in P$，有

$$x^{**}(f+g)=(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$
$$=x^{**}(f)+x^{**}(g),$$
$$x^{**}(kf)=(kf)(x)=kf(x)$$
$$=kx^{**}(f),$$

从而 x^{**} 是 V^* 的一个线性函数，即 $x^{**}\in(V^*)^*=V^{**}$.

1730.　设 V 是数域 P 上一个 n 维线性空间，V^{**} 是 V 的对偶空间的对偶空间．定义

$$\varphi: x\longrightarrow x^{**}, \forall\ x\in V,$$

则 $V\stackrel{\varphi}{\cong}V^{**}$.

1731.　设 V 是一个线性空间．$f_1,f_2,\cdots,f_s$ 是 V^* 中非零向量，则存在 $\alpha\in V$，使

$$f_i(\alpha)\neq 0, i=1,2,\cdots,s.$$

证　对 s 用数学归纳法.

当 $s=1$ 时，$f_1\neq 0$，所以存在 $\alpha\in V$，使 $f_1(\alpha)\neq 0$，即当 $s=1$ 时，命题成立.

假定当 $s=k$ 时，命题成立，即存在 $\alpha\in V$，使 $f_i(\alpha)=a_i\neq 0, i=1,\cdots,k$. 下面证 $s=k+1$ 时命题成立.

若 $f_{k+1}(\alpha)\neq 0$，则命题得证. 若 $f_{k+1}(\alpha)=0$，但由 $f_{k+1}\neq 0$ 知存在 $\beta\in V$，使 $f_{k+1}(\beta)=b\neq 0$. 设 $f_i(\beta)=d_i, i=1,2,\cdots,k$，总可取数 $c\neq 0$，使

$$a_i+cd_i\neq 0, i=1,2,\cdots,k.$$

令 $\gamma=\alpha+c\beta$，则 $\gamma\in V$，且

$$f_i(\gamma)=a_i+cd_i\neq 0, i=1,2,\cdots,k;$$

$$f_{k+1}(\gamma)=cb\neq 0.$$

归纳法完成.

1732. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是线性空间 V 中的非零向量，则有 $f\in V^*$，使

$$f(\alpha_i)\neq 0, i=1,2,\cdots,s.$$

证 因为 $V\cong V^{**}$，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是 V 中的非零向量，所以 $\alpha_1^{**},\alpha_2^{**},\cdots,\alpha_s^{**}$ 是 V^* 的对偶空间 $V^{**}=(V^*)^*$ 中的非零向量. 由 **1731** 条，存在 $f\in V^*$，使 $\alpha_i^{**}(f)\neq 0, i=1,2,\cdots,s$，即 $f(\alpha_i)\neq 0, i=1,2,\cdots,s$.

1733. 设 V 是一个 n 维欧氏空间，它的内积为 (α,β)，对 V 中确定的向量 α，定义 V 上一个函数 α^*：$\alpha^*(\beta)=(\alpha,\beta)$，则

1) α^* 是 V 上的线性函数；

2) V 到 V^* 的映射

$$\varphi: \alpha \longrightarrow \alpha^*, \forall\ \alpha\in V$$

是 V 到 V^* 的一个同构映射（在这个同构下，欧氏空间可看成自身的对偶空间）.

证 1) $\forall\ \beta_1,\beta_2\in V, \forall\ k\in P$，有

$$\alpha^*(\beta_1+\beta_2)=(\alpha,\beta_1+\beta_2)=(\alpha,\beta_1)+(\alpha,\beta_2)$$
$$=\alpha^*(\beta_1)+\alpha^*(\beta_2),$$
$$\alpha^*(k\beta_1)=(\alpha,k\beta_1)=k(\alpha,\beta_1)=k\alpha^*(\beta_1),$$

故 α^* 是 V 上的线性函数．

2）设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是 V 的一组标准正交基，$\varphi(\alpha_i)=\alpha_i^*$，因为

$$\alpha_i^*(\alpha_j)=(\alpha_i,\alpha_j)=\begin{cases}1, & i=j;\\ 0, & i\neq j,\end{cases}$$

故 $\alpha_1^*,\cdots,\alpha_n^*$ 就是 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 的对偶基．而线性空间两组基之间一一对应必为同构对应．

注 如果在 $V^*=\{\alpha^*|\alpha\in V\}$ 上规定

$$(\alpha^*,\beta^*)=(\alpha,\beta),$$

则 V^* 也是欧氏空间．

1734. 设 σ 是数域 P 上 n 维线性空间 V 的一个线性变换．

1）对 V 上的线性函数 f，$f\sigma$ 仍是 V 上线性函数，这里 $(f\sigma)(\alpha)=f(\sigma(\alpha))$，$\alpha\in V$；

2）定义 V^* 到自身的映射：

$$\sigma^*:f\longrightarrow f\sigma,$$

则 σ^* 是 V^* 上的线性变换；

3）设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的一组基，$f_1,f_2,\cdots,f_n$ 是它的对偶基，并设 σ 在 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的矩阵为 A，则 σ^* 在 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 下的矩阵为 A'（因此 σ^* 称做 σ 的转置映射）．

证 1）$\forall\ \alpha\in V$，$(f\sigma)(\alpha)=f(\sigma(\alpha))$ 是 P 中唯一一元，$f\sigma$ 是 V 到 P 的一个映射．

$\forall\ \alpha,\beta\in V,\forall\ k\in P$，有

$$(f\sigma)(\alpha+\beta)=f(\sigma(\alpha)+\sigma(\beta))=(f\sigma)(\alpha)+(f\sigma)(\beta),$$

$$(f\sigma)(a\alpha)=f(\sigma(k\alpha))=f(k\sigma(\alpha))=k(f\sigma)(\alpha),$$

故 $f\sigma$ 是 V 上的线性函数．

2）$\forall\ f\in V^*$，由 1）知 $\sigma^*(f)=f\sigma\in V^*$，因此 σ^* 是 V^* 的一个变换．

$\forall\ f,g\in V^*,\forall\ a\in P$，有

$$\sigma^*(f+g)=(f+g)\sigma=f\sigma+g\sigma$$

$$=\sigma^*(f)+\sigma^*(g),$$

$$\sigma^*(af)=(af)\sigma=a(f\sigma)=a\sigma^*(f),$$

所以 σ^* 是 V^* 上的线性变换．

3）设 $A=(a_{ij})$，由题设知

$$(\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\cdots,\sigma(\varepsilon_n))=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A$$

设$(\sigma^*(f_1),\sigma^*(f_2),\cdots,\sigma^*(f_n))=(f_1,\cdots,f_n)B$，

其中 $B=(b_{ij})$，则由 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 是 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 的对偶基知：

$$f_j\sigma(\varepsilon_i)=f_j(a_{1i}\varepsilon_1+a_{2i}\varepsilon_2+\cdots+a_{ni}\varepsilon_n)=a_{ji},$$

$$\sigma^*(f_j)(\varepsilon_i)=(b_{1j}f_1+b_{2j}f_2+\cdots+b_{nj}f_n)(\varepsilon_i)=b_{ij}$$

但 $\sigma^*(f_j)=f_j\sigma$，从而 $a_{ji}=b_{ij}$，i、$j=1,\cdots,n$. 即 $B=A'$.

1735.　设 V 是数域 P 上一个线性空间．$f_1,f_2,\cdots,f_k$ 是 V 上 k 个线性函数，则

1）下列集合

$$W=\{\alpha\in V\mid f_i(\alpha)=0,1\leqslant i\leqslant k\}$$

是 V 的一子空间．W 称为线性函数 $f_1,f_2,\cdots,f_k$ 的零化子空间．

2）V 的任一个子空间皆为某些线性函数的零化子空间．

证　1）因为 $f_1,f_2,\cdots,f_k$ 都是线性函数，所以 $f_i(0)=0,1\leqslant i\leqslant k$. 故 $0\in W$，因而 W 非空．

$\forall\ \alpha,\beta\in W,\forall\ a\in P$，有

$$f_i(\alpha+\beta)=f_i(\alpha)+f_i(\beta)=0,$$

$$f_i(a\alpha)=af_i(\alpha)=0,1\leqslant i\leqslant k,$$

从而 $\alpha+\beta,a\alpha\in W$，即 W 是 V 的一个子空间．

2）设 V_1 是 V 的任一子空间，设 $\dim V_1=m$

当 $m=n$ 时，取 f 为 V 的零函数($f(\alpha)=0,\forall\ \alpha\in V$)，则

$$V_1=V=\{\alpha\in V\mid f(\alpha)=0\},$$

即 V_1 是 f 的零化子空间．

当 $m<n$ 时，设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_m$ 是 V_1 的一组基，将其扩充为 V 的一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_m,\varepsilon_{m+1},\cdots,\varepsilon_n$，取这组基的对偶基的后一部分

$f_{m+1},f_{m+2},\cdots,f_n$.则它们都是 V 上的线性函数,而且

$$V_1=\{\alpha\in V\mid f_i(\alpha)=0,m+1\leqslant i\leqslant n\},$$

即 V_1 是 $f_{m+1},f_{m+2},\cdots,f_n$ 的零化子空间．事实上令

$$\{\alpha\in V\mid f_i(\alpha)=0,m+1\leqslant i\leqslant n\}=W.$$

$\forall\ \alpha=a_1\varepsilon_1+\cdots+a_k\varepsilon_m\in V_1$,有

$$f_{m+1}(\alpha)=f_{m+2}(\alpha)=\cdots=f_n(\alpha)=0.$$

故 $\alpha\in W$,即 $V_1\subseteq W$.

反之,$\forall\ \alpha=b_1\varepsilon_1+\cdots+b_m\varepsilon_m+b_{m+1}\varepsilon_{k+1}+\cdots+b_n\varepsilon_n\in W$,由

$$f_{m+1}(\alpha)=0,f_{m+2}(\alpha)=0,\cdots,f_n(\alpha)=0$$

可得 $b_{m+1}=0,b_{m+2}=0,\cdots,b_n=0$. 故 $\alpha=b_1\varepsilon_1+\cdots+b_m\varepsilon_m\in V_1$,$W\subseteq V_1$.

故 $V_1=W$.

三、　双线性函数

1736.　什么叫做双线性函数?

答　设 V 是数域 P 上一个 n 维线性空间,f 是 $V\times V$ 到 p 的一个映射,即$\forall\ \alpha,\beta\in V$,在 f 下都唯一地对应着 P 中一个数 $f(\alpha,\beta)$,若满足下列条件:

1) $f(\alpha+\beta,\gamma)=f(\alpha,\gamma)+f(\beta,\gamma)$,

2) $f(\alpha,\beta+\gamma)=f(\alpha,\beta)+f(\alpha,\gamma)$,

3) $f(a\alpha,\gamma)=f(\alpha,a\gamma)=af(\alpha,\gamma)$,$\forall\ \alpha,\beta,\gamma\in V$,$\forall\ a\in P$,

则称 f(为方便起见,也记为 $f(\alpha,\beta)$)为 V 上的一个双线性函数．

注　① 由条件 1)和 3),固定第二个变量 γ,f 是 V 到 P 的一个线性函数;由条件 2)和 3),固定第二个变量 α,f 也是 V 到 P 的一个线性函数．由于这个原因,所以称 f 是 V 上的双线性函数．

② 双线性函数 f 的条件 1)、2)、3)可用以下条件来取代:

1′) $f(\alpha,k_1\beta_1+k_2\beta_2)=k_1f(\alpha_1,\beta_1)+k_2f(\alpha,\beta_2)$,

2′) $f(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2,\beta)=k_1f(\alpha_1,\beta)+k_2f(\alpha_2,\beta)$,

$\forall\ \alpha,\alpha_1,\alpha_2,\beta,\beta_1,\beta_2\in V,\forall\ k_1,k_2\in P$.

1737. 设 P^2 是数域 P 上的二维线性空间，$\alpha=(x_1,x_2),\beta=(y_1,y_2)\in P^2$，判断下列 $P^2\times P^2$ 到 P 的映射是否为双线性函数：

1) $f(\alpha,\beta)=x_1y_1+x_1y_2-x_2y_1-x_2y_2$;

2) $f(\alpha,\beta)=(x_1-y_1)^2+x_2y_2$;

3) $f(\alpha,\beta)=1$;

4) $f(\alpha,\beta)=x_1y_1-x_2y_1$.

解 1),4)是 P^2 上的双线性函数；2),3)不是 P^2 上的双线性函数.

1738. 欧氏空间 V 的内积是 V 上的一个双线性函数，但反之不成立.

证 前者显然. 对于后者，在 1737 条 1)中，令 $P=R$，则 R^2 是一欧氏空间，但 R^2 上的双线性函数

$$f(\alpha,\beta)=x_1y_1+x_1y_2-x_2y_1-x_2y_2$$

不是 R^2 上的一个内积，因为取 $\alpha=(1,2)$ 时，$f(\alpha,\alpha)=-3\not>0$.

1739. 设 f_1,f_2 都是线性空间 V 上的线性函数，定义

$$f(\alpha,\beta)=f_1(\alpha)+f_2(\beta),\alpha,\beta\in V,$$

则 $f(\alpha,\beta)$是 V 上的一个双线性函数.

证 显然 f 是 $V\times V$ 到 P 的一个映射，且$\forall\ \alpha,\beta_1,\beta_2\in V$，$\forall\ k_1,k_2\in P$，有

$$\begin{aligned}&f(\alpha,k_1\beta_1+k_2\beta_2)=f_1(a)f_2(k_1\beta_1+k_2\beta_2)\\&=f_1(\alpha)(k_1f_2(\beta_1)+k_2f_2(\beta_2))=k_1f_1(\alpha)f_2(\beta_1)+k_2f_1(\alpha)f_2(\beta_2)\\&=k_1f(\alpha,\beta_1)+k_2f(\alpha,\beta_2).\end{aligned}$$

类似地验证：$f(k_1\beta_1+k_2\beta_2,\alpha)=k_1f(\beta_1,\alpha)+k_2f(\beta_2,\alpha)$.

1740. 设 P^n 是数域 P 上 n 维列空间，$x,y\in P^n,A\in P^{n\times n}$，令

$$f(x,y)=x'Ay,$$

则 f 是 P^n 上的一个双线性函数，且 P^n 上任一双线性函数均具上

述形式.

1741. 何谓双线性函数的度量矩阵?

答 设 f 是数域 P 上 n 维线性空间 V 上的一个双线性函数,$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的一组基,$n\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})$ 叫做双线性函数 f 关于基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 的度量矩阵,其中 $a_{ij}=f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)$,$i,j=1,2,\cdots,n$.

1742. 设实平面 R^2 上的双线性函数

$$f((x_1,x_2),(y_1,y_2))=2x_1y_1-3x_1y_2+x_2y_2.$$

求 f 关于基 $\alpha_1=(1,0)$,$\alpha_2=(1,1)$ 的度量矩阵 A.

解 记 $A=(a_{ij})$.

$$a_{11}=f(\alpha_1,\alpha_1)=f((1,0),(1,0))=2-0+0=2.$$

类似地求得 $a_{12}=-1$,$a_{21}=2$,$a_{22}=0$.

$$\therefore\quad A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 2 & 0\end{bmatrix}.$$

1743. 同一个双线性函数在不同基下矩阵是合同的,即设 f 是线性空间 V 上双线性函数,$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 为 V 的两组基,且过渡矩阵为 C.

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)C,$$

f 在 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下度量矩阵为 A,f 在 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 下矩阵为 B,则 $B=C'AC$.

1744. V 是数域 P 上的 n 维线性空间,V 上一切双线性函数的全体记为 $DL(V,P)$.

设 $f,g\in DL(V,P)$,定义加法与数乘运算如下:

$$(f+g)(\alpha,\beta)=f(\alpha,\beta)+g(\alpha,\beta),$$

$$(kf)(\alpha,\beta)=kf(\alpha,\beta),\forall\ \alpha,\beta\in V,\forall\ k\in P.$$

容易验证:$f+g$,kf 都是 V 上的双线性函数,称 $f+g$ 为 f 与 g 的和,称 kf 为 k 与 f 的数量乘积.

还易验证,在如此的加法和数量乘法下,$DL(V,P)$ 构成数域

P 上的一个线性空间．于是 $DL(V,P)\cong P^{n\times n}$，从而 $\dim DL(V,P)=(\dim V)^2$.

证　设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的一组基．$\forall f\in DL(V,P)$，令 f 在这组基下的度量矩阵为 A. 即 $(f)=A$.
显然 σ 是映射．

$\forall f,g\in DL(V,P)$，设它们在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的度量矩阵分别为 A,B. 若 $\sigma(f)=\sigma(g)$，即 $A=B$，则

$$f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=g(\varepsilon_i,\varepsilon_j),i、j=1,2,\cdots,n.$$

从而 $\forall\ \alpha=\sum_{j=1}^{n}x_j\varepsilon_j,\beta=\sum_{j=1}^{n}y_j\varepsilon_j\in V$，有

$$f(\alpha,\beta)=g(\alpha,\beta),$$

即 $f=g$. 即 σ 是单射．

$\forall\ A=(a_{ij})\in P^{n\times n},\forall\ \alpha=\sum_{i=1}^{n}x_i\varepsilon_i,\beta=\sum_{j=1}^{n}y_j\varepsilon_j\in V$，定义

$$f(\alpha,\beta)=x'Ay=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}x_iy_j,$$

其中 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)',y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)'$. 则由 **1740** 条知 f 是 V 上的一个双线性函数，而且 $f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=a_{ij},i、j=1,2,\cdots,n$，即 A 是 f 关于基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 的度量矩阵，故 σ 是满射．

$\forall\ f,g\in DL(V,P),\forall\ k\in P$. 设 $f,g,f+g,kf$ 关于基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 的度量矩阵分别为 $A=(a_{ij}),B=(b_{ij}),C=(c_{ij}),D=(d_{ij})$. 因为

$$(f+g)(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)+g(\varepsilon_j,\varepsilon_j),$$
$$(kf)(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=kf(\varepsilon_i,\varepsilon_j),$$

即 $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij},d_{ij}=ka_{ij},i、j=1,2,\cdots,n$. 故 $C=A+B,D=kA$，从而

$$\sigma(f+g)=C=A+B=\sigma(f)+\sigma(g),$$
$$\sigma(kf)=D=kA=(k\sigma)(f).$$

故 σ 保持线性运算．

综上，σ 是 $DL(V,P)$ 到 $P^{n\times n}$ 上的同构映射，$DL(V,P)\cong P^{n\times n}$，从而

$$\dim DL(V,P)=\dim P^{n\times n}=n^2=(\dim V)^2.$$

1745. 什么叫非退化的双线性函数？

答 设 f 是线性空间 V 上一个双线性函数，如果从 $f(\alpha,\beta)=0, \forall\ \beta\in V$ 可推出 $\alpha=0$，那么 f 就叫做非退化的．否则，就称 f 是退化的．

n 维线性空间 V 上的一个双线性函数 f 是非退化的充要条件为 f 关于 V 的某个基的度量矩阵为非奇异矩阵．

1746. 设 A 是数域 P 上一个 m 阶矩阵，定义 $P^{m\times n}$ 上一个二元函数

$$f(x,y)=\mathrm{tr}(x'Ay),x,y\in P^{m\times n}.$$

1) f 是 $P^{m\times n}$ 上的双线性函数；

2) 求 $f(x,y)$ 在基 $E_{11},E_{12},\cdots,E_{1n},E_{21},\cdots E_{2n},\cdots,E_{m1},\cdots,E_{mn}$ 下的度量矩阵（E_{ij} 表示 i 行 j 列的元素为 1，其余元素全为零的 $m\times n$ 矩阵）．

证 1) $\forall\ x,y,z\in P^{m\times n}, \forall\ k_1,k_2\in P$，有 $f(x,k_1y+k_2z)=\mathrm{tr}(x'A(k_1y+k_2z))=k_1\mathrm{tr}(x'Ay)+k_2\mathrm{tr}(x'Az)=k_1f(x,y)+k_2f(x,z)$．类似地可得 $f(k_1x+k_2y,z)=k_1f(x,z)+k_2f(y,z)$．从而 f 是 $P^{m\times n}$ 上的双线性函数．

2) 由 $E'_{ij}AE_{ks}=a_{ik}E_{js}$ 知

$$f(E_{ij},E_{ks})=\mathrm{tr}(E'_{ij}AE_{ks})=\mathrm{tr}(a_{ik}E_{js})$$

$$=\begin{cases}a_{ik}, & j=s;\\ 0, & j\neq s.\end{cases}$$

设所求度量矩阵为 B，则

$$B=\begin{bmatrix}a_{11}E & a_{12}E & \cdots & a_{1m}E\\ a_{21}E & a_{22}E & \cdots & a_{2m}E\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ a_{m1}E & a_{m2}E & \cdots & a_{mm}E\end{bmatrix},$$

其中 E 为 n 阶单位矩阵.

1747. 在 P^4 中定义双线性函数

$$f(x,y)=3x_1y_2-5x_2y_1+x_3y_4-4x_4y_3,$$

$$x=(x_1,x_2,x_3,x_4),y=(y_1,y_2,y_3,y_4)\in P^4.$$

1) 给定 P^4 的一个基

$$\varepsilon_1=(1,-2,-1,0),\varepsilon_2=(1,-1,1,0),$$

$$\varepsilon_3=(-1,2,1,1),\varepsilon_4=(-1,-1,0,1),$$

求 $f(x,y)$ 在这组基下的度量矩阵;

2) 另取一组基 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$,

$$(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)T,$$

其中

$$T=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}.$$

求 $f(x,y)$ 在 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 下的度量矩阵.

解 1) 设 f 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 下的度量矩阵为 $A=(a_{ij})$,其中 $a_{ij}=f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)$,则

$$A=\begin{bmatrix}4&7&-5&-14\\-1&2&2&-7\\0&-11&1&14\\15&4&-15&-2\end{bmatrix}.$$

2) 设 f 在基 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 下的度量矩阵为 B,则

$$B=T'AT=\begin{bmatrix}-6&46&8&24\\-18&26&16&-72\\-2&-38&0&0\\-6&86&0&0\end{bmatrix}.$$

四、 对称双线性函数

1748. 什么叫对称双线性函数，反对称双线性函数？

答 设 f 是线性空间 V 上的一个双线性函数．如果 $\forall\ \alpha,\beta\in V$，都有 $f(\alpha,\beta)=f(\beta,\alpha)$，则称 f 为对称双线性函数；如果 $\forall\ \alpha,\beta\in V$，都有 $f(\alpha,\beta)=-f(\beta,\alpha)$，则称 f 为反对称双线性函数．

1749. n 维线性空间 V 上的一个双线性函数 f 是对称的当且仅当它在 V 的任一组基下的度量矩阵是对称矩阵；双线性函数 f 是反对称的当且仅当它在 V 的任一组基下的度量矩阵是反对称矩阵．

1750. 欧氏空间 V 的内积是对称双线性函数，而且它在 V 的任一组基下的度量矩阵是正定矩阵．

证 设 $f(\alpha,\beta)$ 为 V 的内积：$f(\alpha,\beta)=(\alpha,\beta)$．由第 **1738** 条知，$f(\alpha,\beta)$ 是 V 上的一个双线性函数．又 $\forall\ \alpha,\beta\in V$，有 $f(\alpha,\beta)=(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)=f(\beta,\alpha)$，即 $f(\alpha,\beta)$ 是对称的．

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 V 的任一组基，$f(\alpha,\beta)$ 在这组基下的度量矩阵是 A，则由 $f(\alpha,\beta)$ 在标准正交基下的度量矩阵为单位矩阵 E 知 A 与 E 合同．故而 A 为正定矩阵．

1751. 任一个双线性函数 $f(\alpha,\beta)$ 都可唯一地表为一个对称双线性函数与一个反对称双线性函数之和．

证 因为任一方阵可表为一个对称矩阵与一个反对称矩阵之和．

1752. 如果线性空间 V 上的对称双线性函数 $f(\alpha,\beta)$ 能分解为两个线性函数之积：

$$f(\alpha,\beta)=f_1(\alpha)f_2(\beta),$$

则它可表为：

$$f(\alpha,\beta)=\lambda g(\alpha)g(\beta),$$

其中 λ 是非零数，g 是线性函数．

证 如果 $f(\alpha,\beta)=0$，即 $f_1(\alpha)f_2(\beta)=0$，那么 $\forall\ \alpha\in V$，都有

$f_1(\alpha)f_2(\alpha)=0$. 由 **1712** 条，f_1，f_2 中至少有一个恒等于零．不妨设 $f_1(\alpha)=0, \forall\ \alpha\in V$，则 $f(\alpha,\beta)=0=\lambda f_1(\alpha)f_1(\beta)$，其中 λ 可以是任意非零数，f_1 是线性函数．

若 $f(\alpha,\beta)\neq 0$，则由 $f(\alpha,\beta)=f(\beta,\alpha)$，有

$$f_1(\alpha)f_2(\beta)=f_1(\beta)f_2(\alpha).$$

记 $\dfrac{f_1(\alpha)}{f_2(\alpha)}=\dfrac{f_1(\beta)}{f_2(\beta)}=\lambda\neq 0$，则

$$f(\alpha,\beta)=f_1(\alpha)f_2(\beta)=\lambda f_2(\alpha)f_2(\beta).$$

1753. 线性空间 V 上的非零反对称双线性函数 $f(\alpha,\beta)$ 不能分解为两个线性函数之积.

证 用反证法．若 $f(\alpha,\beta)$ 能分解成两个线性函数之积：$f(\alpha,\beta)=f_1(\alpha)f_2(\beta)$，则由 $f(\alpha,\beta)=-f(\beta,\alpha)$，可得 $f_1(\alpha)f_2(\beta)=-f_1(\beta)f_2(\alpha)$，从而 $\forall\ \alpha\in V$，有 $f_1(\alpha)f_2(\alpha)=-f_1(\alpha)f_2(\alpha)$. 所以 $f_1(\alpha)f_2(\alpha)=0$. 由 **1712** 条 $f_1(\alpha)=0$ 或 $f_2(\alpha)=0$，从而 $f(\alpha,\beta)=0$，矛盾．

1754. 设 V 是数域 P 上 n 维线性空间，f 是 V 上对称双线性函数，则存在 V 的一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，使 f 在这组基下的度量矩阵为对角矩阵．

1755. 若 n 维线性空间 V 上的对称双线性函数 $f(\alpha,\beta)$ 是非退化的，则有 V 的一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，使

$$\begin{cases} f(\alpha_i,\alpha_i)\neq 0, i=1,2,\cdots,n,\\ f(\alpha_i,\alpha_j)=0, j\neq i.\end{cases}$$

称这个基为 V 的对于 $f(\alpha,\beta)$ 的正交基．

证 由第 **1754** 条，存在 V 的一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，使 f 在这组基下的度量矩阵为对角矩阵

$$A=\mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_n).$$

由 f 是非退化的知 A 是非奇异矩阵，即 $d_i\neq 0, i=1,2,\cdots,n$. 所以

$$\begin{cases} f(\alpha_i,\alpha_i)\neq 0, i=1,2,\cdots,n;\\ f(\alpha_i,\alpha_j)=0, i\neq j.\end{cases}$$

1756. 设 V 是数域 P 上 n 维线性空间，f 是 V 上一个双线性函数，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的一组基，则 f 在这组基下的度量矩阵为对角矩阵的充要条件是对 $\alpha=\sum_{i=1}^{n}x_i\varepsilon_i,\beta=\sum_{j=1}^{n}y_j\varepsilon_j\in V$，$f(\alpha,\beta)$有表达式

$$f(\alpha,\beta)=d_1x_1y_1+d_2x_2y_2+\cdots+d_nx_ny_n,$$

这里 $d_i\in P$，$i=1,2,\cdots,n$.

1757. 设 V 是复数域上 n 维线性空间，$f(\alpha,\beta)$是 V 上的对称双线性函数，则存在 V 的一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$，对 V 中的任意向量 $\alpha=\sum_{i=1}^{n}x_i\varepsilon_i,\beta=\sum_{j=1}^{n}y_j\varepsilon_j$，有

$$f(\alpha,\beta)=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ry_r,0\leqslant r\leqslant n.$$

证 设在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的度量矩阵为 A，则 $T'AT=\begin{bmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=B$. 令

$$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)T,$$

则 f 关于基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 的度量矩阵为 B，从而$\forall$ $\alpha=\sum_{i=1}^{n}x_i\varepsilon_i,\beta=\sum_{j=1}^{n}y_j\varepsilon_j\in V$，有

$$f(\alpha,\beta)=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ry_r,0\leqslant r\leqslant n.$$

1758. 设 V 是实数域上的 n 维线性空间，$f(\alpha,\beta)$是 V 上的双线性函数，则存在 V 的一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$，对 V 中任意向量 $\alpha=\sum_{i=1}^{n}x_i\varepsilon_i,\beta=\sum_{j=1}^{n}y_j\varepsilon_j$，有

$$f(\alpha,\beta)=x_1y_1+\cdots+x_py_p-x_{p+1}y_{p+1}-\cdots-x_ry_r,0\leqslant p<r\leqslant n.$$

1759. 何谓与双线性函数对应的二次齐次函数？

答 设 V 是数域 P 上的 n 维线性空间，$f(\alpha,\beta)$是 V 上双线性函数，当 $\alpha=\beta$ 时，v 上函数 $q(\alpha)=f(\alpha,\alpha)$称为与 $f(\alpha,\beta)$对应的

二次齐次函数.

1760　设 V 是数域 P 上 n 维线性空间,则 V 上的一个对称双线性函数 $f(\alpha,\beta)$ 由与它对应的二次齐次函数完全确定.但非对称双线性函数不能由与它对应的二次齐次函数唯一确定.

证　设 $\alpha,\beta\in V$,则

$$\begin{aligned} q(\alpha+\beta)&=f(\alpha+\beta,\alpha+\beta)\\ &=f(\alpha,\alpha)+f(\alpha,\beta)+f(\alpha,\beta)+f(\beta,\beta)\\ &=f(\alpha,\alpha)+2f(\alpha,\beta)+f(\beta,\beta),\\ q(\alpha-\beta)&=f(\alpha-\beta,\alpha-\beta)\\ &=f(\alpha,\alpha)-2f(\alpha,\beta)+f(\beta,\beta). \end{aligned}$$

$$f(\alpha,\beta)=\frac{1}{4}q(\alpha+\beta)-\frac{1}{4}q(\alpha-\beta).$$

在数域 P 上二元列空间 P^2 里任取两个向量 $\alpha'=(x_1,x_2)$ 和 $\beta'=(y_1,y_2)$,规定:

$$f_1(\alpha,\beta)=x_1y_1+2x_1y_2+x_2y_2,$$

$$f_2(\alpha,\beta)=x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+x_2y_2.$$

容易验证,f_1,f_2 都是 P^2 上的双线性函数,与它们对应的二次齐次函数都是

$$q(\alpha)=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2,$$

但 $f_1\neq f_2$.

1761　设 f 是 n 维线性空间 V 上的反对称双线性函数,则存在 V 的一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_{-1},\cdots,\varepsilon_r,\varepsilon_{-r},\eta_1,\cdots,\eta_s$,使

$$\begin{cases} f(\varepsilon_i,\varepsilon_{-i})=1, & i=1,2,\cdots,r;\\ f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=0, & i+j\neq 0;\\ f(\alpha,\eta_k)=0, & \alpha\in V,k=1,2,\cdots,s. \end{cases}$$

1762　若 n 维线性空间 V 上的反对称双线性函数 $f(\alpha,\beta)$ 是非退化的,则有 V 的一组基 $\alpha_1,\alpha_{-1},\cdots,\alpha_r,\alpha_{-r}$,使

$$\begin{cases} f(\alpha_i,\alpha_{-i})=1, & i=1,2,\cdots,r; \\ f(\alpha_i,\alpha_j)=0, & i+j\neq 0. \end{cases}$$

由此得知，具有非退化反对称双线性函数的线性空间一定是偶数维的.

证　设 f 在基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 下的矩阵为 A，则由 A 非奇异，得

$$T'AT=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & \\ & & -1 & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

所以 n 是偶数.

1763　设 V 是复数域上的线性空间，其维数 $n\geqslant 2$，$f(\alpha,\beta)$ 是 v 上一个对称双线性函数，则

1) V 中有非零向量 ξ，使 $f(\xi,\xi)=0$；

2) 当 $f(\alpha,\beta)$ 非退化时，必有线性无关的向量 ξ,η 满足：

$f(\xi,\eta)=1, f(\xi,\xi)=f(\eta,\eta)=0$.

证　1) 由 **1757** 条，存在 V 的一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$，使 $\forall\ \xi=\sum_{i=1}^{n}x_i\varepsilon_i,\eta=\sum_{j=1}^{n}y_j\varepsilon_j\in V$，有

$$f(\xi,\eta)=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ry_r,$$
$$f(\xi,\xi)=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_r^2, 0\leqslant r\leqslant n. \tag{1}$$

当 $r=0$ 时，对 V 中任意非零向量 ξ，都有 $f(\xi,\xi)=0$.

当 $r=1$ 时，取 $\xi=\varepsilon_2\neq 0$，有 $f(\xi,\xi)=0$.

当 $r\geqslant 2$ 时，取 $\xi=i\varepsilon_1+\varepsilon_2$，有 $f(\xi,\xi)=i^2+1^2=0$.

2)若 $f(\alpha,\beta)$ 是非退化的，则(1)式为

$$f(\xi,\eta)=x_1y_1+\cdots+x_ny_n.$$

取 $\xi=\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_1+\frac{i}{\sqrt{2}}\varepsilon_2,\eta=\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_1-\frac{i}{\sqrt{2}}\varepsilon_2$ 得

$$f(\xi,\xi)=(\frac{1}{\sqrt{2}})^2+(\frac{i}{\sqrt{2}})^2=0=f(\eta,\eta),$$

$$f(\xi,\eta)=(\frac{1}{\sqrt{2}})^2+(\frac{i}{\sqrt{2}})(-\frac{i}{\sqrt{2}})=1,$$

且易知 ξ,η 是线性无关的向量.

1764. 线性空间 V 上双线性函数 $f(\alpha,\beta)$ 为反对称的充要条件是对任意 $\alpha\in V$ 都有 $f(\alpha,\alpha)=0$.

证 必要性. 因为 f 是反对称的,所以 $\forall\ \alpha\in V$,有 $f(\alpha,\alpha)=-f(\alpha,\alpha)$. 故 $f(\alpha,\alpha)=0$.

充分性. $\forall\ \alpha,\beta\in V,f(\alpha+\beta,\alpha+\beta)=f(\alpha,\alpha)+f(\alpha,\beta)+f(\beta,\alpha)+f(\beta,\beta)$,

而 $f(\alpha+\beta,\alpha+\beta)=f(\alpha,\alpha)=f(\beta,\beta)=0$,故 $f(\alpha,\beta)=-f(\beta,\alpha)$. 即 f 为反对称的.

1765 设 $f(\alpha,\beta)$ 是数域 P 上 n 维线性空间 V 上的对称或反对称双线性函数,α,β 是 V 中两个向量,若 $f(\alpha,\beta)=0$,则称 α,β 正交. 再设 K 是 V 的一个真子空间,则对 $\xi\overline{\in}K$,必有非零的 $\eta\overline{\in}K+L(\xi)$,使 $f(\eta,\alpha)=0$,对所有 $\alpha\in K$ 都成立.

证 先证 f 是对称双线性函数的情形. 这时,f 也是 K 上的对称双线性函数. 假定 $\dim K=t$,则由第 **1754** 条知存在 K 的一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_t$,使 f 在这组基下的度量矩阵为 $\mathrm{diag}(d_1,\cdots,d_t)$. 令

$$\eta=\frac{f(\xi,\alpha_1)}{d_1}\cdot\alpha_1+\cdots+\frac{f(\xi,\alpha_t)}{d_t}\cdot\alpha_t-\xi.$$

当 $d_i=0$ 时,删去相应的项,则 $\eta\in K+L(\xi)$,且 $\eta\neq0$. $\forall\ \alpha=\sum_{i=1}^{t}a_i\alpha_i\in K$,有

$$f(\eta,\alpha)=f(\sum_{i=1}^{t}\frac{f(\xi,\alpha_i)}{d_i}\alpha_i-\xi,\sum_{j=1}^{t}a_j\alpha_j)$$

$$=\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{t}\frac{a_i}{d_i}f(\xi,\alpha_i)f(\alpha_i,\alpha_j)-\sum_{j=1}^{t}a_jf(\xi,\alpha_j)$$

$$=\sum_{j=1}^{t}a_jf(\xi,\alpha_j)-\sum_{j=1}^{t}a_jf(\xi,\alpha_j)=0.$$

再证 f 是反对称双线性函数的情形.

1) 若对给定的 $\xi\overline{\in}K$,有 $\beta\overline{\in}K$,使 $f(\xi,\beta)\neq0$,可令 $\varepsilon_1=\xi,\varepsilon_{-1}=\lambda\beta$,使 $f(\varepsilon_1,\varepsilon_{-1})=1$,然后将 $\varepsilon_1,\varepsilon_{-1}$ 扩充为 $K+L(\xi)$ 的一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_{-1},\cdots,\varepsilon_t,\varepsilon_{-t},\eta_1,\cdots,\eta_s$,使

$$\begin{cases}f(\varepsilon_i,\varepsilon_{-i})=1, & i=1,2,\cdots,t,\\ f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=0, & i+j\neq0,\\ f(\alpha,\eta_k)=0, & \alpha\in K+L(\xi).\end{cases}$$

当 $s\neq0$ 时,取 $\eta=\eta_1$ 即可;

当 $s=0$ 时,取 $\eta=\varepsilon_{-1}$,由 $\xi=\varepsilon_1,K=L(\varepsilon_{-1},\varepsilon_2,\varepsilon_{-2},\cdots,\varepsilon_t,\varepsilon_{-t})$,则 $\forall\ \alpha\in K$,有 $f(\eta,\alpha)=0$.

2) 若 $\forall\ \beta\in K,f(\xi,\beta)=0$,则取 $\eta=\xi$ 即可.

1766. 设 V 是数域 P 上 n 维线性空间,$f(\alpha,\beta)$ 是 V 上的对称的或反对称的双线性函数,K 是 V 的一个子空间. 令

$$K^2=\{\alpha\in V\,|\,f(\alpha,\beta)=0,\forall\ \beta\in K\},$$

1) $K^{\perp}$ 是 V 的子空间($K^{\perp}$ 称为 K 的正交补);

2) 当 $K\cap K^{\perp}=\{0\}$ 时,$V=K+K^{\perp}$.

证 1) $\forall\ \beta\in K$,有 $f(0,\beta)=0f(0,\beta)=0$。故 $0\in K^{\perp}$,所以 $K^{\perp}$ 非空.

$\forall\ \alpha_1,\alpha_2\in K^{\perp},\forall\ k\in P,\forall\ \beta\in K$,有

$$f(k\alpha_1,\beta)=kf(\alpha_1,\beta)=0,$$

$$f(\alpha_1+\alpha_2,\beta)=f(\alpha_1,\beta)+f(\alpha_2,\beta)=0,$$

故 $k\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2\in k^{\perp}$,从而 $k^{\perp}$ 是 V 的子空间.

2) $K+K^{\perp}\subseteq V$ 是显然的.

不妨设 K 是 V 的真子空间. $\forall\ \xi\in V$,若 $\xi\in K$,则证毕;若 $\xi\overline{\in}$

K'则由 **1765** 条知存在非零的 $\eta\in K+L(\xi)$，使

$$f(\eta,\alpha)=0,\forall\ \alpha\in K.$$

此即 $\eta\in K^{\perp}$. 又

$$\eta=\beta+k\xi,\beta\in K,k\in P,\tag{1}$$

显然 $k\neq 0$，否则 $\eta=\beta\in K\cap K^{\perp}=\{0\},\eta=\beta=0$，矛盾. 从而由(1)知

$$\xi=-\frac{1}{k}\beta+\frac{1}{k}\eta\in K+K^{\perp},$$

所以 $V\subseteq K+K^{\perp}$.

1767　设 V 是数域 p 上 n 维线性空间，$f(\alpha,\beta)$是 V 上对称或反对称双线性函数，并且 $f(\alpha,\beta)$限制在 V 的子空间 K 上是非退化的，则 $V=K\oplus K^{\perp}$的充要条件是 $f(\alpha,\beta)$在 V 上为非退化的.

证　必要性　设 $V=K+K^{\perp}$，且

$$f(\alpha,\beta)=0,\forall\ \beta\in V.\tag{1}$$

下证 $\alpha=0$.　设 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1\in K,\alpha_2\in K^{\perp}$，则$\forall\ \beta\in K$，

$$\begin{aligned}0&=f(\alpha,\beta)=f(\alpha_1+\alpha_2,\beta)\\&=f(\alpha_1,\beta)+f(\alpha_2,\beta)=f(\alpha_1,\beta).\end{aligned}$$

由于 $f(\alpha,\beta)$在 K 上是非退化的，故 $\alpha_1=0$，从而 $\alpha=\alpha_2\in K^{\perp}$

又$\forall\ \gamma\in K^{\perp}$，由(1)知 $f(\alpha,\gamma)=0$. 故 $\alpha\in(K^{\perp})^{\perp}=K$。所以，$\alpha\in K\cap K^{\perp}$. 但由题设 $K\cap K^{\perp}=\{0\}$得知 $\alpha=0$.

充分性　设 $\alpha_1\in K\cap K^{\perp}$，倘若 $\alpha_1\neq 0$，则将 α_1 扩充为 K 的一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$(假定 $\mathrm{dvm}K=m$.)，由于 $\alpha_1\in K^{\perp}$，故 $f(\alpha_1,\alpha_j)=0,j=1,2,\cdots,m$，即 f 在 K 上关于基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 的度量矩阵第一行的元全为 0，因而是退化的. 这与 f 在 K 上非退化矛盾，所以 $\alpha_1=0,K\cap K^{\perp}=\{0\}$.

由第 **1766** 条，$V=K+K^{\perp}$，故 $V=K+K^{\perp}$.

1768.　设 f 是数域 p 上 n 维线性空间 V 上的一个对称双线性函数，令

$$S=\{\xi\in V \mid f(\xi,\eta)=0,\forall\ \eta\in V\},$$

则 1) S 是 V 的一个子空间；

2) $S=\{0\}$当且仅当 f 关于 V 的任意一组基的矩阵非奇异．

证　见 1766 条和 1743 条．

1769.　设 $f(\alpha,\beta)$是 n 维线性空间 V 上的非退化对称双线性函数。对 V 中一个元素 α,定义 V^* 中一个元素 α^*：

$$\alpha^*(\beta)=f(\alpha,\beta),\beta\in V. \tag{1}$$

1) V 到 V^*的映射 φ：$\alpha\longrightarrow\alpha^*$ 是一个同构映射；

2) 对 V 的每组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$,有 V 的唯一的一组基 $\varepsilon'_1,\varepsilon'_2,\cdots,\varepsilon'_n$,使

$$f(\varepsilon_i,\varepsilon'_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1,i=j;\\0,i\neq j.\end{cases}$$

证　1) 由第 1755 条,存在 V 的一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$,使

$$f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=\begin{cases}d_i\neq 0,j=i;\\0,\qquad j\neq i.\end{cases}$$

由(1),作出相应的 $\varepsilon_1^*,\varepsilon_2^*,\cdots,\varepsilon_n^*\in V^*$,考虑

$$k_1\varepsilon_1^*+k_2\varepsilon_2^*+\cdots+k_n\varepsilon_n^*=0,$$

有

$$\begin{aligned}0&=(k_1\varepsilon_1^*+k_2\varepsilon_2^*+\cdots+k_n\varepsilon_n^*)(\varepsilon_1)\\&=k_1\varepsilon_1^*(\varepsilon_1)+k_2\varepsilon_2^*(\varepsilon_1)+\cdots+k_n\varepsilon_n^*(\varepsilon_1)\\&=k_1f(\varepsilon_1,\varepsilon_1)+k_2f(\varepsilon_2,\varepsilon_1)+\cdots+k_nf(\varepsilon_n,\varepsilon_1)\\&=k_1d_1.\end{aligned}$$

而 $d_1\neq 0$,所以 $k_1=0$,类似地可证 $k_2=\cdots=k_n=0$. 即 $\varepsilon_1^*,\varepsilon_2^*,\cdots,\varepsilon_n^*$ 线性无关,因而是 V^* 的一组基．

以上证得映射 φ 保证基对应基．进一步易知 φ 为双射．

另一方面,$\forall\ \alpha,\beta,\gamma\in V$,因为

$$\varphi(\alpha+\beta)=(\alpha+\beta)^*,\varphi(\alpha)+\varphi(\beta)=\alpha^*+\beta^*,$$

$$(\alpha+\beta)^*(\gamma)=f(\alpha+\beta,\gamma)$$

$$=f(\alpha,\gamma)+f(\beta,\gamma)$$
$$=\alpha^*(\gamma)+\beta^*(\gamma)$$
$$=(\alpha^*+\beta^*)(\gamma),$$

所以

$$\varphi(\alpha+\beta)=(\alpha+\beta)^*=\alpha^*+\beta^*=\varphi(\alpha)+\varphi(\beta).$$

$\forall\ \alpha,\gamma\in V,k\in P$，因为

$$\varphi(k\alpha)=(k\alpha)^*,k\varphi(\alpha)=k\alpha^*,$$
$$(k\alpha)^*(\gamma)=f(k\alpha,\gamma)=kf(\alpha,\gamma)$$
$$=k\alpha^*(\gamma)=(k\alpha^*)(\gamma),$$

所以

$$\varphi(k\alpha)=(k\alpha)^*=k\alpha^*=k\varphi(\alpha).$$

综上所述可知 $\varphi:\alpha\longrightarrow\alpha^*$ 是一个同构映射．

2）设 V^* 中线性函数 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 是基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 的对偶基，由 1)知 V 中存在唯一的向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，使

$$\alpha^*=\varphi(\alpha_i)=f_i,i=1,2,\cdots,n.$$

于是

$$f(\alpha_i,\varepsilon_j)=\alpha_i^*(\varepsilon_j)=f_i(\varepsilon_j)=\begin{cases}1,j=i;\\0,j\neq i.\end{cases}$$

即 $f(\varepsilon_i,\alpha_j)=\delta_{ij}\cdot i、j=1,2,\cdots,n.$

另一方面，设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=0$，

则

$$0=f(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\varepsilon_n,\varepsilon_1)$$
$$=k_1f(\alpha_1,\varepsilon_1)+k_2f(\alpha_2,\varepsilon_1)+\cdots+k_nf(\alpha_n,\varepsilon_1)$$
$$=k_1.$$

类似地可证 $k_2=\cdots=k_n=0$. 从而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，因而是 V 的一个基．令 $\varepsilon'_1=\alpha_1,\varepsilon'_2=\alpha_2,\cdots,\varepsilon'_n=\alpha_n$ 即可．

1770.　什么叫做仿欧氏空间?

答　设 V 是数域 p 上的 n 维线性空间，在 V 上定义了一个非

退化的双线性函数，则 V 称为一个双线性度量空间．特别地，当 V 为 n 维实线性空间，$f(\alpha,\beta)$是 V 上非退化对称双线性函数时，V 称为一个伪欧氏空间．

注　欧氏空间中度量矩阵（内积）对角线元素必为正，双线性函数 $f(\alpha,\beta)$的度量矩阵对角线元素可能为负，故称伪欧氏空间．

1771.　设 V 是对于非退化对称双线性函数 $f(\alpha,\beta)$的 n 维伪欧氏空间．V 的一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$，如果满足：

$$f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=1, i=1,2,\cdots,p,$$
$$f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=-1, i=p+1,\cdots,n,$$
$$f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=0, i\neq j,$$

则称为 V 的一组伪正交基．如果 V 上的线性变换 σ 满足：

$$f(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=f(\alpha,\beta), \alpha,\beta\in V,$$

则称 σ 为 V 的一个伪正交变换．

1）伪正交变换是可逆的，且逆变换也是伪正交变换；

2）伪正交变换的乘积仍是伪正交变换；

3）伪正交变换的特征值等于 1 或 -1；

4）伪正交变换在伪正交基下的矩阵 T 满足：

$$TT'=\mathrm{diag}(1,\cdots,1,-1,\cdots,-1).$$

证　1）由于 f 是非退化的对称双线性函数，因此存在 V 的一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$，使 f 在这组基下的度量矩阵为对角矩阵

$$A=\mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_n),$$

其中 $d_i\neq 0, i=1,2,\cdots,n$.

设 σ 是 V 的一个伪正交变换，则

$$\sigma(V)=L(\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\cdots,\sigma(\varepsilon_n)).$$

令 $k_1\sigma(\varepsilon_1)+k_2\sigma(\varepsilon_2)+\cdots+k_n\sigma(\varepsilon_n)=0$，则

$$\begin{aligned}0&=f(0,\sigma(\varepsilon_1))=f(k_1\sigma(\varepsilon_1)+\cdots+k_n\sigma(\varepsilon_n),\sigma(\varepsilon_1))\\&=k_1f(\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_1))+\cdots+k_nf(\sigma(\varepsilon_n),\sigma(\varepsilon_n))\\&=k_1f(\varepsilon_1,\varepsilon_1)+\cdots+k_nf(\varepsilon_n,\varepsilon_n).\end{aligned}$$

$=k_1d_1.$

而 $d_1\neq0$，故 $k_1=0$. 类似可证 $k_2=\cdots=k_n=0$. 从而 $\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\cdots,\sigma(\varepsilon_n)$线性无关，因而是 $\sigma(V)$的一组基，$\dim\sigma V=n$. 于是 $\ker\sigma=\{0\}$，σ 是单射. 注意到 V 是有限维的，知 σ 也是满射，即 σ 是可逆变换.

设 σ 的逆变换为 σ^{-1}，则 σ^{-1}仍为线性变换，且

$$\sigma\sigma^{-1}=I_V,\sigma^{-1}\sigma=I_V.$$

$\forall\ \alpha,\beta\in V$，有

$$\begin{aligned}f(\sigma^{-1}(\alpha),\sigma^{-1}(\beta))&=f(\sigma\sigma^{-1}(\alpha),\sigma\sigma^{-1}(\beta))\\&=f(I_V(\alpha),I_V(\beta))\\&=f(\alpha,\beta),\end{aligned}$$

故 σ^{-1}为伪正交变换.

2）设 σ,τ 是 V 的两个伪正交变换，则 $\tau\sigma$ 仍为 V 的线性变换，且$\forall\ \alpha,\beta\in V$，有

$$f(\tau\sigma(\alpha),\tau\sigma(\beta))=f(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=f(\alpha,\beta),$$

即 $\sigma\tau$ 是伪正交变换.

3）由第 **1755** 条知存在一组基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$，使

$$f(\varepsilon_j,\varepsilon_j)=\begin{cases}d_i\neq0, & i=j;\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

设 λ 为 σ 的任一特征值，$\alpha=k_1\varepsilon_1+\cdots+k_n\varepsilon_n$ 为其相应的一个特征向量，则

$$\begin{aligned}f(\alpha,\alpha)&=f(\sigma(\alpha),\sigma(\alpha))=f(\lambda\alpha,\lambda\alpha)\\&=\lambda^2f(\alpha,\alpha).\end{aligned}\tag{1}$$

但 $f(\alpha,\alpha)=k_1^2d_1^2+\cdots+k_n^2d_n^2\neq0$，故在(1)式两边消去 $f(\alpha,\alpha)$得 $\lambda^2=1$，即 $\lambda=\pm1$.

4）设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为 V 的伪正交基，则

$$f(\alpha_i,\alpha_j)=\begin{cases}1,\ i=j=1,2,\cdots,p;\\ -1,\ i=j=p+1,\cdots,n;\\ 0,\ i\neq j.\end{cases}$$

由假设 $\sigma(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)T$，其中 $T=(t_{ij})_{n\times n}$. 于是

$$1=f(\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_1))=t_{11}^2+\cdots+t_{p1}^2-(t_{p+1,1}^2+\cdots+t_{n1}^2).$$

类似地可证得

$$\begin{cases} 1=t_{1k}^2+\cdots+t_{pk}^2-(t_{p+1,k}^2+\cdots+t_{nk}^2),k=1,2,\cdots,p; \\ -1=t_{1,k}^2+\cdots+t_{pk}^2-(t_{p+1,k}^2+\cdots+t_{nk}^2),k=p+1,\cdots,n, \quad (2) \\ 0=t_{1i}t_{1j}+\cdots+t_{pi}t_{pj}-(t_{p+1,i}t_{p+1,j}+\cdots+t_{ni}t_{nj}),t_i\neq t_j. \end{cases}$$

用矩阵写出(2)式即为

$$TT'=\begin{bmatrix} E_p & \\ & -E_{n-p} \end{bmatrix}.$$

第二十二章　代数系统的基本概念

一、 集合

1772. 什么是集合？什么叫做空集？什么叫做子集？

答 集合是数学中最基本的概念之一，它是不加定义的最原始的概念，像几何中点、线、面一样不加定义，只作描述．

集合就是在研究过程中，某一些对象的全体．一个集合的给定，意味着一个界定，依照这个界定，可以判别一个对象是否包含在这个集合中，这就是集合的确定性．

当对象 a 包含在集合 A 中，称 a 是 A 的元素，记为 $a\in A$，否则记为 $a\overline{\in} A$.

集合除了上面的确定性之外，还有两个特性．一是无序性，即认为集合中的元素是没有顺序的．二是互斥性，即集合中的任意两个元素都认为是不相同的．

不包含任何元素的集合，称为空集．空集通常记为$\varnothing$.

设 A,B 是两个集合，若对于所有的 $x\in A$，均有 $x\in B$，则称 A 是 B 的一个子集．此时，记作 $A\subseteq B$ 或 $A\subset B$. 若 $A\subset B$，但存在 $x\in B$，而 $x\overline{\in} A$，则称 A 为 B 的一个真子集．很明显，若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则 $A=B$. 因为此时 A,B 拥有相同的元素．

1773. 集合有哪些运算？集合运算具有哪些基本性质？

答 设 A,B 是两个集合，由属于 A 或属于 B 的元素所组成的集合，称为 A 与 B 的并集，以 $A\cup B$ 表示．换言之，$A\cup B$ 中的元素恰好是那些元素，它或者属于 A，或者属于 B，当然也允许它同时属于 A 和 B.

A,B 的交集，记作 $A\cap B$，表示一个集合，其中元素皆同时属

于 A,B，而且同属于 A,B 的元素亦必在其中．

$A-B$ 或 $A\backslash B$ 表示一个集合，其中元素是在 A 中而不在 B 中的元素的全体．称为差集．

首先，并与交的运算，满足结合律与交换律．具体地说，对任意的集合 A,B,C，均有

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C);$$
$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C);$$
$$A\cup B=B\cup A;$$
$$A\cap B=B\cap A;$$

其次，并对交与交对并均满足分配律，即是说，对任意的集合 A,B,C，均有

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C);$$
$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C).$$

此外，还有一个称为吸收律的，即对任意的集合 A,B，均有

$$A\cup(A\cap B)=A;A\cap(A\cup B)=A.$$

1774.　何谓补集及狄摩根(*De Mregan*)定律？

答　在某些理论中，仅仅讨论某一集合 Q 的子集，则称 Q 为通用集或宇集．若 $A\subset Q$. 我们称差集 $Q\backslash A$ 是 A 的补集．记作 A^C. 对于 Q 中的子集 A,B，$A\subset B$ 和 $A^C\supset B^C$ 是等价的．而且对一切 $A\subset Q$，$A^C\cup A=Q$；$A^C\cap A=\varnothing$；$A^{CC}=A$.

最值得注意的是狄摩根定律，即对一切 $A,B\subseteq Q$，下列等式成立：

$$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C;$$
$$(A\cup B)^C=A^C\cap B^C.$$

1775.　什么叫做集族？集族的并？集族的交？

答　设 $\mathscr{F}$ 是一个集合，其中 $\mathscr{F}$ 中每个元素本身也是一个集合．则称 $\mathscr{F}$ 是集族．

把集族 $\mathscr{F}$ 的并，记作 $\cup\mathscr{F}$，定义如下：

$$\bigcup\mathscr{F}=\{x \mid 存在一个 A\in\mathscr{F}，使 x\in A\}.$$

把集族 $\mathscr{F}$ 的交，记作 $\bigcap\mathscr{F}$，定义如下：

$$\bigcap\mathscr{F}=\{x \mid 若 A\in\mathscr{F} 则 x\in A\}.$$

1776. 什么是序对？什么是直积？

答 对于对象 a,b，我们产生新的对象 (a,b)，并且规定 $(a,b)=(c,d)$ 当且仅当 $a=c$ 及 $b=d$ 时成立．把 (a,b) 称为 a 与 b 的序对．

对给定集合 A,B，考虑所有如下的序对：$\{(a,b) \mid a\in A,b\in B\}$ 这些序对的全体称为 A 与 B 的直积，或称为卡氏积，记作 $A\times B$.

注 这里的定义与第 **36** 条一致．

1777. 集族运算有什么性质？

答 把集族记为 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. 设所有 A_λ 均是某个宇集的子集．则有狄摩根定律如下：

$$\left[\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right]^c=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^c;\left[\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right]^c=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^c.$$

若 $\{B_\mu\}_{\mu\in M}$ 是集族，则可有分配律(有时又称为广义分配律)如下：

$$\left[\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right]\cap\left[\bigcup_{\mu\in M}B_\mu\right]=\bigcup_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M}(A_\lambda\cap B_\mu);$$

$$\left[\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right]\cup\left[\bigcap_{\mu\in M}B_\mu\right]=\bigcap_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M}(A_\lambda\cup B_\mu).$$

最后，若给出的集族是 $\{A_{\lambda\mu}\}_{\lambda\in\Lambda,\mu\in M}$. 则结合律可表示如下：

$$\bigcup_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M}A_{\lambda\mu}=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\left[\bigcup_{\mu\in M}A_{\lambda\mu}\right];$$

$$\bigcap_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M}A_{\lambda\mu}=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\left[\bigcap_{\mu\in M}A_{\lambda\mu}\right].$$

1778. 什么是关系？

答 设 X,Y 是两个集合，若对任意的 $x\in X$ 及任意的 $y\in Y$，$R(x,y)$ 是一个可判定是真或伪的命题．则称这个 R 是一个关系．例如：$X=Y=$ 整数集，

$R(x,y)$ 表示：$x-y$ 为偶数．

$P(x,y)$ 表示：$\sqrt{x}=y$.

这里，R 与 P 都是从集 X 到集 Y 的一个关系．

设 R 是由 X 到 Y 的一个关系，则使 $R(x,y)$ 取真值的序对 (x,y) 所组成的集 $G=\{(x,y)\mid R(x,y)$ 为真$\}$ 称为关系 R 的图像．有人把 G 称为一个关系．事实上，重要的是 $X\times Y$ 中的一个子集给出一个由 X 到 Y 的关系．反之，一个由 X 到 Y 的关系也确定了一个 $X\times Y$ 中的子集．双方唯一地决定了对方．因此，不必区别这是关系还是子集．以后用 xRy 去表示 (x,y) 属于 R 的图像（或者把这说成 (x,y) 使 $R(x,y)$ 取真值）．

注　这里的定义与第 **164** 条是一致的．

1779.　何谓偏序？偏序集？全序集？

答　设 X 是一集合．由 X 到自己本身的一个关系 R 称为 X 上的一个偏序，如果以下的条件成立：

(i) 自反律：若 $x\in X$，则 xRx.

(ii) 反对称律：若 xRy 且 yRx，则 $x=y$.

(iii) 可迁律：若 xRy 且 yRz，则 xRz.

一般偏序常用"$\leqslant$"或"$\geqslant$"表示．

在元素之间已定义了偏序 $\leqslant$ 的集合 X，称为一个偏序集．因为，对于 $x,y\in X$，未必有 $x\leqslant y$ 或 $y\leqslant x$. 换言之，x 与 y 未必可以比较大小．

若 X 在偏序 $\leqslant$ 之下能使任意的 $x,y\in X$ 均有 $x\leqslant y$ 或者 $y\leqslant x$，则称 X 在 $\leqslant$ 之下成一全序集．全序集又称为线序集．

1780.　试叙述偏序集中的一子集之上界、下界、最大元、最小元、上确界、下确界、极大元、极小元等定义．

答　设 A 是一个偏序集，把它的偏序记作为 $\leqslant$. 设 X 是 A 的一个非空子集．取 $a\in A$. 若 $x\leqslant a$ 对一切 $x\in X$ 均成立，则称 a 是 X 的一个上界；若 $a\leqslant x$ 对一切 $x\in X$ 成立，则称 a 为 X 的下界．若 a 是 X 的一个上界且 $a\in X$，则称 a 是 X 中的最大元；若 a 是 X 的下界且 $a\in X$，则称 a 是 X 中的最小元．若 X 有上界而 a 是由

所有上界所组成的集合中的最小元，则称 a 是 X 的上确界或最小上界；若 X 有下界而 b 是它所有下界所成集合中的最大元，则称 a 是 X 的下确界或最大下界．若 $a\in X$ 使当 $a\leqslant x$ 时必有 $a=x$，则称 a 是 X 中的一个极大元；若 $a\in X$ 使当 $x\leqslant a$ 时必有 $a=x$，则称 a 是 X 的一个极小元。

1781.　什么叫做曹恩(Zorn)引理？

答　首先介绍归纳偏序集．一个偏序集 X，若其中任一个全序子集均有上界，则称它为一个归纳序集．

Zorn 引理：一个偏序集若是归纳序集，则至少有一个极大元．

值得一提的是：这个 Zorn 引理其实是一个公理．如果不接受它作为一个公理，则需要接受其它与它等价的公理．

1782.　什么叫映射？单射？满射？双射？

答　见第 **13** 条与第 **14** 条．

1783.　什么是等价关系？商集？

答　等价关系见第 **171** 条．

设 R 是集合 X 上的一个等价关系．如果 xRy，则称 x 与 y 等价．若 $x\in X$，X 中一切与 x 等价的元素所成的子集称为一个等价类．由等价关系的三个性质决定了每个等价类都是非空的，而且，每两个等价类或者相同或者互不相交．于是 X 便可表为一个两两互不相交的集族的并．这个集族称为 X 的一个分类，或称为 X 关于 R 的商集且记作 X/R.

二、　代数系统

1784.　什么叫做一个运算？合成？

答　设 A,B 是两个集合，映射 $f:A\times B\to B$ 称为 A 对 B 的一个运算．此时 A 中的每一个元素称为 B 上的一个算子．严格地说，f 是 A 对 B 的一个左运算．类似地，映射 $g:A\times B\to A$ 称为 B 对 A 的一个右运算．

若给定了一个运算 $f:S\times S\to S$,则称此运算 f 为 S 上的一个合成．因此,给定了 S 上的一个合成,等于说对于 $a,b\in S$ 有唯一的 $c\in S$,使 $f(a,b)=c$. 通常用

$$a*b=c \text{ 或 } a\circ b=c \text{ 或 } ab=c$$

来表示合成．因此,合成亦称为 S 上的一个二元运算．当 S 上已规定了一个合成而用 $*$ 表示时,则写 $(S,*)$ 表示 S 已具有合成 $*$.

1785. 什么是结合律？交换律？

答 设 f 是 S 上的一个合成,把 $f(a,b)$ 记作 $a*b$,则 $a*b$ 也是 S 中的一个元素．因而对任意的 $c\in S$,$(a*b)*c$ 也是 S 中的元素．同理,$a*(b*c)$ 也是 S 中的元素．如果对一切的 $a,b,c\in S$ 均有 $(a*b)*c=a*(b*c)$,则说这个合成满足结合律．

设 S 上有合成记之为 $*$. 若对一切 $a,b\in s$ 均有 $a*b=b*a$,则说这个合成满足交换律．

1786. 什么是单位元？单位元是否唯一？

答 设 S 上有合成记之为 $*$. 若 $e\in S$ 使得

$$a*e=e*a=a,\ \forall\, a\in S,$$

则称 e 为这个合成的单位元．

单位元是唯一的．事实上,设 $(S,*)$ 中有单位元,若 $e_1,e_2\in S$ 均为单位元,则由单位元的定义,$e_1=e_1*e_2=e_2$,这证明了 $(S,*)$ 只有一个单位元．

1787. 1) 什么是逆元？

2) 试证:若 S 上的合成满足结合律,则其元素的逆元是唯一的．

答 1) 设 $(S,*)$ 具有单位元 e,对于 $a\in S$,若有 $x\in S$ 使 $x*a=a*x=e$,则称 x 是 a 的一个逆元．

2) 设 $(S,*)$ 中有单位元 e. 若 $a\in S$,且 $x_1,x_2\in S$ 均为 a 的逆元,则

$$x_1=x_1*e=x_1*(a*x_2)=(x_1*a)*x_2$$

$= e * x_2 = x_2.$

因此,每个 $a \in S$ 至多有一个逆元.

1788. 试述分配律?

答 设 S 上规定了两个合成,分别记作 $*$ 与 $\circ$. 若对一切的 $a,b,c \in S$,均有

$$a * (b \circ c) = (a * b) \circ (a * c),$$

则说 $*$ 对于 $\circ$ 是可分配的. 或者简单地说 $*$ 对 $\circ$ 满足分配律. 同理,若对一切 $a,b,c \in S$,均有

$$a \circ (b * c) = (a \circ b) * (a \circ c)$$

则说 $\circ$ 对 $*$ 满足分配律. 若 $*$ 对 $\circ$ 以及 $\circ$ 对 $*$ 都满足分配律,则说 $*$ 与 $\circ$ 满足双分配律.

1789. 代数系统是什么?

答 一个非空集合,在其上给出了一个或多个合成,可能还有其他集合对它的运算,并满足某些定律,则称为一个代数系统.

1790. 什么是同态? 同构?

答 设$(A, *)$与$(B, \circ)$是两个代数系统,若映射 $f: A \to B$ 能维持合成,即是说对一切的 $a_1, a_2 \in A$,均有

$$f(a_1 * a_2) = f(a_1) \circ f(a_2),$$

则称 f 是由 A 到 B 的一个同态. 若有一个由 A 到 B 上的一个满同态,则说 A 与 B 是同态的.

设$(A, *)$与$(B, \circ)$是两个代数系统. 若映射 $f: A \to B$ 是一个双射,且是由 A 到 B 的一个同态,则称 f 是一个由 A 到 B 的同构. 此时,称 A 与 B 是同构的.

1791. 什么是子系统?

答 设 B 为一代数系统,A 是 B 的子集,且 A 在某合成下亦为一代数系统. 若由 A 到 B 的恒等映射 $f: A \to B$(即 $f(a) = a$ 对一切 $a \in A$ 成立)是一个同态,则称代数系统 A 为 B 的一个子系统.

1792. 什么是商系统？

答 设 A 是一代数系统，有一个合成，在其上有一等价关系 R，若对任意的 $a,b,a',b'\in A$，当 aRa' 及 bRb' 时，恒有 $abRa'b'$，则说等价关系与 A 中的合成是相容的．此时，由 R 所确定的商集 A/R，可经标准满射（又称自然满射）$f:A\to A/R$，把 A 中的合成移植到 A/R 之上．具体来说是规定了 A/R 的一个合成，使 f 是一个同态．这个代数系 A/R 称为 A 的一个商系统．